ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 11: Ακολουθίες και Σειρές

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ακολουθίες Και Σειρές

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n} \to \left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Ακολουθίες Και Σειρές: Σύγκλιση

Λέμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει, όταν:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Δηλαδή, όταν η σειρά έχει πεπερασμένο όριο.

Ακολουθίες Και Σειρές: Παράδειγμα 1

Να μελετηθεί η σύγκλιση της παρακάτω ακολουθίας:

$$\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Ακολουθίες Και Σειρές: Παράδειγμα 1

Να μελετηθεί η σύγκλιση της παρακάτω ακολουθίας:

$$\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Η παραπάνω ακολουθία συγκλίνει στο μηδέν, αφού καθώς μεγαλώνει το n κυριαρχεί ο δεύτερος όρος.

Ακολουθίες Και Σειρές: Παράδειγμα 2

Να μελετηθεί η σύγκλιση της παρακάτω ακολουθίας:

$$\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Ακολουθίες Και Σειρές: Παράδειγμα 2

Να μελετηθεί η σύγκλιση της παρακάτω ακολουθίας:

$$\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot \ldots \cdot n} \Rightarrow 0 < \frac{1}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\left(\frac{n}{n}\right)\right] \le \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

Μονότονες Ακολουθίες

Αυστηρά Αύξουσα: $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n$

Αύξουσα: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n$

Αυστηρά Φθίνουσα: $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n$

Φθίνουσα: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n$

Μονότονες Ακολουθίες: Κριτήρια

1. Υπολογίζουμε τη διαφορά: $a_{n+1} - a_n$

<u>Εφαρμογή</u>: $a_n = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

Μονότονες Ακολουθίες: Κριτήρια

2. Υπολογίζουμε το λόγο: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

<u>Εφαρμογή</u>: $a_n = \left\{ \dfrac{n}{3n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n^2+5n+2}{3n^2+5n} > 0$$

Μονότονες Ακολουθίες: Κριτήρια

3. Υπολογίζουμε την παράγωγο:

<u>Εφαρμογή</u>: $a_n = \left\{ \dfrac{3n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\frac{da}{dn} = \frac{3}{(2n+1)^2} > 0$$

Ακολουθίες: Εφαρμογή

Μελετήστε την μονοτονία της ακολουθίας εξετάζοντας το λόγο δύο διαδοχικών όρων:

$$\left\{\frac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Ακολουθίες: Εφαρμογή

Μελετήστε την μονοτονία της ακολουθίας εξετάζοντας το λόγο δύο διαδοχικών όρων:

$$\left\{\frac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{10}{n+1} \rightarrow$ Για *n>9*, η ακολουθία είναι φθίνουσα.

Συμπέρασμα: Η σύγκλιση μιας ακολουθίας χαρακτηρίζεται από τους μεγάλους όρους.

Σειρές

Ο n-οστός όρος μιας σειράς είναι το άθροισμα όλων των προηγούμενων όρων μέχρι και τον όρο που εξετάζουμε.

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= 1+\frac{1}{2} \\ S_2 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \end{aligned}\right\} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Σειρές: Σύγκλιση

Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της σειράς καθώς το *n* τείνει στο άπειρο:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$S_n - \frac{1}{2} S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Γεωμετρική Σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \qquad \text{για} \quad -1 < r < 1$$

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{\kappa=0}^{\infty} 3^{\kappa} \cdot 5^{1-\kappa}$

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{\kappa=0}^{\infty} 3^{\kappa} \cdot 5^{1-\kappa}$

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} 3^{\kappa} \cdot 5^{1-\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} 3^{\kappa} \cdot 5 \cdot 5^{-\kappa} = 5\sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{\kappa} = \frac{25}{2}$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{5}{4^{\kappa}}$

Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{5}{4^{\kappa}}$

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{5}{4^{\kappa}} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^{\kappa} = \frac{5}{3}$$

Γεωμετρική Σειρά: Απόδειξη

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

$$S_0 = r^0 = 1$$

$$S_1 = r^1 = 1 + r$$

$$S_2 = r^1 = 1 + r + r^2$$

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Γεωμετρική Σειρά: Απόδειξη

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

$$\left.\begin{array}{l}
S_0 = r^0 = 1 \\[1em]
S_1 = r^1 = 1 + r \\[1em]
S_2 = r^1 = 1 + r + r^2 \\[1em]
S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}
\end{array}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}$$

Τηλεσκοπική Σειρά

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\kappa+1}\right)$$

Τηλεσκοπική Σειρά

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\kappa+1}\right)$$

$$S_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$S_2=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Τηλεσκοπική Σειρά

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\kappa+1}\right)$$

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=1$$

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΗΜΕΙΏΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.