



Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 3: Πεπλεγμένες Συναρτήσεις, Όρια

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Πρόβλημα

- Μια εταιρεία παράγει σούπες και τις διαθέτει στην αγορά σε κυλινδρικά κουτάκια που να χωράνε 500cm^3 . Να βρείτε την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου ώστε να χρησιμοποιηθεί το ελάχιστο υλικό κατασκευής των κουτιών.



Λύση

Όγκος κυλίνδρου: $V = \pi r^2 h = 500 \text{cm}^3$

$$\Rightarrow \pi r^2 h = 500 \Rightarrow \pi h = \frac{500}{r^2} \quad (1)$$

Εμβαδό κυλίνδρου: $E_K = 2E_B + E_{\text{Παρ.}}$

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad (2)$$



Λύση

Από τις σχέσεις (1) και (2):

$$E_K = 2\pi r^2 + 2\frac{500}{r^2}r \Rightarrow E_K = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$$

Θεωρούμε συνάρτηση

$$\phi(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}, \quad r > 0$$



Λύση

Υπολογίζουμε την παράγωγο της $\phi(r)$:

$$\phi'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$$

Βρίσκουμε το σημείο μηδενισμού της $\phi'(r)$:

$$\phi'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{1000}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{250}{\pi} \approx 4.3 \text{ cm}$$



Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης

$$\text{Έστω } f(x, y) = 0 \implies 3xy + y^2 + x^2 - 7 = 0$$

Η παραπάνω σχέση ορίζει πεπλεγμένα την $y(x)$.



Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης

$$\text{Έστω } f(x, y) = 0 \implies 3xy + y^2 + x^2 - 7 = 0$$

Η παραπάνω σχέση ορίζει πεπλεγμένα την $y(x)$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την $y'(x)$ από την παραπάνω σχέση, χωρίς να χρειαστεί να βρούμε πρώτα την $y(x)$.



Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης

$$\text{Έστω } f(x, y) = 0 \Rightarrow 3xy + y^2 + x^2 - 7 = 0$$

Παραγωγίζουμε την $f(x, y)$ ως προς x :

$$3y(x) + 3xy'(x) + 2y'y(x) + 2x = 0$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-2x - 3y(x)}{3x + 2y(x)}$$



Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Για να βρούμε την $y'(x)$ σε ένα συγκεκριμένο σημείο (π.χ. για $x=2$):

- 1.** Αντικαθιστούμε την τιμή του x που ζητείται στην αρχική $f(x,y)$, ώστε να βρούμε την τιμή του y στην οποία αντιστοιχεί.
- 2.** Αντικαθιστούμε τα x και y στην $y'(x)$ που υπολογίσαμε, και βρίσκουμε την τιμή της παραγώγου στο σημείο x .



Όρια

Το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ για μια συγκεκριμένη τιμή του x , εξετάζει τη συμπεριφορά $f(x)$ της καθώς το x παίρνει τιμές που τείνουν στην τιμή αυτή.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$



Όρια

Το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ καθώς πλησιάζει μια τιμή του x μπορεί:

- Να είναι ίσο με μια συγκεκριμένη τιμή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

- Να τείνει στο άπειρο: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$



Όρια

Το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ για τιμές του x που τείνουν στο άπειρο, μπορεί επίσης να τείνει ασυμπτωτικά προς μια ευθεία ή προς μια συγκεκριμένη τιμή.



Όρια Στη Φυσική

- Στη Φυσική, τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούμε οδηγούν, σε κάποιες περιπτώσεις, σε όρια που τείνουν στο άπειρο.
- Αυτό συμβαίνει λόγω αδυναμίας του μαθηματικού μοντέλου και όχι λόγω ύπαρξης απείρων στη Φύση.



Όρια Στη Φυσική

- Στην κατασκευή μοντέλων *επιβάλλουμε* τη συμπεριφορά των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε, ώστε να αποφεύγονται οι απειρισμοί και να ανταποκρίνεται το μοντέλο στην πραγματικότητα.



Άσκηση 1

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$



Άσκηση 1

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)} = 2$$



Άσκηση 2

$$f(t) = \frac{t^3 + 8}{t + 2}$$

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{t \rightarrow -2} f(t)$



Άσκηση 2

$$f(t) = \frac{t^3 + 8}{t + 2}$$

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{t \rightarrow -2} f(t)$

Λύση:

$$\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^3 + 8}{t + 2} = \lim_{t \rightarrow -2} \frac{(t + 2)(t^2 - 2t + 4)}{t + 2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -2} (t^2 - 2t + 4) = 12$$



Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$



Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$

Λύση:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(\sqrt{1-x} + 1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + 2}{x^2 - x}$



Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + 2}{x^2 - x}$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x \left(7 + \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \frac{\left(7 + \frac{2}{x} \right)}{\left(1 - \frac{1}{x} \right)} \right] = 0$$



Άσκηση 5

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 3x} - x \right]$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 3x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1 \right] = \infty \cdot 0 \quad (!)$$



Άσκηση 5

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 3x} - x \right]$

Άλλος τρόπος:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 3x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1 \right)} = \frac{3}{2}$$



Όρια Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Όρια Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$



Όρια Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$



Θεώρημα του “Sandwich”

$$\text{Αν } g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$



Θεώρημα του “Sandwich”: Εφαρμογή

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]$



Θεώρημα του “Sandwich”: Εφαρμογή

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]$

Λύση:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = 0$$



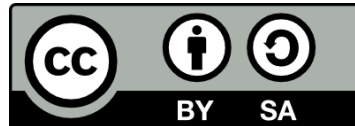
Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, **Λουκάς Βλάχος**.
«**Γενικά Μαθηματικά Ι**». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη
δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 30/03/2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

