



Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 7: Κλασική Άλγεβρα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

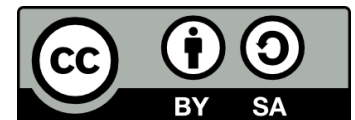




Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 7.2: Πέντε βασικά ερωτήματα και η Συμβολική Άλγεβρα.

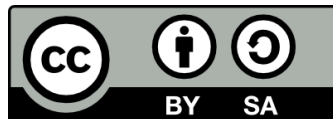
Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών



Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα Ενότητας



- ☞ Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.
- ☞ Πέντε βασικά ερωτήματα και η Συμβολική Άλγεβρα.




Σκοποί Ενότητας



∞ Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει την ιστορική σημασία του Θεμελιώδους Θεωρήματος τις Άλγεβρας και να παρουσιάσει την εισαγωγή της Συμβολικής Άλγεβρας.



5 ερωτήματα για πολυωνυμικές (πραγματικές) εξισώσεις.



1. Έχει κάθε πολυώνυμο ρίζα? ΝΑΙ στο \mathbb{C} σύμφωνα με ΘΘΑ.
2. Πόσες ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού n ?
3. Μπορούμε να καθορίσουμε πότε οι ρίζες είναι ρητές, πραγματικές, θετικές, κλπ?
4. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου και στους συντελεστές του?
5. Πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου?



2^ο ερώτημα



2. Πόσες ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού n ?

Ο Descartes έδειξε ότι αν a είναι ρίζα του $p(x)$ τότε

$$p(x) = (x - a)q(x)$$

όπου βαθμός $q(x)$ είναι βαθμός $p(x)$ μείον 1.

Επαναλαμβάνοντας (και θεωρώντας ότι το ΘΘΑ ισχύει) προκύπτει ότι αν ο βαθμός του $p(x)$ είναι $n > 0$ τότε

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$



3^ο ερώτημα



3. Μπορούμε να καθορίσουμε πότε οι ρίζες είναι ρητές, πραγματικές, θετικές, κλπ?

Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μία πραγματική ρίζα. Παρόλο αποδεκτό τον 17 και 18 αιώνα αποδείχτηκε τον 19^ο αιώνα ως συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής από τον Λογισμό:

(Κάθε συνεχής συνάρτηση που είναι θετική για κάποιες τιμές και αρνητική για κάποιες άλλες πρέπει να διασχίζει τον άξονα των x και να έχει μία ρίζα.)



Descartes



- Descartes: κριτήριο για το ποιό ρητοί a/b μπορούν να είναι ρίζες ενός πολυωνύμου.
- Descartes: (χωρίς απόδειξη) άνω όριο για τον αριθμό των θετικών ριζών ενός πολυωνύμου.
Όριο: μετράμε τον αριθμό των αλλαγών των προσήμων των συντελεστών από + σε - και από - σε + (ο αριθμός είναι ίσος με το όριο, ή μειωμένο κατά πολλαπλάσια του δύο).
- Descartes: (χωρίς απόδειξη) άνω όριο για τον αριθμό των αρνητικών ριζών ενός πολυωνύμου.
Όριο: ο αριθμός των θετικών ριζών του $f(-x)$.



4^ο ερώτημα



Ερώτημα 4: Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου και στους συντελεστές του? πως προκύπτουν οι συντελεστές από τις ρίζες?

Σχέση ανάμεσα στις ρίζες ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου και στους συντελεστές του πολυωνύμου: γνωστή.

Αντίστοιχη σχέση για τις ρίζες και τους συντελεστές πολυωνύμων βαθμού έως και 5 από τον Viète.

Ο Newton εισήγαγε την έννοια των **συμμετρικών συναρτήσεων** που εκφράζουν αυτές τις σχέσεις ανάμεσα στις ρίζες και τους συντελεστές για πολυώνυμα βαθμού n . (Ρόλος συμμετρικών συναρτήσεων στην επίλυση με ριζικά και Θεωρία Galois).



5^ο ερώτημα



5. Πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου?

Το επιθυμητό είναι να δοθεί η λύση με ριζικά όπως για πολυώνυμα βαθμού 2,3,4.

Προσπάθεια: εύρεση τέτοιας λύσης (ακριβής λύση) για πολυώνυμα βαθμού μεγαλύτερου του 4.

Παράλληλα: όταν δεν υπάρχει ακριβής λύση γίνεται ανάπτυξη μεθόδων για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων π.χ. Newton (17^{ος} αιώνας), Horner (19^{ος} αιώνας).



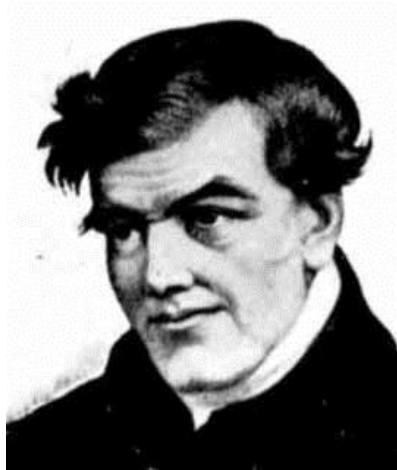
Συστήματα αριθμών



- ☞ Μελέτη των λύσεων οδηγεί στην μελέτη των ιδιοτήτων διάφορων συστημάτων αριθμών (π.χ. σύστημα των φυσικών αριθμών, των ρητών, των μιγαδικών, κλπ).
- ☞ Newton: αρνητικοί αριθμοί «ποσότητες μικρότερες του τίποτα».
- ☞ Leibniz: μιγαδικοί αριθμοί «αμφίβια ανάμεσα στα όντα και μη όντα».
- ☞ Κανόνες όπως $(-1)(-1)=1$ γνωστοί από την αρχαιότητα. Όμως χωρίς δικαιολόγηση. Από πότε γίνονται δεκτοί για σύμβολα (δηλ. $(-a)(-a) = a^2$)?



Peacock (1791-1858)



Εικόνα 1

Peacock: «Treatise on Algebra»(1830) και αργότερα μετά το 1839 την «αριθμητική άλγεβρα» και στην «συμβολική άλγεβρα». «αριθμητική άλγεβρα»: αφορά τις πράξεις σε σύμβολα που αντιπροσωπεύουν θετικούς αριθμούς και οι κανόνες τους γίνονται αυτόματα αποδεκτές, π.χ.

$$a - (b - c) = a - b + c \text{ όταν } b > c \text{ και } a > b - c$$

«συμβολική άλγεβρα»: πράξεις σε σύμβολα που δεν αντιπροσωπεύουν κάποιες θετικές ποσότητες, π.χ. $a - (b - c) = a - b + c$.



Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

☞ **Εικόνα 1: "George Peacock"** by This file is lacking author information.-en.wikipedia (see there the description page). Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_Peacock.jpg#media_viewer/File:George_Peacock.jpg



Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 7: Κλασσική
Άλγεβρα. Ενότητα 7.2: Πέντε βασικά ερωτήματα και η Συμβολική
Άλγεβρα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

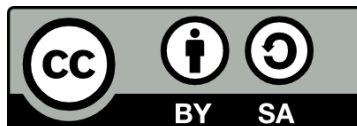
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>



Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

