



Γενικά Μαθηματικά I

Ενότητα 5: Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, Κατασκευή Διαφορικής Εξίσωσης

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Παράδειγμα Πεπλεγμένης Συνάρτησης

$$\left. \begin{aligned} x &= 7y + \sin(x^2 + 1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} &= 1 \end{aligned} \right\} F(x, y(x)) = 0$$



Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης

$$\text{Έστω } x = 7y + \sin(x^2 + 1)$$

Υπολογίζω την παράγωγο ως προς x , παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης:

$$1 = 7 \frac{dy}{dx} + \cos(x^2 + 1)(2x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos(x^2 + 1)(2x)}{7}$$



Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Γενικά, καταλήγουμε σε μια σχέση της μορφής:

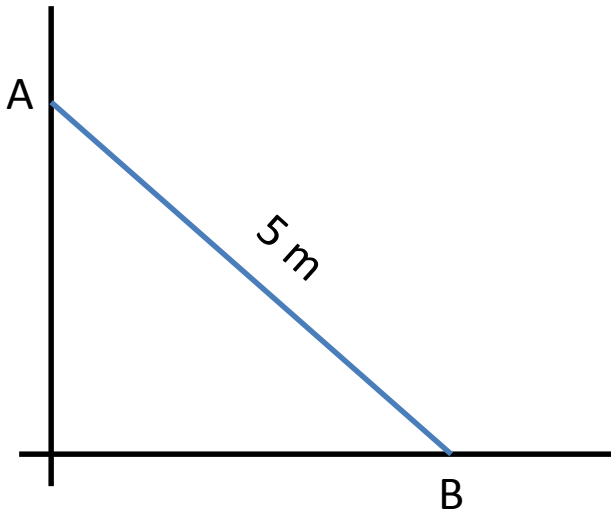
$$\varphi(x) \frac{dy}{dx} = \varphi_0(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi(x)}$$

Για να ορίζεται η παράγωγος, πρέπει το $\varphi(x)$ να είναι διάφορο του μηδενός.



Πρόβλημα

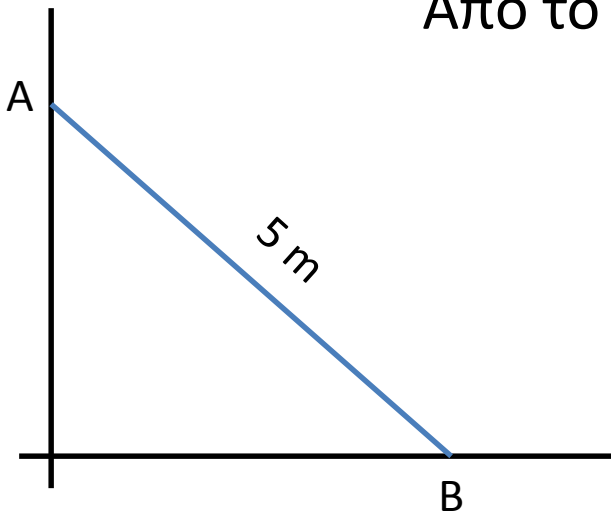
Μια σκάλα μήκους 5 μέτρων ακουμπάει στον τοίχο (σημείο A) και στο δάπεδο (σημείο B). Αν το B ολισθαίνει με ταχύτητα 1 m/s , με τί ταχύτητα ολισθαίνει το A τη στιγμή που το B περνά από τη θέση $x = 2 \text{ m}$.



Πρόβλημα

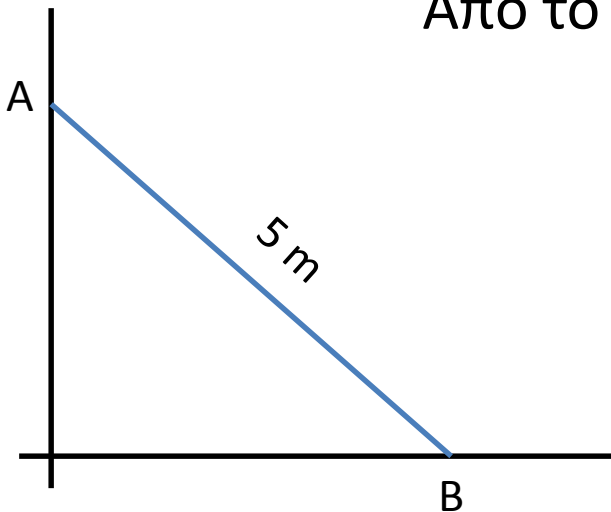
Μια σκάλα μήκους 5 μέτρων ακουμπάει στον τοίχο (σημείο A) και στο δάπεδο (σημείο B). Αν το B ολισθαίνει με ταχύτητα 1 m/s, με τί ταχύτητα ολισθαίνει το A τη στιγμή που το B περνά από τη θέση $x = 2\text{m}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα: $x^2 + y^2 = 25$



Πρόβλημα

Μια σκάλα μήκους 5 μέτρων ακουμπάει στον τοίχο (σημείο A) και στο δάπεδο (σημείο B). Αν το B ολισθαίνει με ταχύτητα 1 m/s , με τί ταχύτητα ολισθαίνει το A τη στιγμή που το B περνά από τη θέση $x = 2 \text{ m}$.



Από το πυθαγόρειο θεώρημα: $x^2 + y^2 = 25$

Παραγωγίζουμε ως προς t :

$$\Rightarrow 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \left(\frac{dx}{dt} \right)$$



Επαλήθευση Λύσης Διαφορικής Εξίσωσης

Έστω η Διαφορική Εξίσωση: $\frac{d^2 y}{dt^2} + y(x) = -2 \sin x$

Με λύση: $y = x \cos x$



Επαλήθευση Λύσης Διαφορικής Εξίσωσης

Έστω η Διαφορική Εξίσωση: $\frac{d^2 y}{dt^2} + y(x) = -2 \sin x$

Με λύση: $y = x \cos x$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε τη λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, παραγωγίζοντας την y (δύο φορές), και αντικαθιστώντας στην εξίσωση να ελέγξουμε την ορθότητα της.

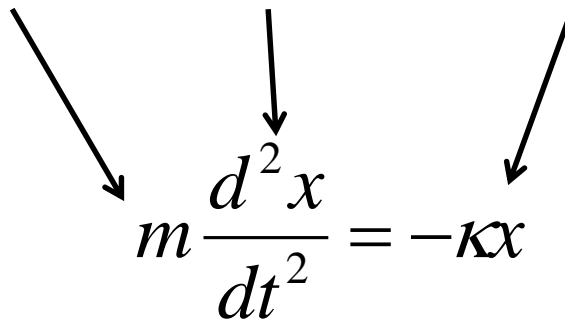


Κατασκευή Διαφορικής Εξίσωσης

Διαφορική Εξίσωση Ταλάντωσης Ελατηρίου:

Από το νόμο του Νεύτωνα έχουμε

(Μάζα)(Επιτάχυνση)=(Δύναμη)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\kappa x$$


$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{\kappa}{m} \right) x = 0$$



Κατασκευή Διαφορικής Εξίσωσης

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{\kappa}{m} \right) x = 0$$

Η εξίσωση ταλάντωσης είναι $x = a \cos(\omega t)$

και αποτελεί τη **λύση** της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης.

$$\text{Προκύπτει, επίσης } \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$



Κατασκευή Διαφορικής Εξίσωσης Για Το Εκκρεμές

Η διαφορική εξίσωση για την κίνηση του εκκρεμούς είναι

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} &= -mg \sin \theta \\ \dot{s} &= l\dot{\theta} \end{aligned} \right\} l\ddot{\theta} = -g \sin \theta$$



Κατασκευή Διαφορικής Εξίσωσης Για Το Εκκρεμές

Η διαφορική εξίσωση για την κίνηση του εκκρεμούς είναι

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} &= -mg \sin \theta \\ \dot{s} &= l\dot{\theta} \end{aligned} \right\} l\ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

Η γραμμική προσέγγιση για το ημίτονο, στην αρχή των αξόνων, είναι:

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\text{Άρα } l\ddot{\theta} = -g\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0 \quad \text{με} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



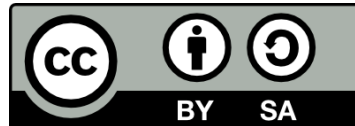
Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, **Λουκάς Βλάχος**.
«**Γενικά Μαθηματικά I**». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη
δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

