ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6.4: Newton. Το θεώρημα του δυωνύμου.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

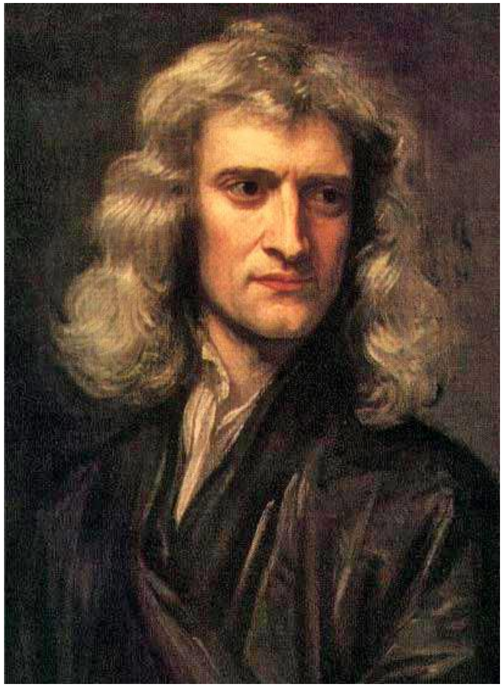
Περιεχόμενα Ενότητας

- Γεωμετρία.
- Μέθοδοι παραγώγισης.
- Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- Newton, Το θεώρημα του δυωνύμου.
- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- Leibniz και το σκάνδαλο του Λογισμού.

Σκοποί Ενότητας

- Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγώγισης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.

Newton (1642-1727) Άγγλος



Εικόνα 1

Newton (1)

Plato is my friend — Aristotle is my friend — but my greatest friend is truth.

(ημερολόγιο στα Λατινικά, με τίτλο *Quaestiones Quaedam Philosophicae* , 1664)

If I have seen further it is only by standing on the shoulders of giants.

(γράμμα στον Hooke to 1676)

Newton (2)

Κολλέγιο 1661 (Μαθηματικά διαβάσματα 1661-1664)

- «Στοιχεία» Ευκλείδη
- «Geometria a Renato Des Cartes» Schooten
- «Οπτική» Kepler
- έργα του Viete
- «Arithmetica infinitorum» Wallis
- διαλέξεις του Barrow
- έργο των Galilei, Fermat, Huygens

Νεανικά χρόνια

1665

Συναρτήσεις ως δυναμοσειρές.

Ρυθμός μεταβολής μεγεθών ως προς τον χρόνο: fluxion.

1665-1666

Θεώρημα του διωνύμου (περιγραφή σε γράμμα 1676, δημοσίευση από Wallis το1685).

Απειροστικός λογισμός.

Νόμος της βαρύτητας.

Φύση των χρωμάτων.

Θεώρημα του διωνύμου (1)

Θεώρημα του διωνύμου
(ανακάλυψη: 1665, περιγραφή σε δύο γράμματα το 1676, δημοσίευση από τον Wallis το 1685)

Έστω $r \in \mathbb{Q}$.

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}$$

Θεώρημα του διωνύμου (2)

Θεώρημα του Δυωνύμου ήταν γνωστό όταν n είναι θετικός ακέραιος.

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

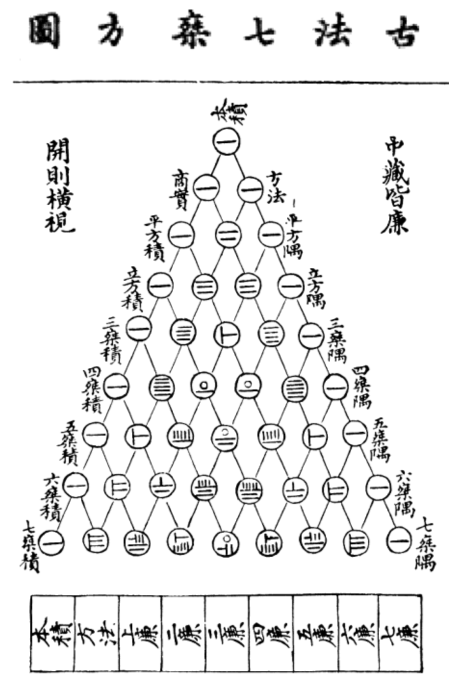
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Τρίγωνο του Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Εικόνα 2

Τρίγωνο του Zhu Shijie



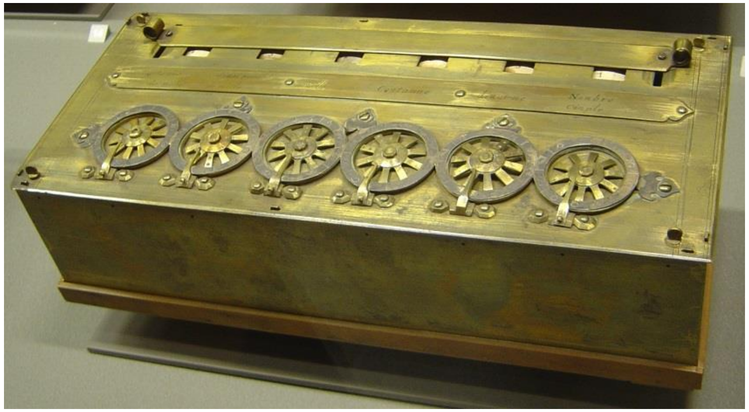
Εικόνα 3

Τρίγωνο του Zhu Shijie, βάθος 8, 1303.

Blaise Pascal (1623-1662)

Εικόνα 4

Blaise Pascal



Εικόνα 5

υπολογιστική μηχανή του Pascal(1642)

Η γενική περίπτωση

Έστω $r \in \mathbb{Q}$

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k$$

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

Όταν r είναι θετικός ακέραιος, τότε το άθροισμα είναι πεπερασμένο.
Διαφορετικά το άθροισμα είναι άπειρο.

Πότε συγκλίνει αυτή η σειρά?

Παράδειγμα για n= - 1

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}$$

- $\binom{-1}{0} = 1$
- $\binom{-1}{1} = (-1)$
- $\binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1$
- $\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1$
- $\binom{-1}{4} = 1$

$$\frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

Παράδειγμα για n=1/2

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1/2(1/2-1)\dots(1/2-k+1)}{k!}$$

- $\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$
- $\binom{1/2}{2} = \frac{1/2(1/2-1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}{2} = \frac{-1}{8}$
- $\binom{1/2}{3} = \binom{1/2}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3} = \frac{-1}{8}\frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3} = \frac{-1}{8}\frac{(-3/2)}{3} = \frac{1}{16}$

Παράδειγμα για n=1/2 συνέχεια

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1/2(1/2-1)\dots(1/2-k+1)}{k!}$$

$$(1-x^2)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-x^2)^k =$$

$$= \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}(-x^2) + \binom{1/2}{2}(-x^2)^2 + \binom{1/2}{3}(-x^2)^3 + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$$

Θεώρημα του διωνύμου (3)

Θεώρημα του διωνύμου

(ανακάλυψη: 1665, περιγραφή σε δύο γράμματα το 1676, δημοσίευση από τον Wallis το 1685)

Έστω $r \in \mathbb{Q}$.

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}$$

Ερωτήματα

Άπειρη σειρά: Σύγκλιση?

Γιατί το Δυωνυμικό Θεώρημα θεωρείται τόσο σημαντικό?

Πως ήρθε στον Νεύτωνα η έμπνευση?

Έδωσε ο Νεύτωνας πλήρη απόδειξη του Θεωρήματος?

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis) (1)

Ο Wallis ενδιαφερόταν να βρεί τρόπο για να υπολογίσει τα εμβαδά κάτω από καμπύλες της μορφής $(1-t^2)^n$ από το 0 έως δοθέντα α, ιδιαίτερα αφού

$$\int_0^1 (1-t^2)^{1/2} dt = \frac{\pi}{4}$$

Μπορούσε να το κάνει για ακέραιες τιμές του n, αλλά όχι για κλασματικές. Η έμπνευση του Newton ήταν αρχικά να υπολογίσει για διάφορες τιμές του n το αντίστοιχο εμβαδόν από το 0 μέχρι κάποιον άγνωστο x.

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis) (2)

Ας μελετήσουμε τον πίνακα που τα στοιχεία του στην i-στη γραμμή και j-στήλη είναι ο συντελεστής του

$$(-1)^{i-1}\,\frac{x^{2i-1}}{2i-1}$$

όπως εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα

$$\int_0^x (1-t^2)^j dt$$

Ξεκινάμε μετρώντας με τη στήλη 0.

Ο συντελεστής του x είναι 1.

0	1	2	3	4	$\cdots$		
1	1	1	1	1	$\cdots$	|	x
0	1	2	3	4	$\cdots$	|	$-\frac{x^3}{3}$
0	0	1	3	6	$\cdots$	|	$\frac{x^5}{5}$
0	0	0	1	4	$\cdots$	|	$-\frac{x^7}{7}$
0	0	0	0	1	$\cdots$	|	$\frac{x^9}{9}$

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis) (3)

Ο συντελεστής του $-x^3/3$ όταν $j = n$ είναι n.
Για την τρίτη γραμμή, δηλαδή για τον συντελεστή του $x^5/5$ οι συντελεστές είναι 0 1 3 6 …
Ο Newton κατάλαβε ότι οι 1 3 6 10 … είναι τριγωνικοί αριθμοί (δηλ. οι αριθμοί οι οποίοι προκύπτουν από πεπερασμένα αθροίσματα $1 + 2 + \cdots + j$ και υπέθεσε ότι στο ολοκλήρωμα του $\int_0^x (1-t^2)^n dt$ ο συντελεστής του $x^5/5$ είναι $\frac{n(n-1)}{2}$).
Δείτε ότι οι συντελεστές του $x, -x^3/3, x^5/5$, στη στήλη j, προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε j στα εξής πολυώνυμα $1, n, 1/2(n^2-n)$: Οι βαθμοί των πολυωνύμων είναι αντίστοιχα 0,1 και 2.

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)- (4)

Για την 4η γραμμή (δηλαδή στη γραμμή των συντελεστών του $-x^7/7$ και που αρχίζει με 3 μηδενικά) ο Newton υπέθεσε ότι τα στοιχεία καθορίζονται από ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού που έχει ρίζες στο 0,1,2. Το πολυώνυμο θα έχει τη μορφή

$$cn(n-1)(n-2), c\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha.$$

Αφού η τιμή στην τρίτη στήλη είναι 1, με $n = 3$ προκύπτει

$$1 = c3(3-1)(3-2) = 6c \Longrightarrow c = \frac{1}{6}$$

Έτσι ο Newton υπέθεσε ότι ο συντελεστής του $-x^7/7$ στο $\int_0^x (1-t^2)^n dt$ είναι

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \binom{n}{3}$$

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)- (5)

Συνέχισε και για κάθε n και για κάθε θετικό ακέραιο k υπέθεσε ότι στον τετραγωνισμό $\int_0^x (1-t^2)^n dt$ εμφανίζεται ο όρος

$$(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

με συντελεστή $\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Γενίκευσε τα παραπάνω και για την περίπτωση που ο n δεν είναι ακέραιος. Δηλαδή υπέθεσε ότι για κάθε δύναμη n ισχύει

$$\int_0^x (1-t^2)^n dt = x - \binom{n}{1}\frac{x^3}{3} - \binom{n}{2}\frac{x^5}{5} - \binom{n}{3}\frac{x^7}{7} - \cdots$$

όπου $\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)- (6)

Ειδικότερα συμπέρανε ότι για $n = 1/2$

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2} dt = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{8}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{16}\frac{x^7}{7} - \cdots.$$

Στη συνέχεια παρατήρησε ότι αν κάποιος ξεκινήσει με την σειρά $1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{16}t^6 - \cdots$

Τετραγωνίσει (ολοκληρώσει) κάθε όρο και αθροίσει, καταλήγει στη σειρά που βρήκε ξεκινώντας από το ολοκλήρωμα $\int_0^x (1-t^2)^{1/2} dt$.

Συμπέρανε ότι $(1-t^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{16}t^6 - \cdots$.

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)- (7)

Για να βεβαιωθεί ο Newton πολλαπλασίασε

$$\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots\right)$$

και βρήκε ότι όντως

$$1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-\frac{1}{8}+\frac{11}{22}-\frac{1}{8}\right)x^4+\cdots$$
$$=1-x^2+0+\cdots=1-x^2$$

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)- (8)

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$$

Αποτελούν τα παραπάνω **απόδειξη** ότι η σειρά που δόθηκε για τη συνάρτηση

$$(1-x^2)^{1/2}$$

είναι σωστή?

Δυωνυμικό Θεώρημα

Έστω $r \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{Z}^+$

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k$$

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}$$

Παρατηρείστε τη σχέση ανάμεσα στις σειρές και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων!

Εφαρμογή του Δυωνυμικού Θεωρήματος (Newton)

Προσέγγιση ριζών

$$7 = 9\frac{7}{9} = 9\left(1 - \frac{2}{9}\right)$$

$$\sqrt{7} = 3\sqrt{1 - \frac{2}{9}} = 3\left(1 - \frac{2}{9}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{7} \approx 3\left(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{162} - \frac{1}{1458} - \frac{5}{52488} - \frac{7}{472392}\right)$$
$$\approx 2.64576$$

Απειροσειρές (και άπειρο)

- Απειροσειρές (και άπειρο)
- συνέβαλλαν στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού.
- υπακούνε τους ίδιους γενικούς κανόνες όπως τα πεπερασμένα αθροίσματα.
- θεωρούνται εναλλακτικές μορφές των συναρτήσεων.

De analysi per aequationes numero terminorum infinitas

(Newton: 1669, δημοσιεύθηκε το 1711)

Περιεχόμενα

- Απειροσειρές.
- Πρώτη περιγραφή του απειροστικού λογισμού.

Οι βασικές ιδέες του λογισμού του Newton έχουν να κάνουν με κίνηση.

Θεωρεί ότι οι ποσότητες-μεταβλητές μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο. Το fluxion μίας μεταβλητής x είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του x και συμβολίζεται με p.

Σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα o, το x μεταβάλλεται κατά op.

Αντίστοιχα αν το fluxion του y είναι q τότε το y μεταβάλλεται κατά oq.

Η κλίση της καμπύλης $f(x, y) = 0$, (δηλ. η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης) είναι ίση με $oq/op = q/p$.

Newton

Εικόνα 6

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**GodfreyKneller-IsaacNewton-1689**" by Sir Godfrey Kneller - http://www.newton.cam.ac.uk/art/portrait.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg#mediaviewer/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Pascal triangle**" by Kazukiokumura (talk) - Created by Kazukiokumura (talk).. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0-2.5-2.0-1.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pascal_triangle.svg#mediaviewer/File:Pascal_triangle.svg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)

- **Εικόνα 3**: "**Yanghui triangle**" by Yáng Huī (楊輝), ca. 1238–1298) - [1]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yanghui_triangle.gif#mediaviewer/File:Yanghui_triangle.gif
- **Εικόνα 4**: "Blaise pascal". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blaise_pascal.jpg#mediaviewer/File:Blaise_pascal.jpg
- **Εικόνα 5**: "Arts et Metiers Pascaline dsc03869" by Blaise Pascal. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arts_et_Metiers_Pascaline_dsc03869.jpg#mediaviewer/File:Arts_et_Metiers_Pascaline_dsc03869.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)

- **Εικόνα 6**: **Newton** 25" by James Thornhill - Transferred from en.wikipedia to Commons by User:Shizhao using CommonsHelper.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton_25.jpg#mediaviewer/File:Newton_25.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης