ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά Ι

Ενότητα 17: Αριθμητική Ολοκλήρωση, Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ορισμένα Ολοκληρώματα

Θυμίζουμε, από το προηγούμενο μάθημα:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

Ορισμένα Ολοκληρώματα

Θυμίζουμε, από το προηγούμενο μάθημα:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Ορισμένα Ολοκληρώματα

Θυμίζουμε, από το προηγούμενο μάθημα:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Θυμίζουμε, επίσης, για ολοκλήρωση συνάρτησης στο άπειρο:

$$F(x)=\int_a^{\infty} f(t)dt=\lim_{l\to\infty}\left[\int_a^{l} f(t)dt\right]$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Θυμίζουμε, επίσης, για ολοκλήρωση συνάρτησης στο άπειρο:

$$F(x)=\int_{a}^{\infty} f(t)dt=\lim_{l\to\infty}\left[\int_{a}^{l} f(t)dt\right]$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=\lim_{l\to-\infty}\left[\int_{-\infty}^{a} f(t)dt\right]+\lim_{l\to\infty}\left[\int_{a}^{\infty} f(t)dt\right]$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Τέλος, για σημεία όπου η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε δεν ορίζεται:

$$F(x)=\int_0^1 f(x)dx=\lim_{a\to 1^-}\left[\int_0^a f(t)dt\right]$$

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Αναλυτικά, υπολογίζουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Αριθμητικά, υπολογίζουμε το ίδιο ολοκλήρωμα:

1η προσέγγιση (1 σημείο):

$$\int_0^1 x^2 dx \approx f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \approx \frac{1}{4}$$

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Αριθμητικά, υπολογίζουμε το ίδιο ολοκλήρωμα:

1η προσέγγιση (1 σημείο):

$$\int_0^1 x^2 dx \approx f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1 \approx \frac{1}{4}$$

2η προσέγγιση (3 σημεία):

$$\int_0^1 x^2 dx \approx f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} \approx 0.3125$$

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Αριθμητικά, υπολογίζουμε το ίδιο ολοκλήρωμα:

1η προσέγγιση (1 σημείο):

$$\int_0^1 x^2 dx \approx f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

2η προσέγγιση (3 σημεία):

$$\int_0^1 x^2 dx \approx f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = 0.3125$$

Αριθμητική Ολοκλήρωση

Δοκιμάζουμε τώρα να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα χωρίζοντας το σε τέσσερα κομμάτια:

3η προσέγγιση (5 σημεία):

$$\int_0^1 x^2 dx \approx f\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{7}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{4} = 0.3281$$

Αλγόριθμος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Συνάρτηση ολοκλήρωσης: $f(x)$

Μήκος διαστήματος: $\dfrac{b-a}{N} = \Delta x$

Αλγόριθμος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Συνάρτηση ολοκλήρωσης: $f(x)$

Μήκος διαστήματος: $\dfrac{b-a}{N} = \Delta x$

Αλγόριθμος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Συνάρτηση ολοκλήρωσης: $f(x)$

Μήκος διαστήματος: $\dfrac{b-a}{N}=\Delta x$

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση *f(x)* στο μέσο των *N* διαστημάτων *Δx*

Αλγόριθμος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Συνάρτηση ολοκλήρωσης: $f(x)$

Μήκος διαστήματος: $\frac{b-a}{N} = \Delta x$

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση *f(x)* στο μέσο των *N* διαστημάτων *Δx*

Αθροίζουμε τα παραπάνω, πολλαπλασιάζοντας επί το μήκος *Δx*, και υπολογίζουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα.

Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης

Έστω μια καμπύλη $y = f(x)$

Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης

Έστω μια καμπύλη $y = f(x)$

Το στοιχειώδες μήκος επάνω στην καμπύλη είναι:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης

Έστω μια καμπύλη $y = f(x)$

Το στοιχειώδες μήκος επάνω στην καμπύλη είναι:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Υπολογίζουμε το μήκος ως εξής:

$$L = \sum \Delta x = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης: Εφαρμογή

Δοκιμάζουμε την παραπάνω μέθοδο στον κύκλο (για το πρώτο τεταρτημόριο):

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

Παραγωγίζουμε ως προς *x*:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης: Εφαρμογή

Δοκιμάζουμε την παραπάνω μέθοδο στον κύκλο (για το πρώτο τεταρτημόριο):

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$$

Παραγωγίζουμε ως προς *x*: $$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Άρα το μήκος του κύκλου είναι:

$$L = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\left[\arcsin(x)\right]_0^1 = 4\left[\frac{\pi}{2}\right] = 2\pi$$

Υπολογισμός Μήκους Παραμετρικής Καμπύλης

Αν η καμπύλη είναι ορισμένη παραμετρικά:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

Υπολογισμός Μήκους Παραμετρικής Καμπύλης

Αν η καμπύλη είναι ορισμένη παραμετρικά:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

Υπολογίζουμε το μήκος της καμπύλης ως εξής:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \right] dt$$

Υπολογισμός Μήκους Παραμετρικής Καμπύλης: Εφαρμογή

Ολοκληρώνουμε την παραμετρική μορφή του κύκλου:

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

Υπολογισμός Μήκους Παραμετρικής Καμπύλης: Εφαρμογή

Ολοκληρώνουμε την παραμετρική μορφή του κύκλου:

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \right] dt = \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} \right] dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \left[\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \right] dt = a\int_0^{2\pi} \left[\sqrt{1} \right] dt = 2\pi a$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης Σε Πολικές Συντεταγμένες

Αν έχουμε μια καμπύλη της μορφής $r = r(\theta)$

Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις μετασχηματισμού και έχουμε:

$$x = r(\theta)\cos\theta$$
$$y = r(\theta)\sin\theta$$

Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης Σε Πολικές Συντεταγμένες

Αν έχουμε μια καμπύλη της μορφής $r = r(\theta)$

Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις μετασχηματισμού και έχουμε:

$$x = r(\theta)\cos\theta$$

$$y = r(\theta)\sin\theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} \right] d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} \right] d\theta$$

Επιφάνεια Μεταξύ Δύο Καμπυλών

Έστω δύο καμπύλες $f(x), g(x)$

Η επιφάνεια μεταξύ των δύο καμπυλών είναι:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

Επιφάνεια Μεταξύ Δύο Καμπυλών: Εφαρμογή

Έστω δύο καμπύλες
$$\begin{matrix} f(x) = \sin x \\ g(x) = \cos x \end{matrix} \quad , \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Επιφάνεια Μεταξύ Δύο Καμπυλών: Εφαρμογή

Έστω δύο καμπύλες $\begin{matrix} f(x) = \sin x \\ g(x) = \cos x \end{matrix}$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

Το εμβαδό της επιφάνειας που περικλείουν οι δύο καμπύλες είναι

$$E = \int_0^{\pi/2} \left| f(x) - g(x) \right| dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \big(g(x) - f(x)\big) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \big(f(x) - g(x)\big) dx$$

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Λουκάς Βλάχος. «Γενικά Μαθηματικά Ι». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης
Θεσσαλονίκη, 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΗΜΕΙΏΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.