Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 8: Εφαρμογές Σειρών Taylor

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Θεώρημα de l' Hospital: Απόδειξη

Έχοντας ως αφετηρία το θεώρημα Rolle:

$$\left.\begin{array}{c} f(a) = f(b) \\ a < x < b \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = 0$$

Θεώρημα de l’ Hospital: Απόδειξη

Έχοντας ως αφετηρία το θεώρημα Rolle:

$$\left.\begin{array}{c} f(a)=f(b) \\ a<x<b \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=0$$

Θεώρημα: Έστω f’(x), g’(x) και ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)\neq 0 \qquad a<x\leq b \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=0=\lim\limits_{x\to a^+} g(x) \\ \text{και υπάρχει} \quad \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Θεώρημα de l’ Hospital: Απόδειξη

$$f(a) = 0 = g(a)$$

$$g'(b) \neq 0$$

Θεώρημα de l’ Hospital: Απόδειξη

$$f(a) = 0 = g(a)$$

$$g'(b) \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)}{g(b)} g(x) \\ h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow h'(x) = 0 \end{array}\right\} \; h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)}{g(b)} g'(x) = 0$$

Θεώρημα de l’ Hospital: Απόδειξη

$$f(a) = 0 = g(a)$$

$$g'(b) \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)}{g(b)} g(x) \\ \\ h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow h'(x) = 0 \end{array}\right\} \quad h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)}{g(b)} g'(x) = 0$$

Άρα: $$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)}{g(b)} \Rightarrow \lim_{b \to a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{b \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Διαφορικό: Εφαρμογή

Έστω η θερμοκρασία κατά μήκος μιας ράβδου:

$$T(x) = e^x \sin\left(x^2 + 3\right) + x^3$$

Σε τί σφάλμα στη μέτρηση της θερμοκρασίας αντιστοιχεί ένα σφάλμα στη μέτρηση της θέσης κατά Δx;

Διαφορικό: Εφαρμογή

Έστω η θερμοκρασία κατά μήκος μιας ράβδου:

$$T(x) = e^x \sin\left(x^2 + 3\right) + x^3$$

Σε τί σφάλμα στη μέτρηση της θερμοκρασίας αντιστοιχεί ένα σφάλμα στη μέτρηση της θέσης κατά Δx;

Το σφάλμα στη μέτρηση της θερμοκρασίας θα είναι:

$$\Delta T = T'(x_0)\Delta x$$

Διαφορικό: Εφαρμογή

Έστω η θερμοκρασία κατά μήκος μιας ράβδου:

$$T(x) = e^x \sin\left(x^2 + 3\right) + x^3$$

Σε τί σφάλμα στη μέτρηση της θερμοκρασίας αντιστοιχεί ένα σφάλμα στη μέτρηση της θέσης κατά Δx;

Το σφάλμα στη μέτρηση της θερμοκρασίας θα είναι:

$$\Delta T = T'(x_0)\Delta x$$

Το παραπάνω προκύπτει από τη γραμμική προσέγγιση στο ανάπτυγμα Taylor:

$$T(x + \Delta x) \approx T(x) + T'(x)\Delta x$$

Κριτήριο $2^{ης}$ Παραγώγου Με Χρήση Του Πολυωνύμου Taylor

Πρώτα, βρίσκουμε τα ακρότατα, από τις ρίζες της πρώτης παραγώγου, $f'(x) = 0$.

Αναπτύσσσουμε τη συνάρτηση σε σειρά Taylor, στα ακρότατα:

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2} f''(x_1)(x - x_1)^2 + O_3$$

Κριτήριο 2ης Παραγώγου Με Χρήση Του Πολυωνύμου Taylor

Πρώτα, βρίσκουμε τα ακρότατα, από τις ρίζες της πρώτης παραγώγου, *f'(x) = 0*.

Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση σε σειρά Taylor, στα ακρότατα:

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2} f''(x_1)(x - x_1)^2 + O_3$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_1) = \frac{1}{2} f''(x_1)(x - x_1)^2 \quad \begin{cases} f''(x_1) > 0 \rightarrow \varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o \\ f''(x_1) < 0 \rightarrow \mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau o \end{cases}$$

Σειρά Taylor: Εφαρμογή

Η Νευτώνεια φυσική ορίζει την κινητική ενέργεια ως:

$$E_{\text{Κ}\iota\nu.} = \frac{1}{2} m u^2$$

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας ορίζει την κινητική ενέργεια ως:

$$E_{\text{Κ}\iota\nu} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} - m_0 c^2$$

Σειρά Taylor: Εφαρμογή

Αναπτύσσοντας σε σειρά Maclaurin την παρακάτω συνάρτηση έχουμε:

$$\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/2}} \approx 1-\frac{1}{2}x^2$$

Σειρά Taylor: Εφαρμογή

Αναπτύσσοντας σε σειρά Maclaurin την παρακάτω συνάρτηση έχουμε:

$$\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/2}} \approx 1-\frac{1}{2}x^2$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα στη σχέση της ενέργειας από την ειδική θεωρία σχετικότητας έχουμε:

$$E_{\text{Κιν}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2\right] - m_0c^2 = \frac{1}{2}m_0u^2$$

Παράδειγμα Σειράς Maclaurin

$$e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^{2} + \frac{1}{3!}x^{3} + \ldots + \frac{1}{n!}x^{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^{k}$$

Παράδειγμα Σειράς Maclaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

$$e^{0.1} = 1 + (0.1) + \frac{1}{2}(0.1)^2 \approx 1.105$$

Με χρήση υπολογιστή παίρνουμε: $e^{0.1} = 1.105170018$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Λουκάς Βλάχος. «Γενικά Μαθηματικά Ι». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΗΜΕΙΏΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.