



# Γενικά Μαθηματικά I

**Ενότητα 19:** Υπολογισμός Εμβαδού και Όγκου  
Από Περιστροφή (2<sup>ο</sup> Μέρος)

Λουκάς Βλάχος  
Τμήμα Φυσικής



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Υπολογισμός Εμβαδού Σε Πολικές Συντεταγμένες

Θυμίζουμε ότι υπολογίζουμε το εμβαδό που ορίζεται από μια καμπύλη σε πολικές συντεταγμένες, ως εξής:

$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) d\theta$$



# Υπολογισμός Εμβαδού Σε Πολικές Συντεταγμένες: Εφαρμογή 1

Υπολογίζουμε το εμβαδό καρδιοειδούς:  $r(\theta) = 1 - \cos \theta$   
(μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο)



# Υπολογισμός Εμβαδού Σε Πολικές Συντεταγμένες: Εφαρμογή 1

Υπολογίζουμε το εμβαδό καρδιοειδούς:  $r(\theta) = 1 - \cos \theta$   
(μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{3\pi}{8} - 1 \end{aligned}$$



# Υπολογισμός Εμβαδού Σε Πολικές Συντεταγμένες: Εφαρμογή 2

Υπολογίζουμε το εμβαδό της καμπύλης:  $r(\theta) = \cos(2\theta)$



# Υπολογισμός Εμβαδού Σε Πολικές Συντεταγμένες: Εφαρμογή 2

Υπολογίζουμε το εμβαδό της καμπύλης:  $r(\theta) = \cos(2\theta)$

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos(2\theta)]^2 d\theta$$





# Υπολογισμός Εμβαδού Σε Πολικές Συντεταγμένες: Εφαρμογή 3

Να βρείτε την επιφάνεια μεταξύ του καρδιοειδούς  $r = 4 + 4\cos\theta$   
και του κύκλου  $r = 6$ .



# Υπολογισμός Εμβαδού Σε Πολικές Συντεταγμένες: Εφαρμογή 3

Να βρείτε την επιφάνεια μεταξύ του καρδιοειδούς  $r = 4 + 4\cos\theta$  και του κύκλου  $r = 6$ .

$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(4 + 4\cos\theta)^2 - 6^2] d\theta$$



# Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης

## Εφαρμογή: Έργο

Μας δίνεται η τροχιά που ακολουθεί ένα σημείο, και η δύναμη που ασκείται στο σημείο. Υπολογίστε το έργο της δύναμης για την κίνηση αυτή, αν:

$$F(x) = kx$$

$$y = y(x)$$



# Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης

## Εφαρμογή: Έργο

Μας δίνεται η τροχιά που ακολουθεί ένα σημείο, και η δύναμη που ασκείται στο σημείο. Υπολογίστε το έργο της δύναμης για την κίνηση αυτή, αν:

$$F(x) = kx$$

$$y = y(x)$$

Το στοιχειώδες έργο θα είναι

$$dW = F(x)ds = F(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$\Rightarrow W = \int_a^b dW = \int_a^b F(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



# Υπολογισμός Όγκου Στερεού Από Περιστροφή Καμπύλης

Θυμίζουμε: αν περιστρέψουμε μια καμπύλη  $y = f(x)$  γύρω από τον άξονα  $Ox$ , ο στοιχειώδης όγκος του στερεού που προκύπτει θα είναι:

$$dV = (\pi y^2) dx$$

Βρίσκουμε τον όγκο του στερεού από περιστροφής, ολοκληρώνοντας:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b (\pi y^2) dx$$



# Υπολογισμός Όγκου Στερεού Από Περιστροφή Καμπύλης: Εφαρμογή

Υπολογίστε τον όγκο του κώνου, που προκύπτει από την περιστροφή της ευθείας που τέμνει τον άξονα  $y$  στο σημείο  $h$ , και τον άξονα  $x$  στο σημείο  $a$  γύρω από τον άξονα  $y$ .



# Υπολογισμός Όγκου Στερεού Από Περιστροφή Καμπύλης: Εφαρμογή

Υπολογίστε τον όγκο του κώνου, που προκύπτει από την περιστροφή της ευθείας που τέμνει τον άξονα  $y$  στο σημείο  $h$ , και τον άξονα  $x$  στο σημείο  $a$ , γύρω από τον άξονα  $y$ .

Στοιχειώδης όγκος: 
$$dV = (\pi x^2) dy$$



# Υπολογισμός Όγκου Στερεού Από Περιστροφή Καμπύλης: Εφαρμογή

Υπολογίστε τον όγκο του κώνου, που προκύπτει από την περιστροφή της ευθείας που τέμνει τον άξονα  $y$  στο σημείο  $h$ , και τον άξονα  $x$  στο σημείο  $a$ , γύρω από τον άξονα  $y$ .

Στοιχειώδης όγκος:  $dV = (\pi x^2) dy$

$$dV = \pi x^2 \left( -\frac{h}{a} dx \right) \Rightarrow V = -\frac{\pi h}{a} \int_{-a}^0 x^2 dx$$

$$= -\frac{\pi h}{a} \left[ -\frac{a^3}{3} \right] = \frac{\pi h a^2}{3}$$





# Υπολογισμός Όγκου Στερεού: Η Μέθοδος Των Φλοιών

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε όγκο στερεού από περιστροφή, δημιουργώντας φλοιούς, με απόσταση  $dx$  μεταξύ τους.

Σε αυτήν την περίπτωση, ο στοιχειώδης όγκος θα είναι

$$dV = 2\pi xy dx$$



# Υπολογισμός Επιφάνειας Από Περιστροφή Καμπύλης

Περιστρέφοντας μια καμπύλη γύρω από τον άξονα  $Ox$ , η στοιχειώδης επιφάνεια που προκύπτει θα είναι:

$$\begin{aligned}dA &= 2\pi y(x) dS \\ &= 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx\end{aligned}$$

Βρίσκουμε την επιφάνεια ολοκληρώνοντας :

$$A = \int_a^b dA$$



# Υπολογισμός Επιφάνειας Από Περιστροφή Καμπύλης: Εφαρμογή

Υπολογίζουμε την επιφάνεια μιας σφαίρας από περιστροφή της καμπύλης

$$x^2 + y^2 = a^2 \xrightarrow{\text{πολικές}} r = a$$

Η επιφάνεια της σφαίρας, σε πολικές συντεταγμένες, θα είναι:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi a^2 [-\cos \theta]_0^{\pi/2} = 2\pi a^2 \end{aligned}$$



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, **Λουκάς Βλάχος**.  
«**Γενικά Μαθηματικά Ι**». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη  
δικτυακή διεύθυνση: [http://opencourses.auth.gr/eclass\\_courses](http://opencourses.auth.gr/eclass_courses).



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

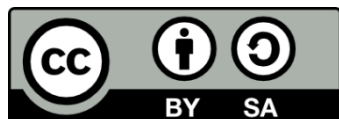
[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Νικόλαος Τρυφωνίδης  
Θεσσαλονίκη, 2015



**ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ**

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

