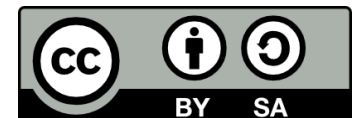




# Ιστορία των Μαθηματικών

## Ενότητα 5: Μαθηματικά στην Αναγέννηση.

**Χαρά Χαραλάμπους**  
Τμήμα Μαθηματικών





# Ιστορία των Μαθηματικών

## Ενότητα 5.5: Ο καιρός των λογαρίθμων

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

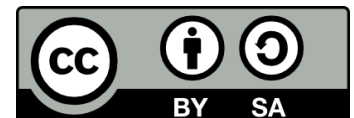


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



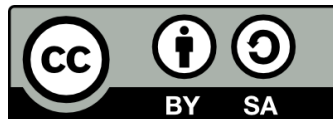
ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Περιεχόμενα Ενότητας



- ∞ Ιταλοί και τριτοβάθμια εξίσωση.
- ∞ Η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.
- ∞ Επίλυση της τεταρτοβάθμιας.
- ∞ Viète, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι νόμοι του σύμπαντος.
- ∞ Ο καιρός των λογαρίθμων.



# Σκοποί Ενότητας



Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η ιστορία και οι συλλογισμοί που οδήγησαν στους τύπους για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Γίνεται μία σύντομη μνεία στους συμβολισμούς του Viete και στη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων για την επίλυση των τριτοβάθμιων. Δίνεται επίσης μία εισαγωγή στην ιστορία των λογαρίθμων.



# Λογάριθμοι (λόγος+ αριθμοί)



Οι πρόδρομοι:

∞ Αρχιμήδης και αρίθμηση με εκθέτες (Ψαμμίτη).

∞ Πίνακες με δυνάμεις του 2.

Κινητήρια δύναμη: υπολογισμοί στην Αστρονομία και Ναυσιπλοία.



# Stifel



0	1	16 * 32
1	2	αντίστοιχοι εκθέτες
2	4	4, 5
3	8	άθροισμα εκθετών 9, αντίστοιχη δύναμη 512.
4	16	Ο Stifel (1544) συνέκρινε τις δύο σειρές
5	32	(στήλες): το άθροισμα όρων στην αριθμητική
6	64	σειρά αντιστοιχεί σε γινόμενο όρων της
7	128	γεωμετρικής σειράς.
8	256	Ένας τέτοιος πίνακας με δυνάμεις του 2 δε
9	512	μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για
		πολλαπλασιασμούς αφού οι δυνάμεις του 2
		έχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους.





# Αστρονομία



**Αστρονομία:** το 1593 Δανοί μαθηματικοί πρότειναν να χρησιμοποιούνται τριγωνομετρικοί τύποι για να γίνονται οι υπολογισμοί ευκολότερα. Πράγματι οι πολλαπλασιασμοί ανάγονται σε αθροίσεις και αφαιρέσεις (με χρήση εκτεταμένων πινάκων για ημίτονα και συνημίτονα.)

π.χ. Ο τύπος  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$

θα χρησιμοποιηθεί για το γινόμενο

$$0.17365 * 0.99027$$

Από τους πίνακες:

$$0.17365 = \sin(10), 0.99027 = \cos(8)$$

$$\sin(18) = 0.3092, \sin(2) = 0.03490$$

άρα

$$0.17365 * 0.99027 = \frac{1}{2} (0.3092 + 0.03490) = 0.17196$$

(το παράδειγμα είναι με χρήση τωρινών ορισμών για  $\sin$ ,  $\cos$  αφού τότε  $\sin$  ήταν το μισό της αντίστοιχης χορδής κύκλου με ακτίνα 10,000,000)



# Θέμα παρουσίασης



Θέμα παρουσίασης: Ιστορία της τριγωνομετρίας και της αστρονομίας.



# Πίνακας με δυνάμεις του 2



0	1	$16*32$ Αντίστοιχοι εκθέτες 4,5 Άθροισμα εκθετών 9 Αντίστοιχη δύναμη 512
1	2	
2	4	
3	8	
4	16	
5	32	
6	64	
7	128	
8	256	
9	512	

Ένας τέτοιος πίνακας με δυνάμεις του 2 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για πολλαπλασιασμούς αφού οι δυνάμεις του 2 έχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους.



# John Napier (1550–1617) Σκωτία



Εικόνα 1

Ξεκίνησε τη μελέτη το 1594.

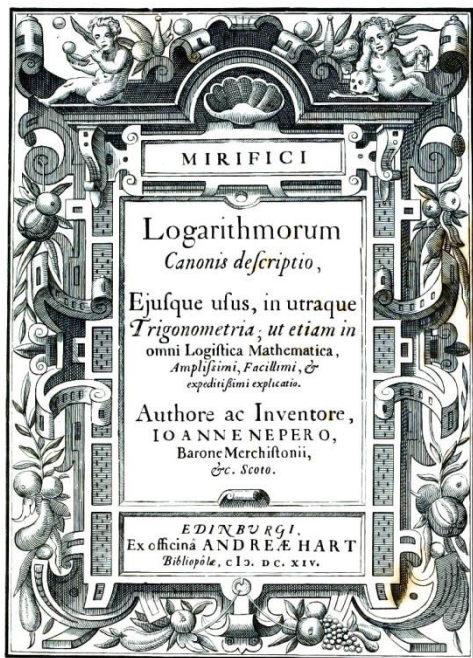
Δημοσίευσε το 1614 το  
Mirafici logarithmorum  
canonis descriptio

και το 1619

Mirafici logarithmorum  
canonis constructio



# *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614).



57 σελίδες εξήγηση

Και

90 σελίδες με πίνακες.

Εικόνα 2



# Ο λογάριθμος Napier



Αν

$$N = 10^7 (1 - 10^{-7})^L$$

τότε  $L$  είναι ο λογάριθμος Napier του  $N$ .

Για ευκολία τον γράφουμε  $Nap \log N$ .

Έτσι

$$Nap \log 10,000,000 = 0$$

ενώ

$$Nap \log 9,999,999 = 1.$$



# Το πρώτο βιβλίο του Napier



Αν  $a : b = c : d$  τότε

$$\text{Nap log } a - \text{Nap log } b = \text{Nap log } c - \text{Nap log } d.$$

Το πρώτο βιβλίο του Napier εκδόθηκε μετά από 20 χρόνια υπολογισμών: έδωσε τον πίνακα των λογαρίθμων για τους αριθμούς από το 5-10 εκατομμύρια.

Σε αντίθεση με τη γεωμετρική σειρά

$$1, 2, 4, 8, \dots$$

Ο Napier ήθελε τα κενά ανάμεσα στους διαδοχικούς όρους της γεωμετρικής σειράς

$$c, cr, cr^2, cr^3, \dots$$

να είναι μικρά.



# Ο πρώτος πίνακας του Napier (1)



Έτσι ξεκίνησε με το λόγο

$$0,9999999 = 1 - 10^{-7}$$

Ο πρώτος πίνακας του Napier αποτελείται από τους πρώτους 101 όρους της γεωμετρικής σειράς με πρώτο όρο

$$c = 10,000,000 = 10^7$$

Δηλαδή υπολόγισε τους αριθμούς

$$10^7 (1 - 10^{-7})^n, n = 0, 1, \dots, 100$$

Ονόμασε τους αριθμούς  $0, 1, \dots, 100$  **logarithms**.





# Ο πρώτος πίνακας του Napier (2)



Υπολόγισε τον  $i$ -στο όρο του πρώτου πίνακα  $a_i$  με αφαίρεση:

$$a_i = a_{i-1} - a_{i-1}/10^7.$$

Έτσι βρήκε

10000000	9999999	9999998.0000001
...	99999900.0004950	

Αν

$$x = 10^7(1 - 10^{-7})^n, y = 10^7(1 - 10^{-7})^m$$

Τότε

$$\frac{x}{y} = (1 - 10^{-7})^{n-m}$$



# Ο δεύτερος πίνακας του Napier



Στο δεύτερο πίνακα ο Napier υπολόγισε πάλι με τον ίδιο τρόπο (αφαίρεση) τους πρώτους 51 όρους της γεωμετρικής σειράς με λόγο  $1 - 10^{-5}$  και πρώτο όρο  $10^7$ .

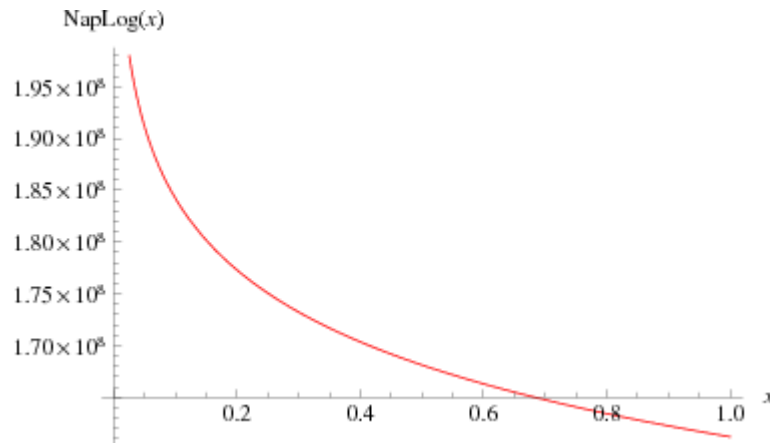
Για τον τρίτο πίνακα χρησιμοποίησε γραμμική παρεμβολή χρησιμοποιώντας τις τιμές των δύο παραπάνω πινάκων. Ο τρίτος πίνακας αποτελείται από 21 σειρές και 69 στήλες όπου το στοιχείο στη θέση  $i, j$  είναι

$$10^7 \left(1 - \frac{1}{2000}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{j-1}$$

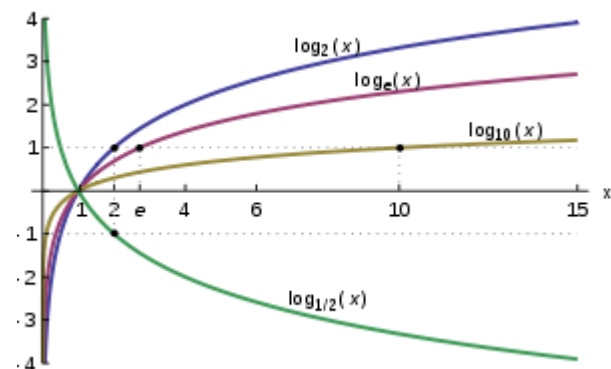
Η κάθε σειρά είναι γεωμετρική με λόγο  $1 - \frac{1}{100}$  όπως και κάθε στήλη με λόγο  $1 - \frac{1}{200}$ .



# Briggs



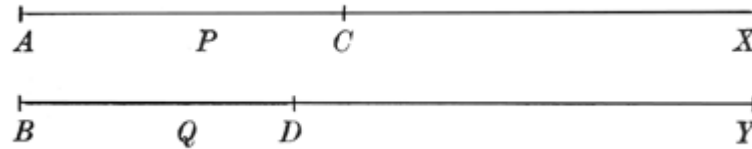
Σήμερα



Ο Briggs (1561-1630, Άγγλος) μετά από συνεννόηση με τον Napier κατασκεύασε πίνακες με βάση 10 έτσι ώστε  $\log 1=0$ .



# Ο επίσημος ορισμός του Napier (1)



Έστω ευθύγραμμο τμήμα BY (μήκος  $r = 10,000,000 = 10^7$ )

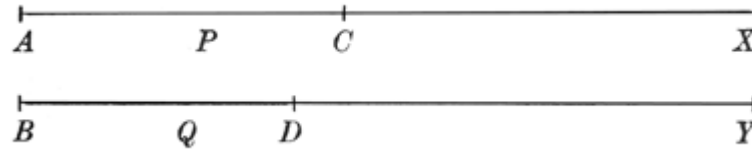
Έστω ημιευθεία AX. Τα P και Q ξεκινούν ταυτόχρονα από το A και B. Η ταχύτητα του P παραμένει σταθερή, και ίση με  $10^7$ .

Η ταχύτητα του Q όμως ελαττώνεται ανάλογα με την απόσταση του Q από την άλλη άκρη Y. Έστω ότι σε κάποιο χρόνο το P φτάνει στο C ενώ το Q φτάνει στο D. Τότε ο λογάριθμος του DY είναι το AC. Με άλλα λόγια

$$AC = \text{Naplog } DY$$



# Ο επίσημος ορισμός του Napier (2)



Έστω ότι πέρασε χρόνος  $t$  για να φτάσει  $P$  στο  $C$ .

Έτσι  $y = AC = 10^7 t$ .

Αντίστοιχα έστω  $x = DY$ . (Σύγχρονα) θα γράφαμε ότι η ταχύτητα του  $Q$ , δηλ.  $dx/dt$  ικανοποιεί την ισότητα  $dx/dt = -x$  ενώ η αρχική της τιμή είναι  $10^7$

$Nap \log x = y$ :

Όταν  $t$  είναι πολύ μικρό,  $10^{-7}$  τότε  $y = 1$  ενώ  $x = 9,999,999$ .

$$N = 10^7 (1 - 10^{-7})^L$$



# Jobst Burgi (1552-1632) Ελβετός



Εικόνα 3

Η δουλειά του όμως δημοσιεύτηκε το 1620.

Έδωσε πίνακες με 23,027 στοιχεία, με λόγο  $1+10^{-4}$ .



# St. Vincent



✧ Εκτός από τους αριθμητικούς υπολογισμούς, οι λογάριθμοι επηρέασαν την εξέλιξη των μαθηματικών όταν το 1647 ο Βέλγος μοναχός St. Vincent (1622-1667) βρήκε ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στους λογαρίθμους και το εμβαδόν κάτω από τη καμπύλη  $xy = 1$ .



Εικόνα 4



# Βιβλιογραφία



- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.





# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- ☞ **Εικόνα 1: John Napier"** by Unknown - This scan from [1]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:John\\_Napier.jpg#mediaviewer/File:John\\_Napier.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:John_Napier.jpg#mediaviewer/File:John_Napier.jpg)
- ☞ **Εικόνα 2: "Logarithms book Napier"** by Unknown - Napier, Mark (1834) , William Blackwood. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Logarithms\\_book\\_Napier.jpg#mediaviewer/File:Logarithms\\_book\\_Napier.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Logarithms_book_Napier.jpg#mediaviewer/File:Logarithms_book_Napier.jpg)



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)



- ☞ **Εικόνα 3: "Jost Bürgi Porträt"** by User Dvoigt on de.wikipedia - This file is lacking source information. Please edit this file's description and provide a source.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jost B%C3%BCrgi Portr%C3%A4t.jpg#mediaviewer/File:Jost B%C3%BCrgi Portr%C3%A4t.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jost_B%C3%BCrgi_Portr%C3%A4t.jpg#mediaviewer/File:Jost_B%C3%BCrgi_Portr%C3%A4t.jpg)
- ☞ **Εικόνα 4: "Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)"** by Grentidez - Alfred Hamy: Galerie illustrée de la Compagnie de Jésus, 1893.. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gr%C3%A9goire de Saint-Vincent \(1584-1667\).jpg#/media/File:Gr%C3%A9goire de Saint-Vincent \(1584-1667\).jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gr%C3%A9goire_de_Saint-Vincent_(1584-1667).jpg#/media/File:Gr%C3%A9goire_de_Saint-Vincent_(1584-1667).jpg)



# Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά  
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 5: Μαθηματικά  
στην Αναγέννηση. Ενότητα 5.5: Ο καιρός των λογαρίθμων». Έκδοση: 1.0.  
Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

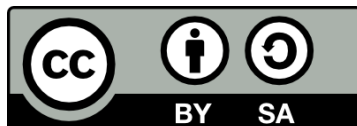
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



# Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου  
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

