



# Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική

Ενότητα 3<sup>η</sup>: Τυχαίες Μεταβλητές, Συναρτήσεις Κατανομής  
Πιθανότητας.

Γεώργιος Ζιούτας

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Α.Π.Θ.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ  
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



# Τυχαίες Μεταβλητές, Συναρτήσεις Κατανομής Πιθανότητας.

# Περιεχόμενα ενότητας

1. Έννοια Τυχαίας Μεταβλητής.
2. Συναρτήσεις Μάζας ή Πυκνότητας Πιθανότητας.
  - i. Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή
  - ii. Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή
3. Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας
  - i. Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή
  - ii. Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή
  - iii. Ιδιότητες Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής  $F(x)$
4. Μικτή Τυχαία Μεταβλητή



# 6<sup>η</sup> Διάλεξη

---



# Ασκήσεις

## Άσκηση 2

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(x > 1) &= 1 - P(x \leq 1) = \\ &= 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-1}) = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

## Άσκηση 3

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & , 0 < x < 2 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + 0 = 1 \Leftrightarrow c \int_{-\infty}^{+\infty} (4x - 2x^2) dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c \left[ 2x^2 - 2 \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow c \left[ 8 - \frac{16}{3} \right] = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{8}$$

$$P(x > 1) = \int_1^{+\infty} f(x) dx = \frac{3}{8} \int_1^2 (4x - 2x^2) dx = \frac{3}{8} \left[ 2x^2 - 2 \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2}$$



## Άσκηση 4

α) Να βρεθούν οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta$  για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

1<sup>η</sup> Εξίσωση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \Rightarrow \int_0^{12} a \cdot t^2 dt + \int_{12}^{16} \beta dt + \int_{16}^{+\infty} 0 dt = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{12} + [\beta \cdot t]_{12}^{16} = 1 \Leftrightarrow$$

2<sup>η</sup> Εξίσωση

$$\Leftrightarrow a \cdot \frac{12^3}{3} + 4\beta = 1$$

$$\frac{\beta \cdot 12}{3} + 4 \cdot \beta = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\beta + 12\beta = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{1}{8}$$

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \frac{12^3}{3} + 4\beta &= 1 \\ \beta &= \frac{1}{8} = 0,125 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\beta}{12^2} = \frac{1}{8 \cdot 12^2} = \frac{1}{1152} \end{aligned} \right\}$$





β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα  $x > 6$ ,  $P(x > 6) = ?$

1<sup>ος</sup> τρόπος

$$\begin{aligned} P(x > 6) &= 1 - P(x \leq 6) = 1 - \frac{1}{1152} \int_0^6 t^2 dt = \\ &= 1 - \frac{1}{1152} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^6 = 1 - \frac{1}{1152} \cdot \frac{6^3}{3} = 0,9375 \end{aligned}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

$$P(x > 6) = \int_6^{12} \frac{1}{1152} \cdot t^2 dt + \int_{12}^{16} \frac{1}{8} dt = \dots = 0,9375$$



## Άσκηση 5

Δοθείσα της αθροιστικής συχνότητας να βρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{x^3}{4} + 0,5 & , -1 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Πάντοτε τη σχεδιάζουμε για να βρούμε τις ασυνέχειες για να μη παραγωγίσουμε, εκεί αντιστοιχούν μάζες πιθανότητας.



# 5\_συνέχεια...

$$\text{Για: } -1 < x < 1 \rightarrow \frac{d(F(x))}{dx} = \frac{3x^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Για: } x = -1 &\rightarrow P(x = -1) = P(x \leq 1) - P(x < -1) = \\ &= F(-1_{-}) - F(-1) = \left(-\frac{1}{4} + 0,5\right) - 0 = 0,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Για: } x = 1 &\rightarrow P(x = 1) = P(x \leq 1) - P(x < 1) = F(1) - F(1_{-}) = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + 0,5\right) = 1 - 0,75 = 0,25 \end{aligned}$$

Άρα:

$$f(x) = \begin{cases} P(x = -1) = 0,25 & , x = -1 \\ \frac{3x^2}{4} & , -1 < x < 1 \\ P(x = 1) = 0,25 & , x = 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$



# 5\_συνέχεια...

Για να διαπιστώσουμε αν όντως είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, πρέπει να δούμε αν ισχύουν οι ιδιότητες:

i) Είναι όντως θετική.

ii) Το άθροισμά της από το  $-\infty$  έως το  $+\infty$  είναι ίσο με τη μονάδα.

$$P(x = -1) = 0,25$$

$$\int_{-1}^1 \frac{3x^2}{4} dx = \frac{3}{4} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 1) = 0,25$$

Το άθροισμα ίσο με 1.



# Πρόβλημα 1

Δοθείσας της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας να υπολογιστεί η αθροιστική.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{1400} & ax & , 0 \leq x \leq 40 \\ \frac{70-x}{1050} & a_1x + b_1 & , 40 < x \leq 70 \\ 0 & & , x > 70 \text{ \_ και \_ } x < 0 \end{cases}$$



# Πρόβλημα 1 συνέχεια...

- Σχεδιάζουμε την  $f_X(x)$ .

Για να βρούμε την αθροιστική κατανομή ολοκληρώνουμε:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \frac{u}{1400} du = \frac{x^2}{2800} & 0 \leq x \leq 40 \\ \int_0^{40} \frac{u}{1400} du + \int_{40}^x \frac{70-u}{1050} du = \frac{4}{7} \left( \frac{70x}{1050} - \frac{x^2}{2100} \right) & 40 < x \leq 70 \\ 1, & x > 70 \end{cases}$$



# Πρόβλημα 1 συνέχεια...

Υπολογισμός Πιθανότητας μεταξύ 30 με 60.

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} P(30 < X < 60) &= F(60) - F(30) = \\ &= \frac{4}{7} + \left( \frac{70 - 60}{1050} - \frac{60^2}{2100} \right) - \frac{30^2}{2800} = \dots \end{aligned}$$



# Άσκηση 1 βιβλίου σελ. 158

Το άθροισμα δύο ζαριών:

$$\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

Όλα τα πιθανά ζεύγη =  $6^2 = 36$ :

$$P(X = 2) = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 3) = P\{(1,2), (2,1)\} = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 4) = P\{(1,3), (3,1), (2,2)\} = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 5) = P\{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\} = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 6) = P\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\} = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7) = P\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} = \frac{6}{36}$$

·  
·  
·



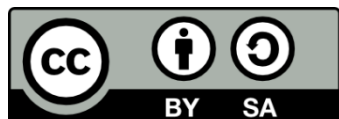




# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Καρανάσιος Αναστάσιος-  
Νικόλαος

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ