ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Ιστορία των Μαθηματικών

## **Ενότητα 6**: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού.


**Χαρά Χαραλάμπους**
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Ιστορία των Μαθηματικών

**Ενότητα 6.5**: Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού.

**Χαρά Χαραλάμπους**
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα Ενότητας

- Σκέφτομαι άρα υπάρχω…Αναλυτική Γεωμετρία.
- Μέθοδοι παραγώγισης.
- Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- Newton και το θεώρημα του δυωνύμου.
- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- Leibniz, Το σκάνδαλο του Λογισμού: Newton και Leibniz.

# Σκοποί Ενότητας

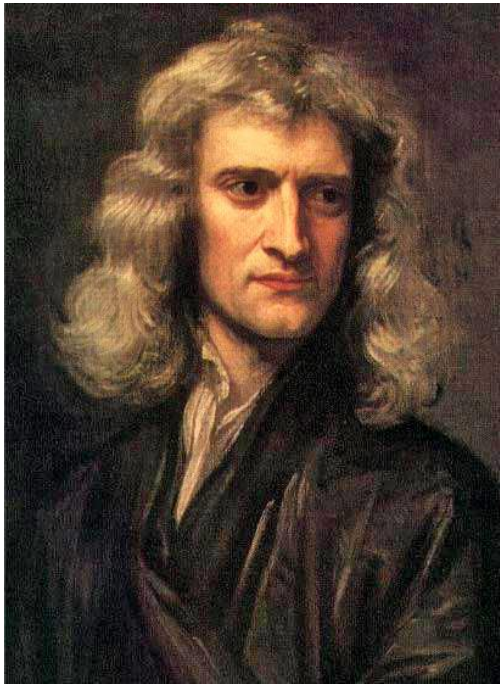
- Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγώγισης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.

# Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού (1)

1. Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Τότε $F'(x) = f(x)$.

2. Αν $g'(x) = f(x)$ τότε $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

# Newton (1642-1727) Άγγλος



Εικόνα 1

# Newton

Εικόνα 2

# De analysi per aequationes numero terminorum infinitas

(Newton: 1669, δημοσιεύθηκε το 1711)

**Περιεχόμενα**

- Απειροσειρές.
- Πρώτη περιγραφή του απειροστικού λογισμού.

Οι βασικές ιδέες του λογισμού του Newton έχουν να κάνουν με κίνηση.
Θεωρεί ότι οι ποσότητες-μεταβλητές μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο. Το fluxion μίας μεταβλητής $x$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του $x$ και συμβολίζεται με $p$.
Σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα $o$, το $x$ μεταβάλλεται κατά $op$.
Αντίστοιχα αν το fluxion του $y$ είναι $q$ τότε το $y$ μεταβάλλεται κατά $oq$.
Η κλίση της καμπύλης $f(x,y)=0$, (δηλ. η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης) είναι ίση με $oq/op=q/p$.

# Παράδειγμα

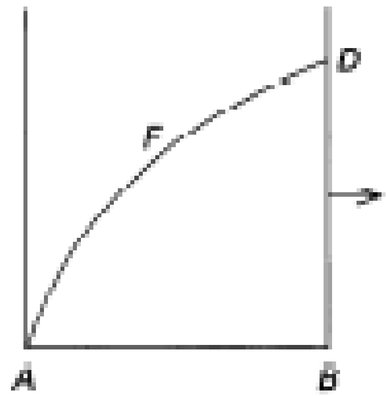
- Κλίση της καμπύλης $y^3 = x^2$.

$$(y+oq)^3 = (x+op)^2 \Rightarrow$$
$$y^3 + 3y^2(oq) + 3y(oq)^2 + (oq)^3 = x^2 + 2x(op) + (op)^2 \Rightarrow$$
$$y^3 + 3y^2oq + 3yo^2q^2 + o^3q^3 = x^2 + 2xop + o^2p^2 \Rightarrow$$
$$3y^2oq + 3yo^2q^2 + o^3q^3 = 2xop + o^2p^2 \Rightarrow$$
$$3y^2q + 3yoq^2 + o^2q^3 = 2xp + op^2 \Rightarrow$$
$$3y^2q = 2xp \Rightarrow \qquad \leftarrow$$

Ιδέα του ορίου όταν ο χρόνος ο τείνει στο μηδέν.

$$\frac{q}{p} = \frac{2x}{3y^2} = \frac{2x}{3(x^{2/3})^2} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

# Newton και τετραγωνισμοί:
## θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού




Ο Newton θεωρούσε ότι η καμπύλη AFD παράγεται από τις κινήσεις των x και y.
Έτσι το εμβαδόν AFDB παράγεται από την κίνηση της κάθετης DB.
Επομένως το fluxion του AFDB (δηλ. ο  στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του AFDB) είναι ίσος με το DB επί το fluxion του x.

# Tractatus de methodis serierum et fluxionum

“θα παραστήσουμε τα fluxions με μία τελεία πάνω από το γράμμα. Έτσι αν z είναι το ζητούμενο εμβαδόν  τότε $\dot{z}$ είναι το fluxion z ενώ $\dot{x}$ είναι το fluxion του x. Ισχύει λοιπόν ότι

$$\dot{z} = y\dot{x} \Rightarrow \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = y$$

(Μετάφραση: αν $A(x)$ είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ από το $x = 0$ έως το $x$ τότε $dA/dx = f(x)$)”

**Αδημοσίευτη μελέτη**: Tractatus de methodis serierum et fluxionum (1671)

# Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού (2)

1. Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Τότε $F'(x) = f(x)$.

2. Αν $g'(x) = f(x)$ τότε $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

# Πίνακες με ολοκληρώματα

- Ο Newton έδωσε πίνακες με ολοκληρώματα:

Για παράδειγμα οι πίνακες περιείχαν τα παρακάτω ολοκληρώματα των $y$:

$$y = \frac{ax^{n-1}}{(b+cx^n)^2} \qquad z = \frac{(a/nb)x^n}{b+cx^n}$$

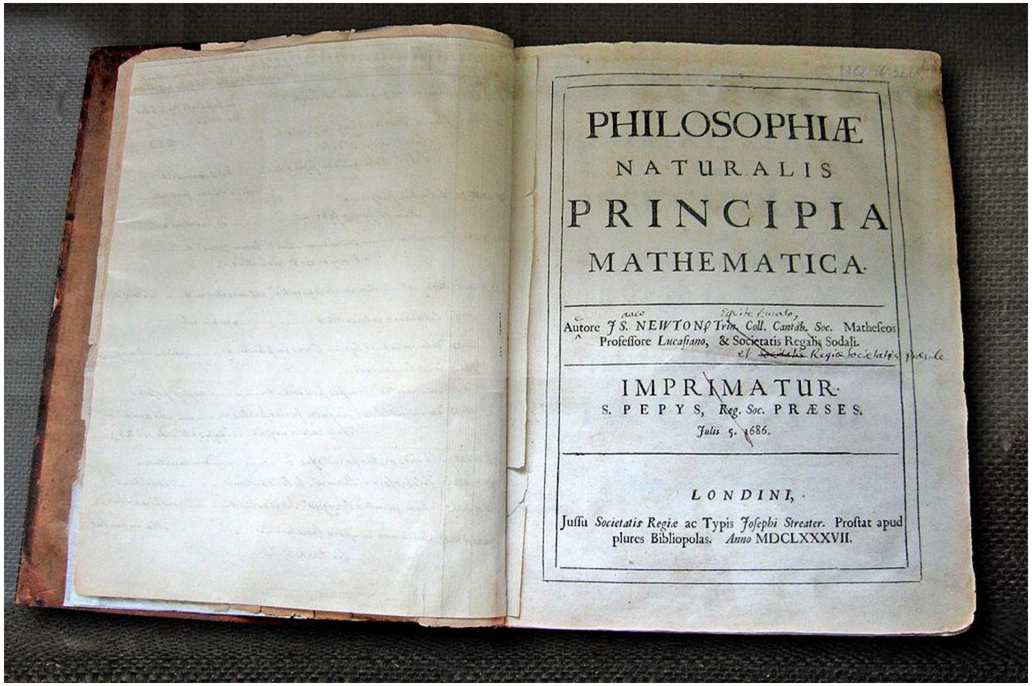
$$y = ax^{n-1}\sqrt{b+cx^n} \qquad z = \frac{2a}{3nc}(b+cx^n)^{3/2}$$

$$y = ax^{2n-1}\sqrt{b+cx^n} \qquad z = \frac{2a}{nc}\left(-\frac{2}{15}\frac{b}{c}+\frac{1}{5}x^n\right)(b+cx^n)^{3/2}$$

$$y = \frac{ax^{2n-1}}{\sqrt{b+cx^n}} \qquad z = \frac{2a}{nc}\left(-\frac{2}{3}\frac{b}{c}+\frac{1}{3}x^n\right)\sqrt{b+cx^n}$$

Επίσης περιέγραψε διάφορες τεχνικές για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

# Newton’s Principia



Εικόνα 3

**1687** Η Principia παρουσιάζει τις βάσεις της φυσικής και της αστρονομίας στη γλώσσα της γεωμετρίας.

# Principia (1)

Αν και το βιβλίο Principia δεν είναι κατά κυριότητα ένα βιβλίο για μαθηματικά, (περισσότερο ένα βιβλίο εφαρμογής μαθηματικών), σε αυτό συναντάμε:

- Ορισμό ορίου μίας συνάρτησης (προσπάθεια).
- Αναφορές σε δυναμοσειρές.
- Αλγόριθμους απειροστικού λογισμού (παράγωγο γινομένου συναρτήσεων, δύναμης και αντιστρόφου, κλπ).
- Θεωρήματα για κωνικές τομές (γεωμετρία).

Η πρώτη δημοσιευμένη εργασία του Newton για τον λογισμό όπου περιγράφει αναλυτικά το θεμελιώδες θεώρημα ήταν στη De Quadratura Curvarum, (1704), παράρτημα στο Opticks.

# Principia (2)

Η Principia περιλαμβάνει τους νόμους κίνησης και την μαθηματική απόδειξη του **Νόμου της Βαρύτητας**: *δύο σώματα έλκουν το ένα το άλλο με δύναμη που εξαρτάται από το αντίστροφο του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης*

καθώς και πολλά άλλα…(Νευτώνεια άποψη για το σύμπαν…)

Enumeratio linearum tertii ordinis (1704) (δεύτερο μαθηματικό παράρτημα στο Opticks)

(…μέθοδο του Newton για την εύρεση προσεγγιστικά μίας λύσης εξισώσεων)

# Διαμάχη για την πατρότητα του λογισμού

Εικόνα 4

Σημαντική η διαμάχη για την πατρότητα του λογισμού (από το 1695 και για πολλά χρόνια αργότερα) που περιλάμβανε κατηγορίες εναντίον του Leibniz για λογοκλοπή.
(Θλιβερό αποτέλεσμα): αποξένωση των Βρετανών μαθηματικών από τους Ευρωπαίους μαθηματικούς κατά τη διάρκεια του 18$^{ου}$ αιώνα.

# Leibniz

Εικόνα 5

# Βιβλιογραφία


- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**GodfreyKneller-IsaacNewton-1689**" by Sir Godfrey Kneller - http://www.newton.cam.ac.uk/art/portrait.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg#mediaviewer/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Newton** 25" by James Thornhill - Transferred from en.wikipedia to Commons by User:Shizhao using CommonsHelper.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton_25.jpg#mediaviewer/File:Newton_25.jpg

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 3**: "**NewtonsPrincipia**". Licensed under CC BY-SA 2.0 via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NewtonsPrincipia.jpg#/media/File:NewtonsPrincipia.jpg
- **Εικόνα 4:** "**Newton** 25" by James Thornhill - Transferred from en.wikipedia to Commons by User:Shizhao using CommonsHelper.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton_25.jpg#mediaviewer/File:Newton_25.jpg
- **Εικόνα 5**: "**Gottfried Wilhelm von Leibniz**" by Christoph Bernhard Francke - /gbrown/philosophers/leibniz/BritannicaPages/Leibniz/LeibnizGif.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg#mediaviewer/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 6.5: Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης