



# Ιστορία των Μαθηματικών

## Ενότητα 8: Euler και Gauss.

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





# Ιστορία των Μαθηματικών

## Ενότητα 8.2: Gauss.

Χαρά Χαραλάμπους  
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Άδειες Χρήσης



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- ☞ Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση



- ☞ Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- ☞ Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- ☞ Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Περιεχόμενα Ενότητας



∞ Euler.

∞ Gauss.



# Σκοποί Ενότητας



Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να περιγράψει τα μαθηματικά επιτεύγματα των Euler και Gauss και να εξηγήσει πως οι δύο αυτοί μεγάλοι μαθηματικοί επηρέασαν την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.



# Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



Εικόνα 1

*Princeps mathematicorum*

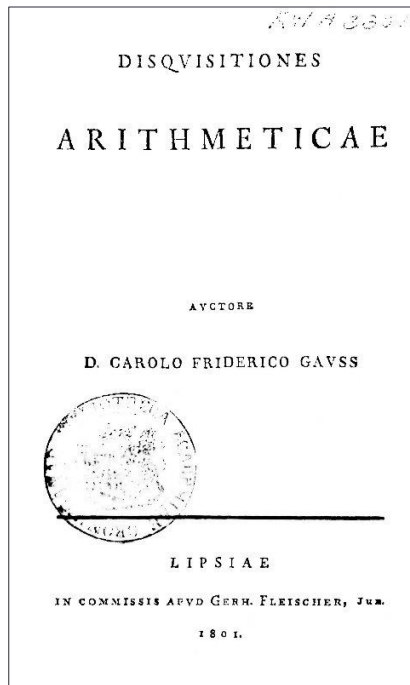
Αναφερόταν στα Μαθηματικά ως η «Βασίλισσα των Επιστημών»

Θεωρία Αριθμών, Στατιστική, Ανάλυση, Διαφορική Γεωμετρία, Αστρονομία, Ηλεκτροστατική, Οπτική, Γεωδαισία, κ.α.

Δίδαξε στο πανεπιστήμιο του Göttingen.



# Θεωρία Αριθμών (1798)



Εικόνα 2

Ο Gauss συγκέντρωσε έργο μαθηματικών όπως Fermat, Euler, Lagrange, Legendre και δικά του πρωτότυπα αποτελέσματα με συστηματικό τρόπο, συμπληρώνοντας κενά και διορθώνοντας αποδείξεις. Επέκτεινε τη θεωρία αριθμών στην αλγεβρική θεωρία αριθμών.





# Κλάσεις ισοδυναμίας



Όρισε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

Απέδειξε τον νόμο της τετραγωνικής αντιστροφής (theorema aureum) όταν  $p, q$  είναι περιττοί πρώτοι:

$$x^2 \equiv p \pmod{q} \Leftrightarrow x^2 \equiv q \pmod{p}$$

εκτός αν

$$p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x^2 \equiv p \pmod{q} \Leftrightarrow x^2 \not\equiv q \pmod{p}$$

Ο Gauss έδωσε 8 διαφορετικές αποδείξεις για αυτό το θεώρημα.



# Κανονικά πολύγωνα, κατασκευές με κανόνα και διαβήτη



Ποια κανονικά  $n$ -γωνα είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη?

Απάντηση  $n$  πρέπει να είναι γινόμενο δύναμης του 2 και πρώτων του Fermat, (ικανή (Gauss 1801) και αναγκαία συνθήκη (Wantzel 1837)).



# Οι πρώτοι του Fermat



Πρώτοι του Fermat είναι πρώτοι της μορφής

$$2^{2^n} + 1$$

π.χ. 3, 5, 17, 257, 65537, (υπάρχουν άλλοι?)

(γνωστό από αρχαιότητα ότι το τρίγωνο και το πεντάγωνο είναι κατασκευάσιμα, βλ. Ευκλείδη)

Ο Gauss έδειξε (θεωρητικά) ότι το κανονικό 17-γωνο είναι κατασκευάσιμο (**1796**) και το γενίκευσε το 1801 αφού πρώτα όρισε ως περιόδους ειδικά αθροίσματα ριζών της μονάδας, π.χ.

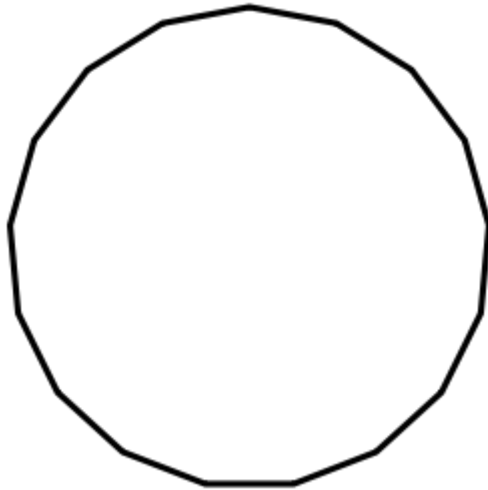
$\zeta + \zeta^{16}$  που είναι  $2\cos(\frac{2\pi}{17})$  όπου

$$\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{17}\right)$$



# 17-γωνο κατασκευάσιμο

*Gauss 1796*



$$16 \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

17-γωνο κατασκευάσιμο *Gauss 1796*

Ο Gauss έδειξε ότι οι ρίζες  
 $x^n - 1$

δίνονται με ριζικά.

Συνδεση με Θεωρία Galois.



# Πόσο είναι το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 έως το 100?



Σε δευτερόλεπτα η απάντηση από τον μικρό Gauss:

5050

1	2	3	4	...	50
100	99	98	97		51

-----  
101    101    101    101    101

$$50 \times 101 = 5050$$



# Γενίκευση



**Γενίκευση:** το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 έως το  $n$  όταν  $n$  άρτιος?

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n/2 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & n/2+1 \end{array}$$

---

$$n+1 \quad n+1 \quad n+1 \quad \dots \quad n+1$$

άρα το άθροισμα είναι  $n/2 (n+1)$ .



# Οι ακέραιοι του Gauss



ΘΘΑ (4 αποδείξεις 1799 πρώτη, 1849 η τελευταία)

Οι ακέραιοι του Gauss:  $a + bi$  όπου  $a, b$  ακέραιοι.

Προσοχή  $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$  δεν είναι πρώτος σε αυτό το σύνολο!

Η ιδιότητα της μοναδικής παραγοντοποίησης ήταν γνωστή από την αρχαιότητα, βλ. «Στοιχεία» (Ευκλείδης).

Ο Gauss μελέτησε την ιδιότητα της μοναδικής παραγοντοποίησης σε συστήματα αριθμών μεγαλύτερα από τους ακεραίους--- γιατί κατάλαβε ότι πιθανόν να υπάρχουν συστήματα αριθμών που να μην την ικανοποιούν!



# Εικασία του Gauss: το θεώρημα των πρώτων αριθμών

---



$\pi(x)$  είναι ο αριθμός των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι του  $x$

τότε η συνάρτηση  $\pi(x)$  πλησιάζει ασυμπτωτικά τη συνάρτηση  $\frac{x}{\log x}$ .

Απόδειξη: 1896 Hadamard, Poussin (ανεξάρτητα).





# Gauss και μη Ευκλείδεια γεωμετρία



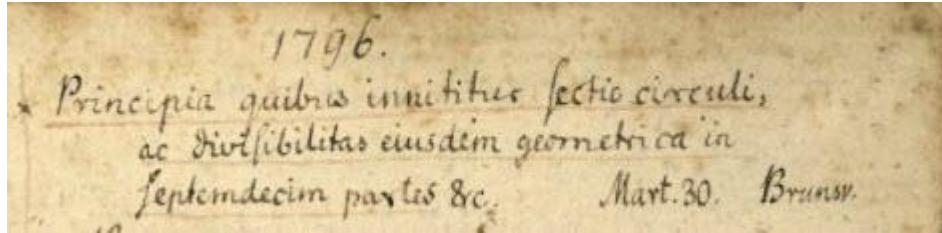
Gauss και μη Ευκλείδεια γεωμετρία ( σύνδεση του 5<sup>ο</sup> αξιώματος του Ευκλείδη και της έρευνας του Gauss, γεωμετρίες των Bolyai 1823, Lobachevsky 1829, Riemann) 1828



Εικόνα 3



# Το ημερολόγιο του Gauss



Εικόνα 4

1796-1814

19 σελίδες,

146 εγγραφές (περισσότερες από αυτές σημαντικές μαθηματικές ανακαλύψεις)

Δημοσιοποιήθηκε το 1898.



# Υπογραφή του Gauss



*C. F. Gauss*

A handwritten signature of Carl Friedrich Gauss, written in a cursive style. The signature is 'C. F. Gauss' with a long, sweeping underline that extends to the left.

Εικόνα 5



# Βιβλιογραφία



- ☞ Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- ☞ Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- ☞ Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)



Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- ☞ **Εικόνα 1:** "**Carl Friedrich Gauss**" by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann). Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl\\_Friedrich\\_Gauss.jpg#mediaviewer/File:CarlFriedrich\\_Gauss.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#mediaviewer/File:CarlFriedrich_Gauss.jpg)
- ☞ **Εικόνα 2:** "Disqvisitiones-800". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -  
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Disqvisitiones-800.jpg#mediaviewer/File:Disqvisitiones-800.jpg>



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)



- ☞ **Εικόνα 3:** "Bendixen - **Carl Friedrich Gauß**, 1828" by Siegfried Detlev Bendixen - published in "Astronomische Nachrichten" 1828. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bendixen\\_\\_Carl\\_Friedrich\\_Gau%C3%9F,\\_1828.jpg#mediaviewer/File:Bendixen\\_\\_Carl\\_Friedrich\\_Gau%C3%9F,\\_1828.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bendixen__Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg#mediaviewer/File:Bendixen__Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg)
- ☞ **Εικόνα 4:** <http://pballew.blogspot.gr/2014/03/on-this-day-in-math-march-30.html>



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)



∞ **Εικόνα 5: "Gauss' signature"** by Carl Friedrich Gauss - <http://www.mathematik.ch/mathematiker/Gauss.jpg>. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gauss%27\\_signature.png#mediaviewer/File:Gauss%27\\_signature.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gauss%27_signature.png#mediaviewer/File:Gauss%27_signature.png)



# Σημείωμα Αναφοράς



Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά  
Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 8: Euler και Gauss.  
Ενότητα 8.2: Gauss». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/>

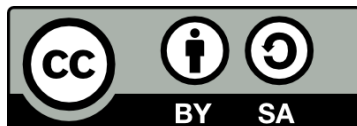




# Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



# Διατήρηση Σημειωμάτων



Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου  
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

