ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Ιστορία των Μαθηματικών

## **Ενότητα 2**: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

**Χαρά Χαραλάμπους**
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Ιστορία των Μαθηματικών

## **Ενότητα 2.2**: Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.

**Χαρά Χαραλάμπους**
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

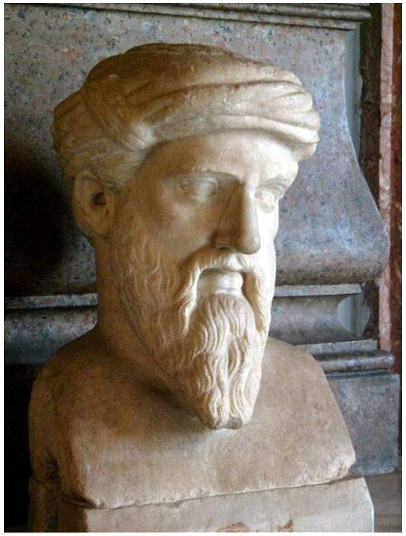
# Περιεχόμενα Ενότητας

- Τι είναι απόδειξη?
- Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

# Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή δίνεται  περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των  Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρης αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.

# Πυθαγόρας (570-490) και οι Πυθαγόρειοι

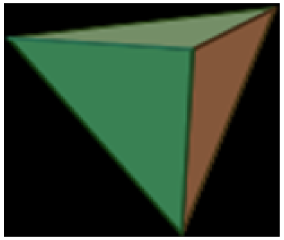


Εικόνα 1

Οι αριθμοί αποτελούν τη βάση του κόσμου.

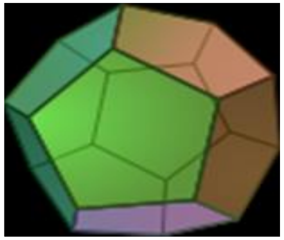
«Το παν είναι αριθμός»

# Πλατωνικά στερεά—Κανονικά Πολύεδρα (μνεία και Πυθαγόρα)



Τετράεδρο {3,3}

Κύβος {4,3}

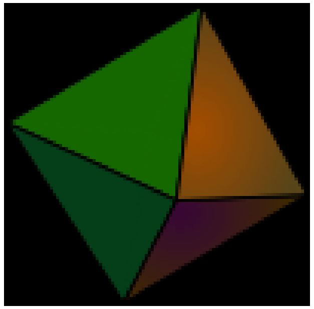


Δωδεκάεδρο, 12 έδρες, όλες κανονικά πεντάγωνα. Σε κάθε κορυφή συναντώνται ακριβώς 3 έδρες. {5,3}

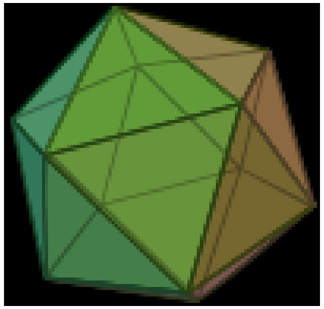
Υπάρχουν άλλα κανονικά Πολύεδρα?

# Πλατωνικά στερεά—Κανονικά Πολύεδρα

Οκτάεδρο {3,4}



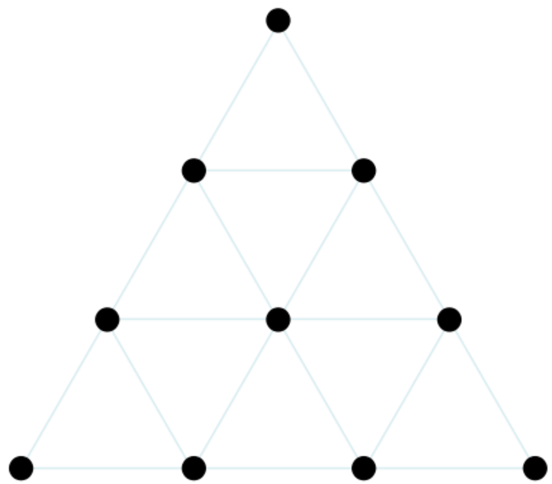
Εικοσάεδρο {3,5}



**Δεν υπάρχουν άλλα πλατωνικά στερεά**

**(Ευκλείδης, «Στοιχεία», βιβλίο 13, Πρόταση 18 , Θεαίτητος)**

# τετρακτύς



Εικόνα 2

10: σύμπαν:

άθροισμα όλων των δυνατών γεωμετρικών διαστάσεων

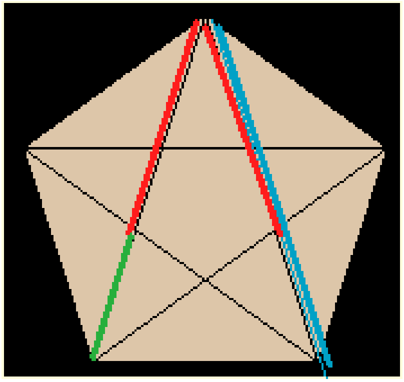
ένα σημείο: γεννήτωρ των διαστάσεων

δύο σημεία: ευθεία: διάσταση 1

τρία σημεία: τρίγωνο: διάσταση 2

τέσσερα σημεία: τετράεδρο: διάσταση 3

# Χρυσή τομή (1)



α= διαγώνιος= γαλάζιο

x=το μεγαλύτερο τμήμα της τομής= κόκκινο

Ο λόγος $\varphi = \frac{a}{x}$ είναι η χρυσή τομή.

Ισχύει

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

# Χρυσή τομή (2)

Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την τιμή της χρυσής τομής από τη σχέση →

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

$$\varphi = \frac{a}{x} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$$

$$\Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Πως προκύπτει όμως ότι οι διαγώνιοι του κανονικού πενταγώνου τέμνονται με τέοιο τρόπο; (αποδείξτε το)

# Κοινή μονάδα μέτρησης

Σύμφωνα με τη Πυθαγόρεια φιλοσοφία κάθε τι μπορεί να μετρηθεί … δύο ποσότητες $a$ και $b$ μπορούν πάντα να συγκριθούν: υπάρχει πάντα κοινή μονάδα μέτρησης.

Δηλαδή: Δοθέντος $a$ και $b$ υπάρχει $c$ έτσι ώστε $a$ και $b$ να είναι ακέραια πολλαπλάσια του $c$.

**Παράδειγμα**: $\mathrm{a} = 3, b = 4$. Τότε 3=3 επί 1, 4=4 επί 1.

**Σύγχρονη ερμηνεία**: $a = mc, b = nc$ όπου $m, n$ ακέραιοι

Άρα $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ είναι ρητός.

# «Σόκ» η εύρεση των «άρρητων»

Μνεία στο έργο του Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.) για γνώση που αποδίδεται στους Πυθαγόρειους:

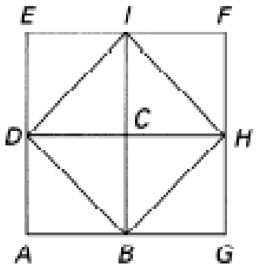
«εάν η ακμή και η διαγώνιος του τετραγώνου είναι συγκρίσιμα μεγέθη με τη παραπάνω έννοια, δηλαδή αν ακμή και διαγώνιος είναι ακέραια πολλαπλάσια κάποιας κοινής μονάδας

τότε θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι οι περιττοί αριθμοί είναι ίσοι με τους άρτιους!»

# Τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άρρητος

Η διαγώνιος BI και η ακμή BD του τετραγώνου DBHI δεν έχουν κοινή μονάδα μέτρησης.

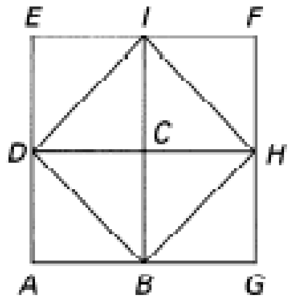
(αντιστοιχίζουμε στη διαγώνιο BI το mc, ενώ στο BD το nc. Παρακολουθούμε αλγεβρικά την απόδειξη.)




**(m,n)=1**

Έστω ότι BI, BD είναι ακέραια πολλαπλάσια μίας κοινής μονάδας c. Παίρνουμε c να είναι η **μεγαλύτερη** κοινή μονάδα σύγκρισης. Άρα τουλάχιστον ένα από τα BI, BD είναι περιττό πολλαπλάσιο αυτής της κοινής μονάδας.

# Απόδειξη



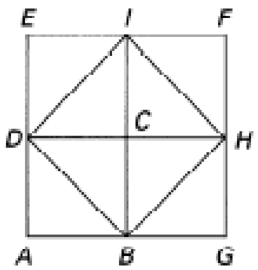

Το εμβαδόν του εξωτερικού τετραγώνου AGFE, δηλαδή AG τετράγωνο, είναι ίσο με δύο φορές το εμβαδόν του DBHI. Εμβαδόν AG τετράγωνο είναι άρτιος. Επομένως η ακμή AG του AGFE είναι και αυτή άρτιος.

$$\Rightarrow 2n^2 = m^2 \Rightarrow 2/m$$

Άρα το εμβαδόν του AGFE είναι πολλαπλάσιο του τέσσερα και επομένως το μισό του, δηλαδή το εμβαδόν του DBHI είναι άρτιος.

$$\Rightarrow 2/n^2$$

# Απόδειξη … συνέχεια




$\Rightarrow 2/n$

**Άτοπο, αφού (m,n)=1**

Αφού DBHI είναι άρτιος και η ακμή του DB είναι άρτιος.

Αυτό είναι άτοπο:

Υποθέσαμε ότι ένα από τα BI , BD είναι περιττό, είδαμε προηγουμένως ότι AG είναι άρτιος, AG=BI και μόλις δείξαμε ότι DB είναι άρτιος!

# Τα παράδοξα του Ζήνωνα ( 490- 430)

----προς υπεράσπιση του Παρμενίδη---οι ιδέες του απείρου και του συνεχούς

- **Διχοτόμηση**

Εάν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι απείρως διαιρετό τότε η κίνηση είναι αδύνατη: για να διανύσει ένας δρομέας ένα ευθύγραμμο τμήμα, πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο του, πριν από αυτό, πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο του μέσου και για να το κάνει αυτό πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο του μέσου του μέσου, κ.ο.κ., επ' άπειρον. Ο δρομέας πρέπει να πλησιάσει μία άπειρη ομάδα σημείων μέσα σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Είναι όμως αδύνατο να εξαντλήσει μία άπειρη συλλογή και κατά συνέπεια η κίνηση είναι αδύνατη.

# Ο Αχιλλέας και η χελώνα

Αν ο Αχιλλέας αφήσει μια χελώνα να ξεκινήσει από ένα σημείο που βρίσκεται πιο μπροστά απ’ αυτόν, τότε ο Αχιλλέας δεν θα φτάσει ποτέ την χελώνα: πρέπει πρώτα να φτάσει το σημείο απ' όπου ξεκίνησε η χελώνα. Μέχρι τότε όμως, η χελώνα θα έχει πάει σε ένα άλλο σημείο, πιο μπροστά. Ο Αχιλλέας τότε θα πρέπει να πάει σ’ αυτό το σημείο, αλλά πάλι η χελώνα θα έχει πάει πιο μπροστά.

Έτσι η χελώνα πάντα θα προπορεύεται.

**Τα παράδοξα της διχοτόμησης και του Αχιλλέα δείχνουν ότι η κίνηση είναι αδύνατη αν δεχθούμε τις άπειρες υποδιαιρέσεις του χώρου και χρόνου.**

# Το Βέλος και το Στάδιο

(έστω ότι δεν υπάρχει άπειρη υποδιαίρεση του χώρου και του χρόνου)

Η περίοδος κατά την διάρκεια της οποίας ένα βέλος κινείται, συνίσταται από έναν αριθμό διαδοχικών χρονικών στιγμών. Σε κάθε μία από αυτές τις στιγμές, το βέλος είναι στη θέση πού είναι, και την επόμενη στιγμή είναι κάπου αλλού.

Πότε κινήθηκε;

Άρα το βέλος δεν μετακινείται και η κίνηση είναι μία οφθαλμαπάτη.

# Μη συγκρισιμότητα --- ¨πρόβλημα¨ με τους άρρητους Παράδοξα του Ζήνωνα

Ο κόσμος των αριθμών (ότι «παράγεται» από τους φυσικούς) είχε την διακριτότητα.

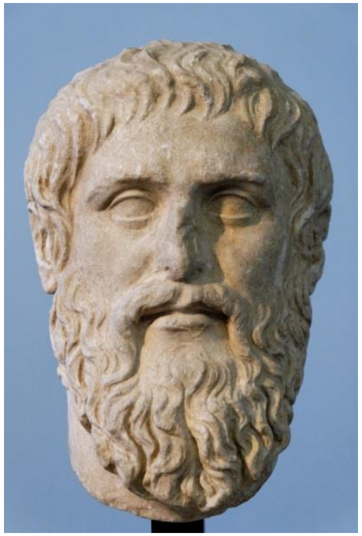
Για τα συνεχή μεγέθη ήταν αναγκαία η μελέτη με άλλες μεθόδους. Έτσι κυριάρχησε η γεωμετρία.

# Πλάτων (427-347) Αθήνα

**"Ουδείς αγεωμέτρητος εισί"**

**Ακαδημία (387 π.Χ. -529 μ.Χ.)**

**Αθήνα**



Εικόνα 3

Έντονες πυθαγόρειες επιδράσεις.

Η Γεωμετρία και τα Μαθηματικά έχουν μια ξεχωριστή θέση.

Στον κόσμο των ιδεών τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν την τέλεια μορφή. Στον κόσμο των αισθήσεων τα αντικείμενα προσπαθούν να μοιάσουν την τέλεια μορφή τους.

Τι είναι λοιπόν απόδειξη?

# «Θεός αεί γεωμετρείν»

*(Απόσμασμα από τον Νόμο 747b , (Πλάτων) )*

**¨Ουδέν ούτω δύναμιν έχει παίδειον μάθημα μεγάλην ως η περί τους αριθμούς διατριβή. Το δε μέγιστον ότι τον νυστάζοντα και αμαθή φύσει εγείρει και ευμαθή και αγχίνουν απεργάζεται.¨**

¨Κανένα μάθημα δεν έχει τόσο μεγάλη παιδευτική δύναμη όσο η ενασχόληση με τους αριθμούς. Το πιο σημαντικό απ΄ όλα είναι ότι τον κοιμισμένο στο μυαλό, τον χωρίς κλίση για μάθηση τον διεγείρει και τον κάνει να μαθαίνει και του αυξάνει την αντιληπτική ικανότητα.¨

# Βιβλιογραφία


- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "Kapitolinischer **Pythagoras**" by Original uploader was Galilea at de.wikipedia - Originally from de.wikipedia; description page is/was here.(Original text : Fotografiert am 30.03.2005). Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras.jpg#mediaviewer/File:Kapitolinischer_Pythagoras.jpg
- **Εικόνα 2:** http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tetractys.svg
- **Εικόνα 3:** "**Plato Silanion Musei Capitolini MC1377**" by English: Copy of Silanion - Marie-Lan Nguyen (User:Jastrow) 2009. Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plato_Silanion_Musei_Capitolini_MC1377.jpg#mediaviewer/File:Plato_Silanion_Musei_Capitolini_MC1377.jpg

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα. Ενότητα 2.2: Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014