



Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 7: Κλασική Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

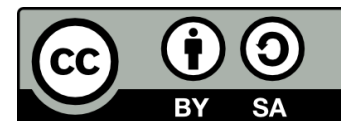


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 7.1: Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα Ενότητας



- ∞ Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.
- ∞ Πέντε βασικά ερωτήματα και η Συμβολική Άλγεβρα.



Σκοποί Ενότητας



∞ Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει την ιστορική σημασία του Θεμελιώδους Θεωρήματος τις Άλγεβρας και να παρουσιάσει την εισαγωγή της Συμβολικής Άλγεβρας.



Ερωτήματα (1)



Ποια είναι η πρόοδος στην Άλγεβρα την εποχή αυτή?

Η Άλγεβρα μέχρι τώρα ασχολείται με εύρεση ριζών για πολυωνυμικές εξισώσεις.



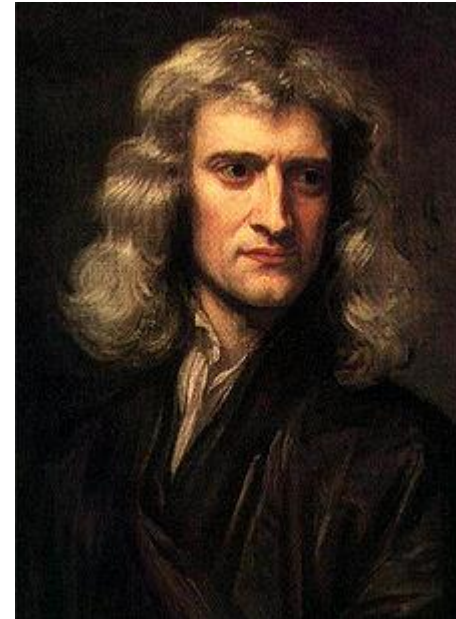
Άλγεβρα (1)



Francois Viète
Εικόνα 1



René Descartes
Εικόνα 2



Isaac Newton
Εικόνα 3



Leibniz
Εικόνα 4



Άλγεβρα (2)



Jean le Rond d'Alembert
Εικόνα 5



Euler
Εικόνα 6



George Peacock
Εικόνα 7



Carl Friedrich Gauss
Εικόνα 8



Ανάπτυξη της θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων

Χάρης στο έργο των Viète (16^{ος} αιώνας) και Descartes (17^{ος} αιώνας) ξεκινά η ανάπτυξη της θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων.

1. Έχει κάθε πολυώνυμο ρίζα?
2. Πόσες ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού n ?
3. Μπορούμε να καθορίσουμε πότε οι ρίζες είναι ρητές, πραγματικές, θετικές, κλπ?
4. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου και στους συντελεστές του?
5. Πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου?



Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας



1. Έχει κάθε πολυώνυμο ρίζα?

Απάντηση: Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές έχει μία μιγαδική ρίζα.



Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού 1 με μιγαδικούς συντελεστές.



Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού 1 ή 2 με πραγματικούς συντελεστές.



Ερωτήματα (2)



Πως προκύπτουν οι παραπάνω συνεπαγωγές? (από πότε γνώριζαν οι Μαθηματικοί ότι τα παραπάνω είναι ισοδύναμα?)

Γιατί το Θεώρημα αυτό λέγεται Θ.Θ. Άλγεβρας? Είναι τόσο σημαντικό? Πάνω σε αυτό στηρίχτηκε η Άλγεβρα? (Σύγκριση με το Θ.Θ. Λογισμού.)



Αποδείξεις του ΘΘΑ



Αποδείξεις του ΘΘΑ

∞ 1746 D'Alembert

ελλειπίς

∞ 1746 Euler

∞ 1799 Gauss (3 άλλες αποδείξεις, τελευταία το 1849)

Σε κάθε απόδειξη χρησιμοποιείται το ακόλουθο αποτέλεσμα από την ανάλυση: κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μία πραγματική ρίζα.



Αποδείξεις του ΘΘΑ συνέχεια



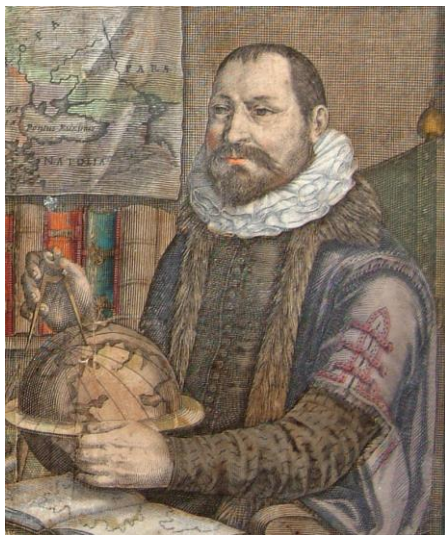
∞ Η απόδειξη του ΘΘΑ είναι απόδειξη ύπαρξης : δεν κατασκευάζεται η ρίζα αλλά αποδεικνύεται η ύπαρξή της. Αυτό τον 19^ο αιώνα ήταν πρωτόγνωρο και τέτοιου είδους αποδείξεις ακόμα και τον 20^ο αιώνα ήταν αμφισβητήσιμες.



Girard



☞ Ο Girard (1595-1632) στο βιβλίο του *L'invention en algèbre* το 1629 ισχυρίστηκε ότι πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού n έχουν n ρίζες. (Όμως δεν έγραψε ξεκάθαρα ότι οι ρίζες αυτές είναι μιγαδικές).



Εικόνα 9



Δύο ζητήματα



∞ Δύο ζητήματα:

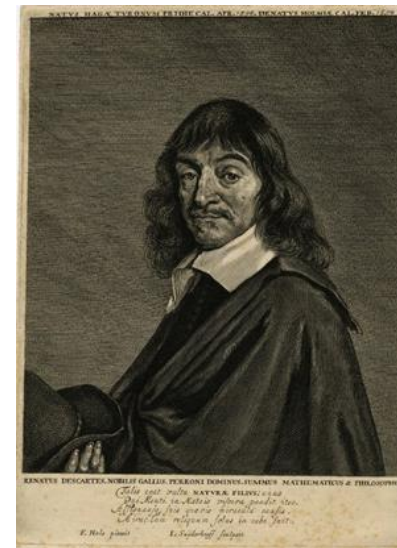
- Έχει κάθε πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές (κάπου) μία ρίζα?
- Είναι οι ρίζες της εξίσωσης (αν υπάρχουν) μιγαδικοί αριθμοί?



Descartes



Descartes: (1596-1650) το 1637 στο βιβλίο του *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* παρατήρησε ότι: «κάθε εξίσωση μπορεί να έχει τόσες ρίζες όσος είναι ο αριθμός των διαστάσεων της άγνωστης ποσότητας στην εξίσωση.»



Εικόνα 10



Leibniz

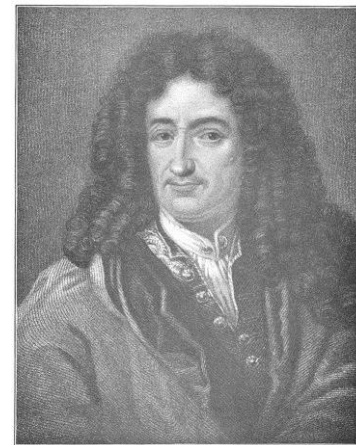


Ο Leibniz το 1702 ισχυρίστηκε ότι το πολυώνυμο $x^4 + a^4$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο γραμμικών ή δευτεροβάθμιων όρων, (άρα το ΘΘΑ δεν ισχύει).

Γιατί όμως έκανε αυτό το λάθος ο Leibniz?

Ποια είναι αυτά τα πολυώνυμα? Δοκιμάστε να βρείτε τα πολυώνυμα όταν

$$a = i$$



Εικόνα 11



Newton



Newton:

αν $a + bi$ ρίζα του $p(x)$ τότε
 $a - bi$ ρίζα του $p(x)$.



Εικόνα 12



Euler (1707-1783)



Ο Euler (1707-1783) σε αλληλογραφία με τους Bernoulli και Goldbach το 1742 έδειξε ότι το αντιπαράδειγμα του Leibniz ήταν λάθος.



Εικόνα 13



D' Alembert (1717-1783)



D' Alembert (1717-1783) έκανε το 1746 τη πρώτη (σοβαρή) απόπειρα να αποδείξει του ΘΘΑ. Η απόδειξη αυτή είχε κενά—για παράδειγμα χρησιμοποίησε ένα θεώρημα σε σειρές που αποδείχτηκε το 1850 (Puisseux).



Εικόνα 14



Αποδείξεις



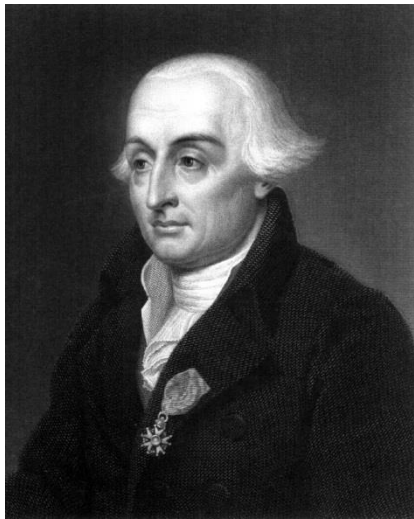
- Euler επιχείρησε μία άλλη απόδειξη το 1749. (Μπορούσε να αποδείξει ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό n μικρότερο ή ίσο του 6 είχε ακριβώς n μιγαδικές ρίζες. Στη γενική περίπτωση έδωσε σκίτσο απόδειξης.
- Το 1772 ο Lagrange έδειξε μία ατέλεια της απόδειξης του Euler: ότι θα μπορούσε να οδηγήσει σε κλάσμα της μορφής μηδέν/μηδέν. Διόρθωσε αυτό το σημείο.
- Το 1795 ο Laplace έδωσε μία διαφορετική απόδειξη χρησιμοποιώντας τη διακρίνουσα του πολυωνύμου.



Το πραγματικό πρόβλημα των αποδείξεων



Υποθέτουν ότι το πολυώνυμο έχει ρίζες (κάποιας μορφής)
και στη συνέχεια αποδεικνύουν ότι είναι μιγαδικοί αριθμοί.



Lagrange (1736-1813)
Εικόνα 15



Laplace (1749-1827)
Εικόνα 16



Gauss



Ο πρώτος που παρατήρησε το βασικό πρόβλημα των προηγούμενων αποδείξεων ήταν ο Gauss (1777-1855) στη διδακτορική του διατριβή το 1799. Εκεί παρουσίασε και την πρώτη του απόδειξη που χρησιμοποιεί τοπολογικές ιδέες. Έχει και αυτή σοβαρές ελλείψεις. Άλλες δύο αποδείξεις, το 1816 (σωστή), 1849 (για τις πολ. εξισώσεις με μιγαδικούς συντελεστές).



Εικόνα 17



Argand



Ο Argand (1768-1822) το 1814 δημοσίευσε μία απόδειξη του ΘΘΑ στην εργασία του *Réflexions sur la nouvelle théorie d'analyse*. Η απόδειξη του Argand βασιζόταν στην ιδέα του d'Alembert.

Το 1820 ο Cauchy αφιερώνει ένα ολόκληρο κεφάλαιο από το *Cours d'analyse* για την απόδειξη του Argand χωρίς να αναφέρει τον Argand.

Τελικά ο Argand αναγνωρίστηκε όταν τον ανέφερε ο Chrystal στο βιβλίο του *Algebra* το 1886.



Cauchy (1789-1857)



Cauchy (1789-1857)

Εικόνα 18



Μιγαδικό επίπεδο και Argand



Ο Argand (1768-1822) το 1814 δημοσίευσε μία απόδειξη του ΘΘΑ στην εργασία του *Réflexions sur la nouvelle théorie d'analyse*. Η απόδειξη του Argand βασιζόταν στην ιδέα του d' Alembert.

Μιγαδικό επίπεδο και Argand (1813).



Οι μιγαδικοί αριθμοί



Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι το απλούστερο σύστημα που περιέχει τους πραγματικούς και μπορεί να κατασκευαστεί από αυτούς με πολύ απλό τρόπο:

$$C = R + Ri \text{ όπου } ii = -1.$$

(δηλαδή το i είναι αλγεβρικό πάνω από το R)

Υπάρχουν άλλα τέτοια συστήματα? (Ο Gauss φαίνεται να το πίστευε: αποκαλούσε τα άλλα τέτοια συστήματα “σκιά της σκιάς”).



Kneser (1898-1973)



Η πρώτη κατασκευαστική απόδειξη βασισμένη στην απόδειξη (ύπαρξης) του Argand δόθηκε το 1940 από τον Kneser (1898-1973) (μαθητής του Hilbert).



Εικόνα 19



Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/8)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- ∞ **Εικόνα 1: "Francois Viete"**. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Francois_Viete.jpg#/media/File:Francois_Viete.jpg
- ∞ **Εικόνα 2: "Frans Hals - Portret van René Descartes"** by After Frans Hals (1582/1583–1666) - André Hatala [e.a.] (1997) De eeuw van Rembrandt, Bruxelles: Crédit communal de Belgique, ISBN 2-908388-32-4.. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals - Portret van Ren%C3%A9 Descartes.jpg#/media/File:Frans Hals - Portret van Ren%C3%A9 Descartes.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg#/media/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg)



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/8)



- ☞ **Εικόνα 3:** "GodfreyKneller-IsaacNewton-1689" by Sir Godfrey Kneller - <http://www.newton.cam.ac.uk/art/portrait.html>. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg#/media/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg>
- ☞ **Εικόνα 4:** "**Gottfried Wilhelm von Leibniz**" by Christoph Bernhard Francke - </gbrown/philosophers/leibniz/BritannicaPages/Leibniz/LeibnizGif.html>. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg#/media/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/8)



- ☞ **Εικόνα 5: "Jean d'Alembert"** by Maurice Quentin de La Tour - [1]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jean_d%27Alembert.jpeg#mediaviewer/File:Jean_d%27Alembert.jpeg
- ☞ **Εικόνα 6: "Leonhard Euler 2"** by Jakob Emanuel Handmann - 2011-12-22 (upload, according to EXIF data). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard Euler 2.jpg#/media/File:Leonhard Euler 2.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_2.jpg#/media/File:Leonhard_Euler_2.jpg)
- ☞ **Εικόνα 7: "George Peacock"** by en.wikipedia (see there the description page). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_Peacock.jpg#/media/File:George_Peacock.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/8)



- ☞ **Εικόνα 8:** "Carl Friedrich Gauss" by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) - Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann).. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#/media/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg
- ☞ **Εικόνα 9:** "Jodocus Hondius" von Colette Hondius-v d Keere. - Swaen.com; first published in the French edition of the Atlas in 1619.. Lizenziert unter Public domain über Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jodocus_Hondius.jpg#mediaviewer/File:Jodocus_Hondius.jpg
- ☞ **Εικόνα 10:** "Jonas Suyderhoef after Frans Hals - engraving of René Descartes" by Jonas Suyderhoef - Image : British Museum Portrait of René Descartes; Info : Grimm 1989-90, Illustration nr. 50. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/8)



[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jonas Suyderhoef after Frans Hals - engraving of René Descartes.jpg#mediaviewer/File:Jonas](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jonas_Suyderhoef_after_Frans_Hals_-_engraving_of_Ren%C3%A9_Descartes.jpg#mediaviewer/File:Jonas_Suyderhoef_after_Frans_Hals_-_engraving_of_Ren%C3%A9_Descartes.jpg)

[Suyderhoef after Frans Hals - engraving of René Descartes.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jonas_Suyderhoef_after_Frans_Hals_-_engraving_of_Ren%C3%A9_Descartes.jpg)

☞ **Εικόνα 11: "Wag gottfried wilhelm leibnitz"** by William Anthony Granville, Ph.D., LL.D. - Elements of the Differential and Integral Calculus (revised), The Athenæum Press, Ginn and Company, Boston, U.S.A., 1911..

Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wag_gottfried_wilhelm_leibnitz.jpg#mediaviewer/File:Wag_gottfried_wilhelm_leibnitz.jpg

☞ **Εικόνα 12: "Isaac Newton, English School, 1715-20"** by attributed to 'English School' - Bonhams. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Isaac Newton, English School, 1715-20.jpg#mediaviewer/File:Isaac Newton, English School, 1715-20.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Isaac_Newton,_English_School,_1715-20.jpg#mediaviewer/File:Isaac_Newton,_English_School,_1715-20.jpg)



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (6/8)



- ☞ **Εικόνα 13:** "**Leonhard Euler**" by Jakob Emanuel Handmann - The portrait is in the Kunstmuseum Basel. This image is a digitized version of that painting. The source (scanner) of the digitized image is unknown. The image was transferred from en.wiki (en:Image:Leonhard Euler.jpg) under the {{PD-old}} license tag. Wars 16:56, 25 June 2006 (UTC). Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler.jpg#mediaviewer/File:Leonhard_Euler.jpg
- ☞ **Εικόνα 14:** Εικόνα 5
- ☞ **Εικόνα 15:** "**Joseph Louis Lagrange**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joseph_Louis_Lagrange.jpg#mediaviewer/File:Joseph_Louis_Lagrange.jpg



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (7/8)



- ☞ **Εικόνα 16:** "**Pierre-Simon-Laplace (1749-1827)**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Pierre-Simon-Laplace_\(1749-1827\).jpg#mediaviewer/File: Pierre-Simon-Laplace_\(1749-1827\).jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Pierre-Simon-Laplace_(1749-1827).jpg#mediaviewer/File: Pierre-Simon-Laplace_(1749-1827).jpg)
- ☞ **Εικόνα 17:** "Bendixen - **Carl Friedrich Gauß, 1828**" by Siegfried Detlev Bendixen - published in "Astronomische Nachrichten" 1828. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Bendixen__Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg#mediaviewer/File: Bendixen__Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg
- ☞ **Εικόνα 18:** "**Augustin-Louis Cauchy 1901**" by Public domain - Library of Congress Prints and Photographs Division. From an illustration in: Das neunzehnte Jahrhundert in Bildnissen / Karl Werckmeister, ed. Berlin :



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (8/8)



Kunstverlag der photographische gesellschaft, 1901, vol. V, no. 581.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg#mediaviewer/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg

☞ **Εικόνα 19: "Hellmuth-Kneser"** by Konrad Jacobs -

<http://owpodb.mfo.de/detail?photoID=2180>. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 2.0-de via Wikimedia Commons -

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hellmuth-Kneser.jpg#mediaviewer/File:Hellmuth-Kneser.jpg>



Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 7: Κλασσική
Άλγεβρα. Ενότητα 7.1: Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας».
Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

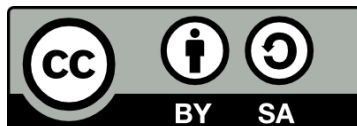
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

