Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

cc BY SA

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6.6: Leibniz και το σκάνδαλο του Λογισμού.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

cc BY SA

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

CC BY SA

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Σκέφτομαι άρα υπάρχω…Αναλυτική Γεωμετρία
- Μέθοδοι παραγώγισης.
- Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- Newton και το θεώρημα του δυωνύμου.
- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- Leibniz, Το σκάνδαλο του Λογισμού: Newton και Leibniz.

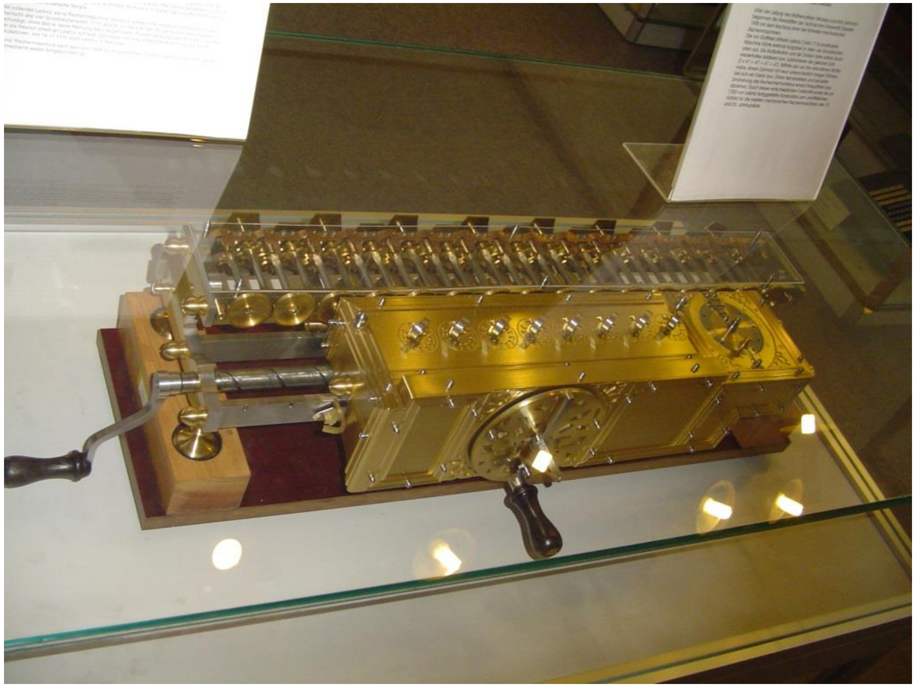
Σκοποί Ενότητας

- Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγώγισης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.

Leibniz (1646-1716)

Εικόνα 1

Υπολογιστική μηχανή του Leibniz (1673)



Εικόνα 2

Βασικός στόχος του Leibniz ήταν η δημιουργία ενός συστήματος συμβολισμών και ορολογίας που θα κωδικοποιούσε και θα απλοποιούσε τα βασικά στοιχεία της λογικής σκέψης.

Παρίσι (1672)

Ο Huygens του ζήτησε να υπολογίσει το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{2} + \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots$$

Εικόνα 3
Huygens
(1629-1695)

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

← Οι όροι αυτής της σειράς είναι οι αντίστροφοι των τριγωνικών αριθμών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = 2$$

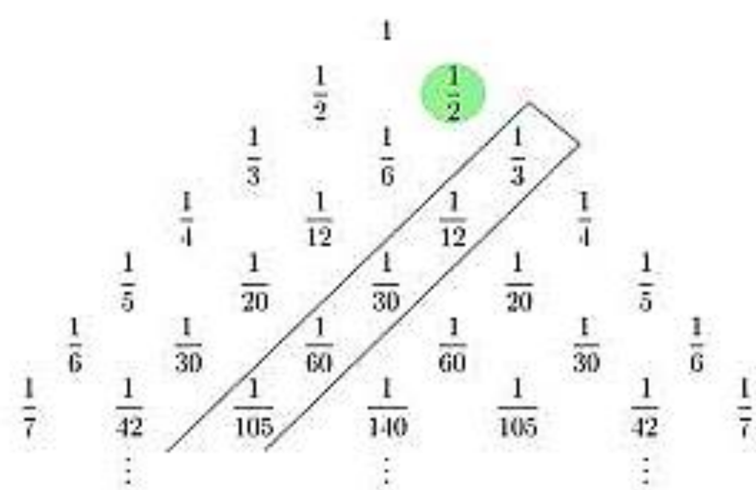
← Λύση του Leibniz

Τρίγωνο του Pascal και Το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz.

Τρίγωνο του Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz.
Πως συνδέονται τα δύο τρίγωνα?



Σημασία ενός καλού συμβολισμού (Leibniz)

Τύπος για την παράγωγο της σύνθεσης συναρτήσεων:

$$h(x) = f\big(g(x)\big) \text{ τότε } h'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Με τον συμβολισμό των διαφορικών του Leibniz ο κανόνας προκύπτει με φυσικό τρόπο. Έστω $u = g(x)$ και $y = f(x)$.

Τότε ο παραπάνω τύπος αντιστοιχεί στη σχέση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

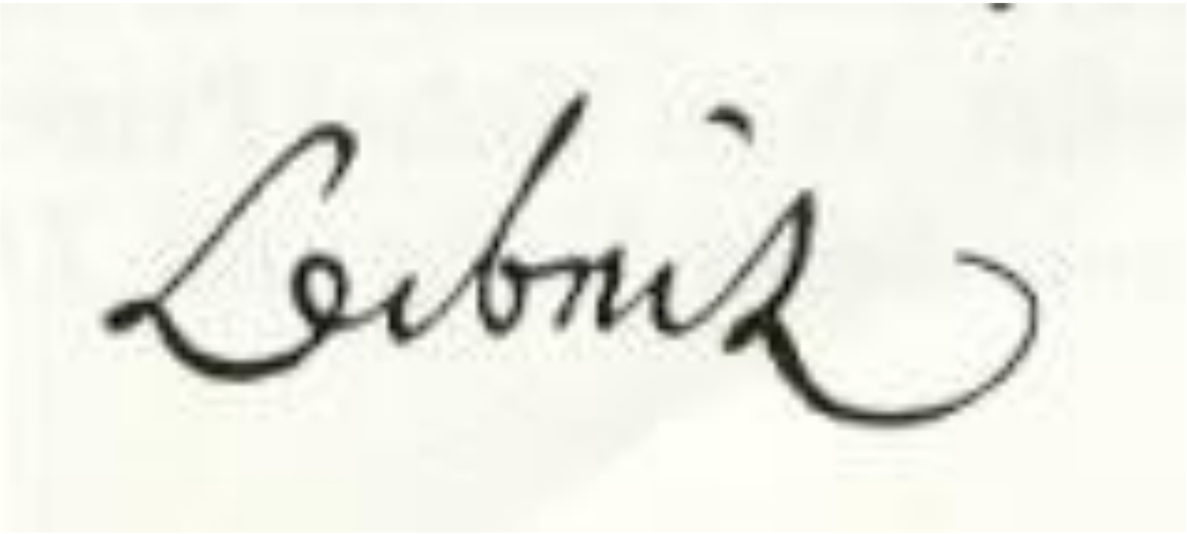
Ο τύπος τώρα είναι αναμενόμενος.

Επίσης γραμμένος έτσι ενέχει υπόδειξη για την απόδειξή του.

Leibniz

- Ο Leibniz στις εργασίες του δίνει τύπους για τα διαφορικά γινομένων, δυνάμεων, ριζών και γεωμετρικές εφαρμογές.
- Τονίζει την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στην παραγώγιση και την ολοκλήρωση στο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού.
- Η αληθοφάνεια της μεθόδου του Leibniz και η αποτελεσματικότητα του διαφορικού συμβολισμού έκαναν πιο εύκολα αποδεκτά τα διαφορικά του Leibniz από τα fluxions του Newton.

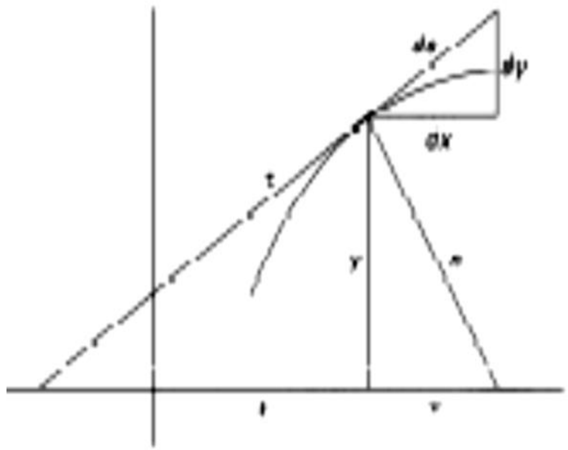
Υπογραφή Leibniz



Εικόνα 4

Ο Διαφορικός Λογισμός του Leibniz Acta Eruditorum (1684)

Διαφορικό τρίγωνο του Leibniz



Όμοια τρίγωνα:

$$y dy = v dx$$

$$\int y dy = \int v dx$$

Παρατήρηση: το εμβαδό $\int y dy$ είναι γνωστό (ως προς y).

Εάν θέλουμε λοιπόν να βρούμε το εμβαδό $\int v dx$ θα πρέπει να βρούμε μία καμπύλη $y = f(x)$ έτσι ώστε $v = y dy/dx$:

Δηλαδή για να λυθεί ένα πρόβλημα τετραγωνισμού, θα πρέπει να λύσουμε ένα πρόβλημα παραγώγισης!

Παράδειγμα (1/2)

Θα υπολογίσουμε το εμβαδό

$$\int_0^a x^n dx$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Leibniz.

Θέλουμε να βρούμε την καμπύλη $y = f(x)$ (αν υπάρχει) που περνά από την αρχή των αξόνων έτσι ώστε $\nu = x^n$. Παρατηρείτε ότι το ν προκύπτει από τη σχέση

$$\nu = y\frac{dy}{dx}$$

και ότι

Παράδειγμα (2/2)

$$\int_0^a v dx = \int_0^a x^n dx = \int y dy = \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^a = \frac{1}{2} f(a)^2$$

Έστω $y = f(x) = bx^k$ για κάποια σταθερά b και κάποια δύναμη k.

Τότε $\nu = y \frac{dy}{dx} = bx^k \left(bkx^{k-1}\right) = b^2 k x^{2k-1}$.

Αφού ν $= x^n$ έπεται ότι $2k - 1 = n, b^2 k = 1$και

$$k = \frac{1}{2}(n+1), b = \left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^{-1/2}.$$

Άρα $\int_0^a x^n dx = \frac{1}{2}\left(ba^k\right)^2 = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

Σύγκριση

Σύγκριση των δύο Λογισμών:

- του Newton
- του Leibniz

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Gottfried Wilhelm von Leibniz**" by Christoph Bernhard Francke - /gbrown/philosophers/leibniz/BritannicaPages/ Leibniz/LeibnizGif.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg#mediaviewer/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Leibnitzrechenmaschine**" by User:Kolossos - recorded by me in de:Technische Sammlungen der Stadt Dresden (with photo permission). Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leibnitzrechenmaschine.jpg#mediaviewer/File:Leibnitzrechenmaschine.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 3:** "**Christiaan Huygens**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christiaan_Huygens.jpg#mediaviewer/File:Christiaan_Huygens.jpg
- **Εικόνα 4**: "**Leibnitz signature**" by Gottfried Wilhelm Leibniz - http://www.deewhybooks.com.au/directory/signatures.cfm.

  Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons –

  http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leibnitz_signature.jpg#/media/File:Leibnitz_signature.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 6.6: Leibniz και το σκάνδαλο του Λογισμού». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

CC BY SA