# Ιστορία των Μαθηματικών

## **Ενότητα 9**: Αφηρημένη Άλγεβρα

**Χαρά Χαραλάμπους**

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

CC BY SA

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Ιστορία των Μαθηματικών

## **Ενότητα 9.6**: Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.

**Χαρά Χαραλάμπους**

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

cc BY SA

# Άδειες Χρήσης


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- Galois και Θεωρία Ομάδων.
- Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- Emily Noether.

# Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην E. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.

# Αντιμεταθετικοί Δακτύλιοι

Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών: παρόλο που τα κύρια προβλήματα είχαν τεθεί ως προς τους ακεραίους, για την επίλυση τους φάνηκε ότι έπρεπε να σκεφτούν τους ακεραίους ως κομμάτι πιο γενικευμένων συστημάτων αριθμών, τους «αλγεβρικούς ακεραίους».

Ένα από τα κύρια ζητήματα που τέθηκε ήταν η ιδιότητα της μοναδικής παραγοντοποίησης.

# Dedekind

Το υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών

$$\{a + ib\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Εικόνα 1

Όμως $6 = 2 \times 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$

και έτσι δεν έχουμε μοναδική παραγοντοποίηση! (Παρατηρήστε ότι τα στοιχεία $2, 3, (1 + i\sqrt{5}), (1 - i\sqrt{5})$ δεν διαιρούνται από κανένα άλλο στοιχείο της μορφής $a + ib\sqrt{5}$ )

# Σύνολα-Ιδεώδη (1)

Εάν όμως θεωρήσουμε τα παρακάτω σύνολα/ιδεώδη, (ιδέα του Dedekind το 1871),

$$P = \langle 2,1 + i\sqrt{5} \rangle$$
$$Q = \langle 3,1 + i\sqrt{5} \rangle$$
$$P = \langle 3,1 - i\sqrt{5} \rangle$$

τότε μπορούμε να δείξουμε ότι όλα είναι πρώτα ιδεώδη. Δηλαδή ότι αν ένα γινόμενο στοιχείων ανήκει για παράδειγμα στο P τότε ένα από τα δύο στοιχεία είναι αναγκαστικά μέλος του P.

Επίσης μπορεί να δείξει κανείς ότι

# Σύνολα-Ιδεώδη (2)

- $\mathrm{P}^2 = \langle 2 \rangle$.
- $QR = \langle 3 \rangle$.
- $PQ = \langle 1 + i\sqrt{5} \rangle$.
- $PR = \langle 1 - i\sqrt{5} \rangle$.

Για να δούμε για παράδειγμα γιατί ισχύει η πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι

- $4^2 = \langle 2^2 \rangle \in \mathrm{P}^2$.
- $2 + 2i\sqrt{5} = 2(1 + i\sqrt{5}) \in \mathrm{P}^2$.
- $(1 + i\sqrt{5})^2 = -4 + 2i\sqrt{5} \in \mathrm{P}^2$.

# Σύνολα-Ιδεώδη (3)

και άρα $P^2 \subset \langle 2 \rangle$. Από τα παραπάνω όμως προκύπτει επίσης ότι $2 \in P^2$ και άρα $\langle 2 \rangle \subset P^2$.

Έτσι

$$\langle 6 \rangle = \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle = P^2(QR) = P^2QR$$

Ενώ

$$\langle 6 \rangle = \left\langle 1 + i\sqrt{5} \right\rangle \left\langle 1 - i\sqrt{5} \right\rangle = (\mathrm{PQ})(PR) = P^2QR$$

και έχουμε μοναδική παραγοντοποίηση στο επίπεδο των ιδεωδών!

# Δακτύλιος

Ο όρος δακτύλιος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Hilbert το 1892.

Ο πρώτος αξιωματικός ορισμός του δακτυλίου από τον Fraenkel το 1914.

Οι αξιωματικές αρχές της θεωρίας των αντιμεταθετικών δακτυλίων δόθηκαν για πρώτη φορά από τη Noether το 1921.

# Βιβλιογραφία


- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Dedekind**" by not found - http://dbeveridge.web.wesleyan.edu/wescourses/2001f/chem160/01/Photo_Gallery_Science/Dedekind/FrameSet.htm. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dedekind.jpeg#mediaviewer/File:Dedekind.jpeg

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα. Ενότητα 9.6: Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

BY SA