Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 4: Παραγώγιση

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Απόδειξη Ορίου Τριγωνομετρικής Συνάρτησης

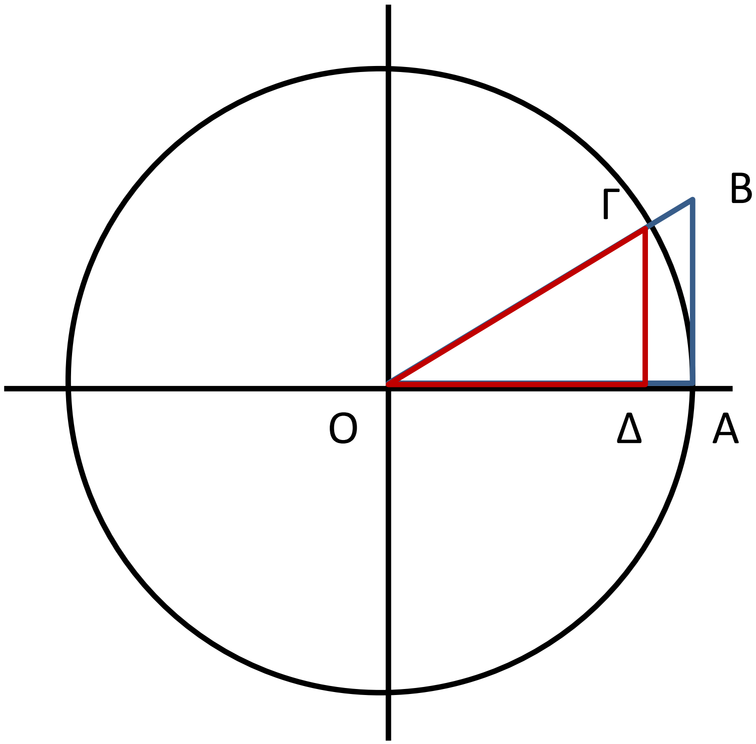
Να δείξετε ότι $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

Απόδειξη Ορίου Τριγωνομετρικής Συνάρτησης

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

$$[\mathrm{OAB}]\geq[\mathrm{OA\Gamma}]\geq[\mathrm{O\Delta\Gamma}]$$

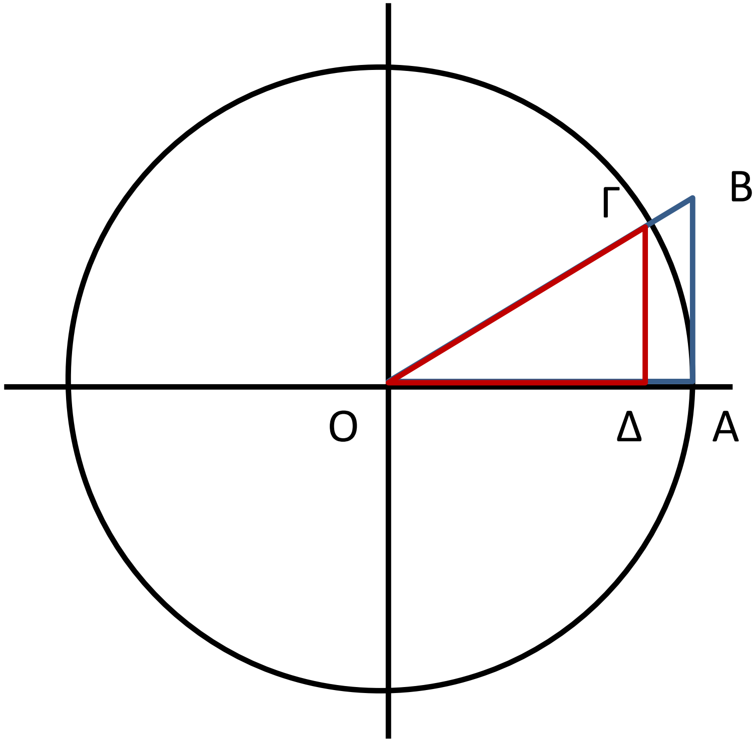
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1)\tan\theta \geq \frac{1}{2}1^2\theta \geq \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$$



Απόδειξη Ορίου Τριγωνομετρικής Συνάρτησης

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

$$[\mathrm{OAB}]\geq[\mathrm{OA\Gamma}]\geq[\mathrm{O\Delta\Gamma}]$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1)\tan\theta \geq \frac{1}{2}1^2\theta \geq \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1)\tan\theta \geq \frac{1}{2}1^2\theta \geq \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta \geq \frac{\sin\theta}{\theta} \geq \frac{1}{\cos\theta}$$

Άσκηση

Να δείξετε ότι $\lim_{x \to +\infty} \left[1 + \frac{1}{x} \right]^x = e$

Άσκηση

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Άσκηση

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Εξετάζουμε ξεχωριστά τον εκθέτη:

Άσκηση

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left[1+\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{n\left[1+\frac{1}{x}\right]}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{y\to0}\frac{1}{1+y} = 1$$

Άσκηση

Άρα θα είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{1}=e$$

Συνέχεια

Μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο όταν:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \kappa$$

και

$$\kappa = f(x_0)$$

Συνέχεια

Αν μια συνάρτηση σε κάποιο σημείο δεν είναι συνεχής, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την ασυνέχεια θέτοντας:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \\ f(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

Παράγωγοι

Στο παράδειγμα της μπάλας που αναπηδά στο έδαφος, η μέση ταχύτητα της μπάλας μεταξύ δύο σημείων θα είναι:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \left[\frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1}\right]$$

Παράγωγοι

Αν οι δύο χρονικές στιγμές που εξετάζουμε είναι απέχουν *απειροστά* μεταξύ τους, τότε η σχέση

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \left[\frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} \right] = \frac{dh}{dt}$$

μας δίνει τη *στιγμιαία ταχύτητα.*

Παράγωγοι

Ορισμός της παραγώγου:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Παράγωγοι

Ορισμός της παραγώγου:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Συνηθίζεται, όταν παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο, να συμβολίζουμε την παράγωγο ως εξής:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Παράγωγοι: Εφαρμογή

Να βρεθεί η παράγωγος, με χρήση του ορισμού, της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Παράγωγοι: Εφαρμογή

Να βρεθεί η παράγωγος, με χρήση του ορισμού, της συνάρτησης

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ιδιότητες Παραγώγισης

Άθροισμα/Διαφορά:

$$F(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Γινόμενο:

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Λόγος:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Εφαρμογή: Εφαπτομένη Σε Σημείο Συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας σε ένα σημείο της συνάρτησης *f(x)* θα είναι:

$$y - y_0 = \left[\frac{df(x_0)}{dx}\right](x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = \left[-\frac{1}{{x_0}^2}\right](x - x_0)$$

Εφαρμογή: Εφαπτομένη Σε Σημείο Συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας σε ένα σημείο της συνάρτησης *f(x)* θα είναι:

$$y - y_0 = \left[\frac{df(x_0)}{dx}\right](x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = \left[-\frac{1}{x_0{}^2}\right](x - x_0)$$

Γραμμική Προσέγγιση

Άσκηση

Δείξτε ότι το τρίγωνο που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της καμπύλης

$$y = \frac{1}{x} \qquad \left(x > 0\right)$$

και των αξόνων, έχει επιφάνεια 2 τετραγωνικές μονάδες.

Άσκηση

Λύση:

Η εφαπτομένη σε ένα τυχαίο σημείο θα είναι:

$$y - y_0 = \left[-\frac{1}{{x_0}^2} \right] (x - x_0)$$

Άσκηση

Λύση:

Η εφαπτομένη σε ένα τυχαίο σημείο θα είναι:

$$y - y_0 = \left[-\frac{1}{{x_0}^2} \right](x - x_0)$$

Θέτουμε:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{x_0}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 2x_0$$

Άσκηση

Λύση:

Η εφαπτομένη σε ένα τυχαίο σημείο θα είναι:

$$y - y_0 = \left[-\frac{1}{{x_0}^2} \right](x - x_0)$$

Θέτουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2}{x_0} \\[2em] y = 0 \Rightarrow x = 2x_0 \end{array}\right\} E = \frac{1}{2} x \cdot y = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_0}\right)(2x_0) = 2$$

Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Έστω $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 1$

1η Παράγωγος: $\frac{df}{dx} = x^3 - 6x$

2η Παράγωγος: $\frac{d^2 f}{dx^2} = 3x^2 - 6$

3η Παράγωγος: $\frac{d^3 f}{dx^3} = 6x$

Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

$$f\left(u(x)\right)=e^{x^2-2x-3}=e^{u(x)} \qquad u(x)=x^2-2x-3$$

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)=\left[e^{x^2-2x-3}\right]\cdot[2x-2]$$

Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

$$f\left(u(x)\right) = e^{x^2-2x-3} = e^{u(x)} \qquad u(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left[e^{x^2-2x-3}\right]\cdot\left[2x-2\right]$$

Κανόνας Αλυσίδας

2η Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

$$f\big(u(x)\big) = e^{x^2-2x-3} = e^{u(x)} \qquad u(x) = x^2 - 2x - 3$$

<u>Γενικός Κανόνας</u>:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{du}\frac{du}{dx}\right)$$

2η Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

$$f\left(u(x)\right)=e^{x^2-2x-3}=e^{u(x)} \qquad u(x)=x^2-2x-3$$

Γενικός Κανόνας:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{du}\frac{du}{dx}\right)$$

$$=\frac{d^2 f}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)$$

2η Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

$$f\left(u(x)\right) = e^{x^2-2x-3} = e^{u(x)} \qquad u(x) = x^2 - 2x - 3$$

<u>Εφαρμογή</u>:

$$\frac{df^2\left(u(x)\right)}{dx^2} = \frac{d^2 f}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$$

$$= e^{x^2-2x-3}\left(2x-2\right)^2 + 2e^{x^2-2x-3}$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Παράγωγοι Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin(g(x))$	$\cos(g(x))\cdot g'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos(g(x))$	$-\sin(g(x))\cdot g'(x)$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Παράγωγοι Εκθετικών Συναρτήσεων

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$e^{g(x)}$	$e^{g(x)}g'(x)$
a^x	$a^x \ln a$

Παράγωγοι Λογαριθμικών Συναρτήσεων

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\ln\big(g(x)\big)$	$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln x}$

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΗΜΕΙΏΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.