Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2.6: Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Τι είναι απόδειξη?
- Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή δίνεται περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρης αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.

Πίσω στο βιβλίο 1 και στα αιτήματα

Είναι το 5^o αίτημα όντως αίτημα και όχι πρόταση ?

Η πρώτη φορά που το αίτημα χρησιμοποιείται στα Στοιχεία είναι στην απόδειξη της Πρότασης 28.

(Η Πρόταση 28 λέει όταν ευθεία τέμνει δύο παράλληλες τότε η εξωτερική και εσωτερική γωνία επί τα αυτά είναι ίσες.)

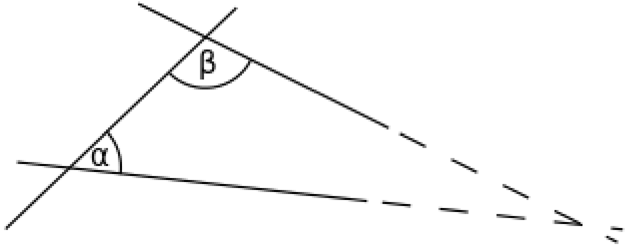
Αιτήματα (Βιβλίο 1)

- α΄. Μπορούμε να ενώσουμε με ευθύγραμμο τμήμα οποιαδήποτε δύο σημεία.
- β΄. Μπορούμε να επεκτείνουμε ευθύγραμμο τμήμα.
- γ΄. Μπορούμε να κατασκευάσουμε κύκλο με δοθέν κέντρο και δοθείσα ακτίνα.
- δ΄. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.
- ε΄. Εάν ευθεία τέμνει άλλες δύο κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι «εσωτερικές» γωνίες να δίνουν άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών τότε οι ευθείες τέμνονται προς αυτή τη κατεύθυνση.

Αίτημα 5

- Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος «εντός και επί τα αυτά» γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που είναι αυτές οι γωνίες.

Τι είναι ευθεία?



Το 5^{ο} αίτημα

- το **5^{ο} αίτημα** είναι ισοδύναμο με τα εξής:

Στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλος, (αξίωμα του Playfair (Πρόκλος)).

Οι γωνίες σε ένα τρίγωνο έχουν άθροισμα δύο ορθές γωνίες.

(και πολλές άλλες προτάσεις που αφορούν παράλληλες ευθείες).

Πρόταση

Από σημείο εκτός ευθείας μπορεί να κατασκευαστεί (μοναδική) παράλληλος προς δοθείσα ευθεία.

Έστω *l* δοθείσα ευθεία, P σημείο εκτός της *l*.
Φέρουμε τη κάθετο προς την *l* από το P, έστω ευθεία *l*΄.
Στη συνέχεια φέρουμε κάθετο προς την *l*΄ που να περνάει από το P. Είναι η ζητούμενη παράλληλος (γιατί) και είναι μοναδική (γιατί).

5ο αίτημα
αίτημα των παραλλήλων

Το πέμπτο αίτημα είναι γνωστό και ως αίτημα των παραλλήλων.

Για να αποδείξει ο Saccheri (1667-1733) το πέμπτο αίτημα εφάρμοσε τη μέθοδο της επαγωγής σε άτοπο.
Δηλαδή προσπάθησε να απορρίψει τις εξής προτάσεις:

- Από σημείο εκτός ευθείας δεν μπορούμε να φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία.
- Από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε περισσότερες από μία ευθεία παράλληλες προς την ευθεία.

Ο Saccheri είδε ότι υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στο δεύτερο και στο πέμπτο αίτημα . (Αν μία ευθεία μπορεί να επεκταθεί επάπειρο, τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δε μπορεί να ξεπερνά τις δύο ορθές.)

Lambert και D’ Alembert

Εικόνα 1

Lambert (1728-1777) (π είναι άρρητος)

1766 (άθροισμα γωνιών τριγώνου και εμβαδού).

Εικόνα 2

D’ Alembert (1717-1783) αποκάλεσε το ζήτημα της αποτυχημένης προσπάθειας. Το σκάνδαλο των μαθηματικών! (1767)

Legendre

Εικόνα 3

Legendre 1752 – 1833 (40 χρόνια σε αυτό το πρόβλημα)

απέδειξε ισοδυναμία με άθροισμα γωνιών σε τρίγωνο 180).

Εικόνα 4

Λάθος εικόνα του Legendre

Καινούρια γεωμετρία

Καινούρια γεωμετρία

Gauss (1810?), 1832 Bolyai, 1829 Lobachevsky

Υπερβολική γεωμετρία:

***Στο επίπεδο**, από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται δύο ευθείες που δεν τέμνουν την αρχική.*

Υπερβολική γεωμετρία

Υπερβολική γεωμετρία:

στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται δύο ευθείες που δεν τέμνουν την αρχική (δηλαδή οι δύο ευθείες είναι «παράλληλες» προς την αρχική)

Ισχύει ότι

το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών και ότι

τα όμοια τρίγωνα είναι ίσα!

Gauss

Εικόνα 5

Gauss (~1810, σημειώσεις που δε θέλησε να δημοσιεύσει, (**1777 - 1855)**)

Lobachevsky

Εικόνα 6

Lobachevsky (1829, στα ρωσικά σε μικρή τοπική πανεπιστημιακή έκδοση (1792-1856))

Ξανά το 1840 πιο αναλυτικά.

Bolyai

Εικόνα 7

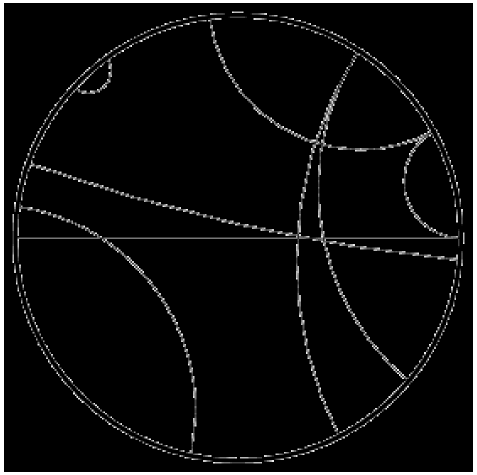
Bolyai (1832 (1802-1860))

Παράρτημα σε βιβλίο του πατέρα του.

Poincare - Υπερβολική Γεωμετρία

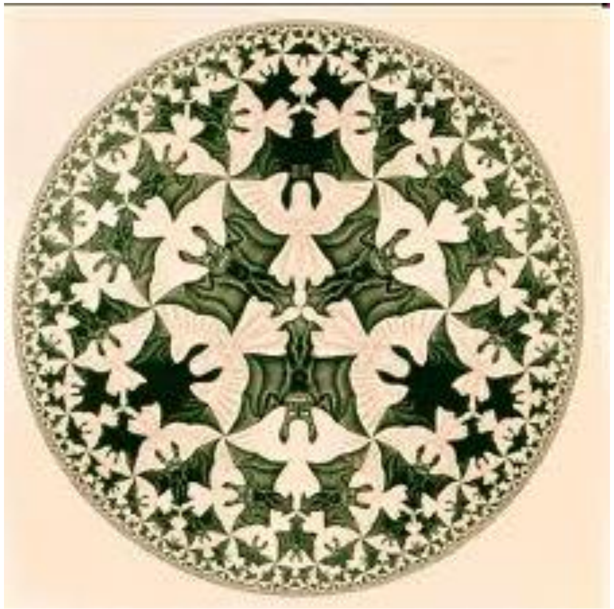
Μοντέλο του Poincare (1854-1892) για την Υπερβολική Γεωμετρία:
Υπερβολικό επίπεδο: σημεία στο εσωτερικό κύκλου.
Ευθείες στο Υπερβολικό επίπεδο: διάμετροι και τόξα άλλων κύκλων που τέμνουν κάθετα τον αρχικό.

Εικόνα 8



Παραπάνω βλέπουμε 2 ευθείες που τέμνονται και είναι «παράλληλες» προς τρίτη.

Escher και το υπερβολικό επίπεδο.



Εικόνα 9

Στο έργο «Παράδεισος και Κόλαση» (1960). Όλοι οι άγγελοι και όλοι οι διάβολοι είναι ίσοι.

http://euler.slu.edu/escher/index.php/Hyperbolic_Geometry

Riemann (1826-1866)

Εικόνα 10

Ελλειπτική γεωμετρία, (1854).

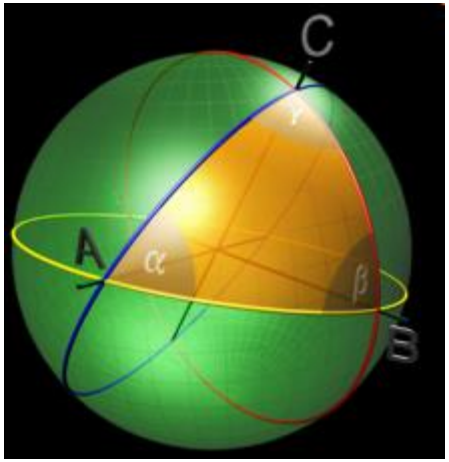
Δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες.

Είναι αναγκαία η τροποποίηση του δεύτερου αιτήματος, (βλ. Saccheri) ως εξής:

Κάθε ευθεία γραμμή έχει το ίδιο πεπερασμένο μήκος.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών.

Felix Klein



Η επιφάνεια μίας σφαίρας:
Τα αντιδιαμετρικά σημεία ταυτίζονται και αντιστοιχούν σε ένα ελλειπτικό σημείο.
Ευθείες είναι οι «μέγιστοι κύκλοι» της σφαίρας (που έχουν ακτίνα όσο η ακτίνα της σφαίρας).

Εικόνα 11

David Hilbert: 1862-1943 Γερμανία (1)

Εικόνα 12

Στη Θεωρία των αναλλοίωτων ο Hilbert το 1888 έδωσε μη κατασκευαστική απόδειξη για την ύπαρκη πεπερασμένου συνόλου γεννητόρων.

Για αυτήν την απόδειξη ο Gordan είπε: «*Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie*». (απορρίπτοντας την πρώτη φορά την εργασία στο Math. Annalen).

David Hilbert: 1862-1943 Γερμανία (2)

Εικόνα 13

Η συλλογή **23 προβλημάτων που παρουσίασε το 1900** στο διεθνές συνέδριο σο Παρίσι (υπόθεση του Riem-mann, Goldbach) σημάδεψε την εξέλιξη των Μαθηματικών. Δούλεψε στο Πανεπιστήμιο του **Göttingen** από το 1895. Επέβλεψε 69 Ph.D., (ανάμεσα σε αυτούς F. Bernstein, H. Weyl, R. Courant, E. Hecke) και επηρέασε πλήθος άλλων όπως E. Zermelo, J.von Neumann, E. Noether.

David Hilbert: 1862-1943 Γερμανία (3)

Εικόνα 14

Συλλογή **23 προβλημάτων το 1900** στο διεθνές συνέδριο στο Παρίσι (υπόθεση του Riemmann, Goldbach)

Πανεπιστήμιο του **Göttingen** από το 1895

69 Ph.D., (Felix Bernstein , Hermann Weyl Richard Courant, Erich Hecke , …)

Επηρέασε:
Ernst Zermelo, John von Neumann, Emmy Noether **….**

Κενά και ελλείψεις στα «Στοιχεία»

Μελετώντας τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη πιο προσεκτικά, βλέπει κανείς ότι υπάρχουν κάποια κενά και ελλείψεις (χρειάζονται και άλλοι ορισμοί και αξιώματα).

Ενδεικτικά:
Πρόταση 1, βιβλίο 1: Για την κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου. Γιατί οι δύο κύκλοι τέμνονται?

Πολλές αποδείξεις βασίζονται στη διαίσθηση ή στο σχήμα. Αυτό έγινε περισσότερο αντιληπτό με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Πλήρης αξιωματοποίηση της Ευκλείδειας γεωμετρίας

Πλήρης αξιωματοποίηση της Ευκλείδειας γεωμετρίας επιχειρήθηκε από τον **Hilbert** το 1899 στο βιβλίο του *Grundlagen der Geometrie* (βάσεις της Γεωμετρίας).

Πρότεινε 21 αξιώματα: αξιώματα σχέσεων, διάταξης, ισότητας, συνέχειας και το αξίωμα των παραλλήλων.

Άφησε τις έννοιες του σημείου, ευθείας, επίπεδο χωρίς να τις ορίσει. Καθόρισε όμως τις μεταξύ τους σχέσεις. Συνολικά χρησιμοποίησε 9 «πρωταρχικές έννοιες» από τις οποίες 6 οι βασικές σχέσεις (όπως ανήκει και ισότητα).

Το 1902 αποδείχτηκε ότι ένα από τα 21 αξιώματα ήταν περιττό.

Πρόγραμμα του Hilbert «μεταμαθηματικά»

1920: πρόγραμμα του Hilbert =«μεταμαθηματικά».
Ήθελε να δείξει ότι

1. Όλα τα μαθηματικά παράγονται από ένα σωστά διαλεγμένο πεπερασμένο σύνολο αξιωμάτων και
2. Ένα τέτοιο σύνολο αξιωμάτων μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι συνεπές

όμως

το 1931 ο Godel με το Θεώρημα της μη πληρότητας απέδειξε ότι είναι αδύνατο να αποδειχθεί η συνέπεια ή ασυνέπεια.

Εικόνα 15

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/4)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "**JHLambert**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:JHLambert.jpg#mediaviewer/File:JHLambert.jpg
- **Εικόνα 2:** "**Alembert**" by Maurice Quentin de La Tour - Didier Descouens 2002. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alembert.jpg#mediaviewer/File:Alembert.jpg
- **Εικόνα 3:** "**Legendre**" by Julien-Léopold Boilly - http://www.numericana.com/answer/record.htm#legendre where it was cropped from here. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Legendre.jpg#mediaviewer/File:Legendre.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/4)

- **Εικόνα 4:** "Louis Legendre" by François Séraphin Delpech - not given. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Louis_Legendre.jpg#mediaviewer/File:Louis_Legendre.jpg
- **Εικόνα 5:** "**Bendixen - Carl Friedrich Gauß, 1828**" by Siegfried Detlev Bendixen - published in "Astronomische Nachrichten" 1828. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bendixen_-_Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg#mediaviewer/File:Bendixen_-_Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg
- **Εικόνα 6:** "**Lobachevsky** 03 crop" by Lev Kriukov (father); cropped by Beyond My Ken(talk)17:10, 27 January 2011 (UTC)- http://cczy.blog.ru/?year=2009&month=11. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lobachevsky_03_crop.jpg#mediaviewer/File:Lobachevsky_03_crop.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/4)

- **Εικόνα 7**: "**JanosBolyai**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:JanosBolyai.jpg#mediaviewer/File:JanosBolyai.jpg
- **Εικόνα 8:** "**Henri Poincare**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:
  Henri_Poincare.jpg#mediaviewer/File:Henri_Poincare.jpg
- **Εικόνα 9:** http://euler.slu.edu/escher/upload/archive/0/06/20080415193200!Circle-limit-IV.jpg
- **Εικόνα 10:** "**Georg Friedrich Bernhard Riemann**" by This file is lacking author information. - http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/scientific-identity/explore.htm according to the German Wikipedia.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/4)

- Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg#mediaviewer/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg
- **Εικόνα 11:** "**Felix Klein**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Felix_Klein.jpeg # mediaviewer/File:Felix_Klein.jpeg
- **Εικόνα 12,13,14:** "**Hilbert**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hilbert.jpg# mediaviewer/File:Hilbert.jpg
- **Εικόνα 15:** "**Kurt gödel**". Via Wikipedia - http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kurt_g%C3%B6del.jpg#mediaviewer/File:Kurt_g%C3%B6del.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης