ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # **4**: Μονοπάτια και Κύκλοι

Ιωάννης Μανωλόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μονοπάτια και Κύκλοι

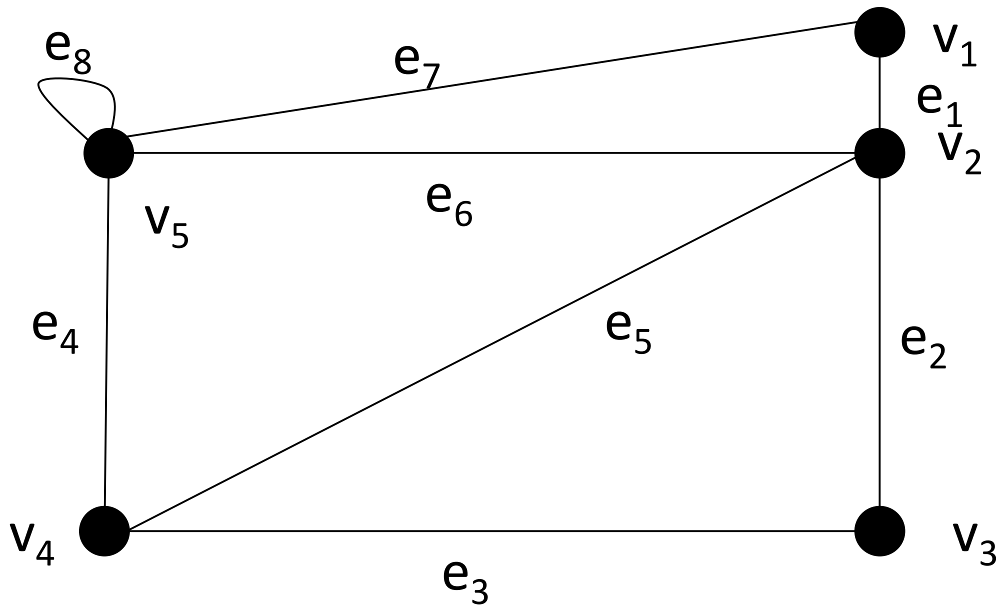
Euler

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγικές έννοιες

- **Περίπατος**-walk: μία ακολουθία $W=(v_1,e_1,v_2,e_2,\ldots,e_{i-1},v_i)$ από κορυφές και ακμές, που αρχίζει και τελειώνει με κορυφή, έτσι ώστε η ακμή ej να προσπίπτει στις κορυφές v_j και v_{j+1}, για $1\leq j<i$.
- **Ίχνος**-trail: ένας περίπατος όπου κάθε ακμή εμφανίζεται το πολύ μία φορά.
- **Μονοπάτι**-path: ένα ίχνος όπου μια κορυφή εμφανίζεται το πολύ μία φορά (δεν τέμνεται με τον εαυτό του και δεν περιέχει βρόχους).
- **Αρχή**-origin – **τέρμα**-terminus περιπάτου, ίχνους, μονοπατιού
- **Τερματικές**-terminal (αρχή+τέρμα) και **εσωτερικές**-internal κορυφές

Περίπατος, Ίχνος, Μονοπάτι – Παράδειγμα



Περίπατος: (v_1,e_2, v_3, e_3, v_4, e_5, v_2, e_2, v_3)

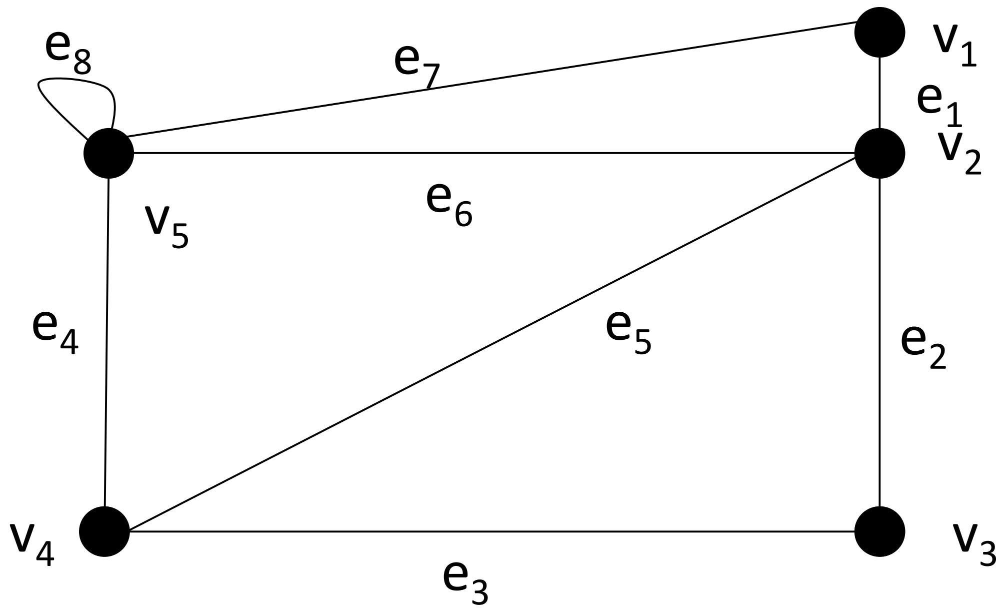
Ίχνος : (v_2,e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_5)

Μονοπάτι : (v_2,e_5, v_4, e_4, v_5)

Κύκλωμα, Κύκλος

- Αν αρχή=τέρμα: κλειστό ίχνος (**κύκλωμα**), κλειστό μονοπάτι (**κύκλος**)
- Αν αρχή<>τέρμα: ανοικτό ίχνος, μονοπάτι
- Κάθε κύκλος είναι κύκλωμα, ενώ κάθε κύκλωμα δεν είναι απαραίτητα κύκλος
- Τα δένδρα είναι άκυκλοι συνδεδεμένοι γράφοι, ενώ δάσος είναι ένας γράφος με δένδρα ως συνιστώσες

Κύκλωμα, Κύκλος – Παράδειγμα



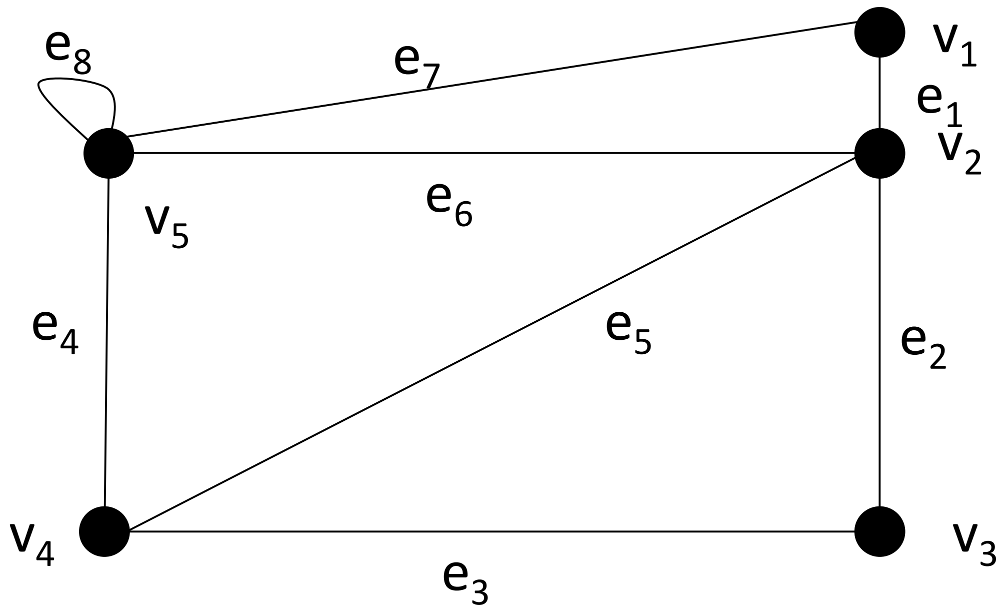
Κύκλωμα: $(v_2, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_1, v_2)$

Κύκλος: $(v_2, e_5, v_4, e_4, v_5, e_6, v_2)$

Συνδεσιμότητα

- Δύο μονοπάτια λέγονται **ξένα ως προς τις ακμές** – edge disjoint, αν δεν έχουν κάποια κοινή ακμή (παρότι μπορεί να τέμνονται).
- Δύο κορυφές ονομάζονται **συνδεδεμένες**- connected, αν υπάρχει κάποιο μονοπάτι από τη μια κορυφή προς την άλλη.
- Δεχόμαστε ότι κάθε κορυφή είναι συνδεδεμένη με τον εαυτό της.

Μονοπάτια Ξένα ως προς τις ακμές – Παράδειγμα



Μονοπάτια ξένα ως προς τις ακμές:

$(v_1, e_1, v_2, e_5, v_4)$

$(v_3, e_2, v_2, e_6, v_5)$

Απόσταση Ι

- **Μήκος** περιπάτου, ίχνους, μονοπατιού: πλήθος ακμών που περιλαμβάνονται
- Μονοπάτι μήκους n: P_n
- Ένας κύκλος μήκους k λέγεται άρτιος ή περιττός αν το k είναι άρτιο ή περιττό, αντιστοίχως
- **Γεωδεσικό**-geodesic μονοπάτι μεταξύ δύο κορυφών είναι το

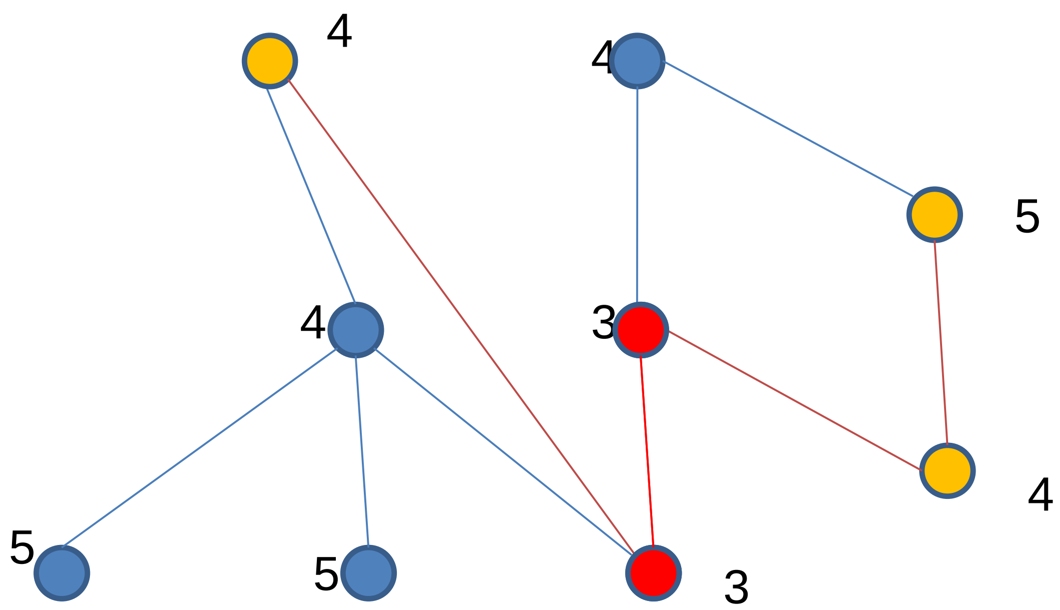
Απόσταση II

- **Απόσταση** dist(u,v) μεταξύ των κορυφών u,v είναι το μήκος του αντίστοιχου γεωδεσικού μονοπατιού
- Ιδιότητες απόστασης
  - Μη αρνητικότητα: dist(u,v)>0
    [dist(u,v)=0, αν και μόνο αν u=v]
  - Συμμετρική: dist(u,v)=dist(v,u)
  - Ανισοϊσότητα τριγώνου: dist(u,v)+dist(v,z)≥dist(u,z)

Εκκεντρικότητα

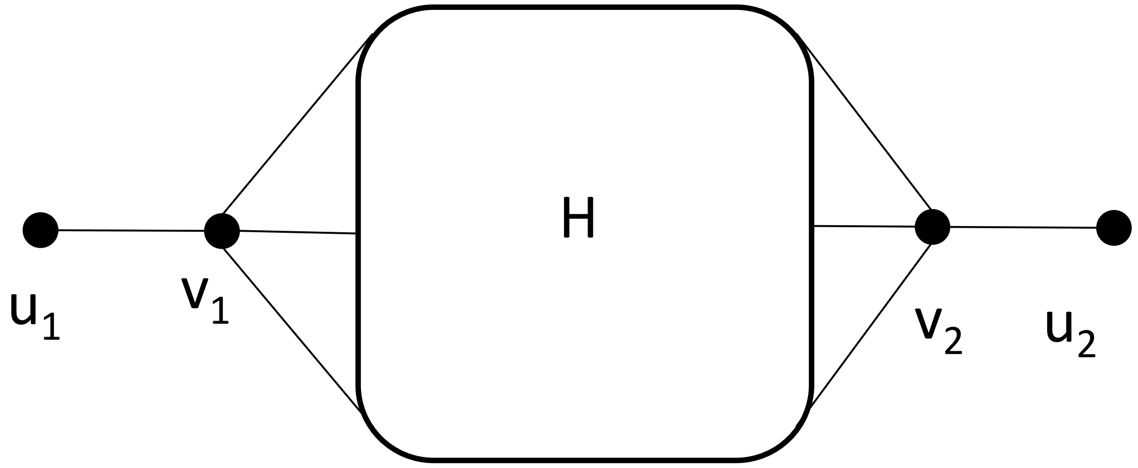
- **Εκκεντρικότητα**-eccentricity μιας κορυφής v: η απόσταση από την κορυφή v προς την πλέον απομακρυσμένη κορυφή του γράφου
$$ecc(v) = \max\big(dist(v, u)\big), \forall u \in V(G)$$
- **Κεντρική**-central κορυφή λέγεται η κορυφή v με την ελάχιστη εκκεντρικότητα $ecc(v) = rad(G)$
- **Κέντρο**-center ενός συνδεδεμένου γράφου G ονομάζεται ο υπογράφος που επηρεάζεται από το σύνολο των κορυφών του G με την ελάχιστη εκκεντρικότητα

Παράδειγμα Εκκεντρικότητας



Θεώρημα 1ο (Ι)

Κάθε γράφος είναι κέντρο ενός συνδεδεμένου γράφου



Θεώρημα 1ο (ΙΙ)

- Δοθέντος γράφου H, κατασκευάζουμε υπεργράφο G, όπου οι v_1 και v_2 ενώνονται προς όλες τις κορυφές του H. Στο γράφο G, η εκκεντρικότητα κάθε κορυφής $v \in H$ είναι $E(v)=2$, ενώ ακόμη ισχύει $E(v_1)=E(v_2)=3$ και $E(u_1)=E(u_2)=4$. Συνεπώς ο υπογράφος H είναι κέντρο του γράφου G.

Ακτίνα, Διάμετρος

- **Ακτίνα**: η εκκεντρικότητα των κορυφών του κέντρου
$$rad(G) = \min\big(E(v)\big), \forall v \in V(G)$$
- **Διάμετρος**: η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών
$$diam(G) = \max\big(E(V)\big), \forall v \in V(G)$$

Θεώρημα 2ο

- rad(G) ≤ diam(G) ≤ 2rad(G)

Η αριστερή ανισοϊσότητα είναι προφανής εξ ορισμού.

Για να αποδείξουμε τη δεξιά ανισοϊσότητα ας θεωρήσουμε δύο κορυφές x,y∈V(G) έτσι ώστε dist(x,y)=diam(G).

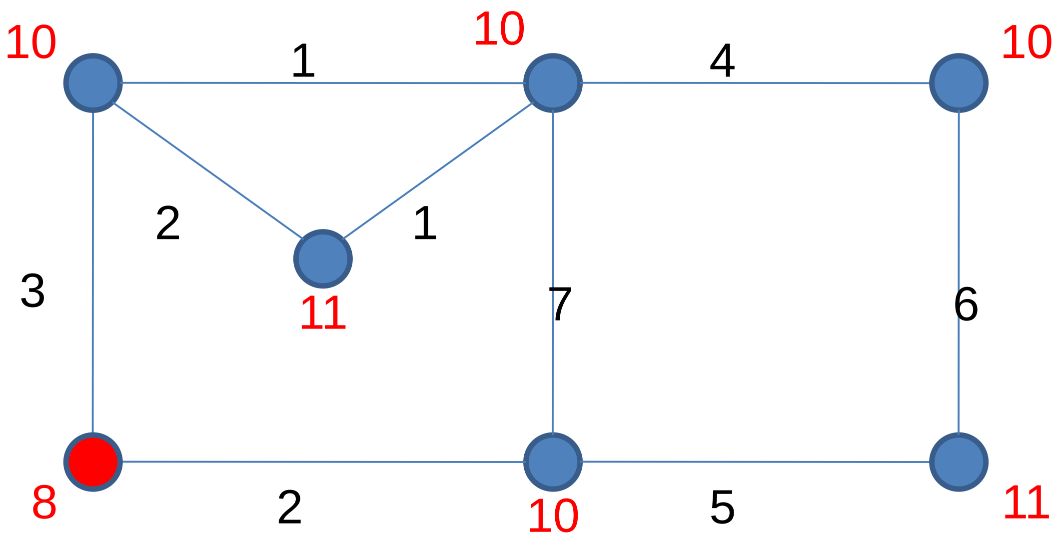
Επιπλέον, έστω ότι μία κορυφή z, όπου το μεγαλύτερο γεωδεσικό μονοπάτι από την z να έχει ακτίνα rad(G). Με βάση την ανισοϊσότητα τριγώνου

$$diam(G) = dist(x, y) \leq dist(x, z) + dist(z, y) \\ \leq 2rad(G)$$

Περιφέρεια

- **Περιφερειακή**-peripheral κορυφή λέγεται η κορυφή v με τη μέγιστη εκκεντρικότητα $ecc(v) = diam(G)$
- **Περιφέρεια**-periphery ενός γράφου λέγεται ο υπογράφος που επηρεάζεται από το σύνολο των περιφερειακών κορυφών

Εφαρμογή σε ζυγισμένο γράφο (Περιφέρεια)



Μία κρατική υπηρεσία πρέπει να τοποθετηθεί στο κέντρο μίας αστικής περιοχής. Που είναι αυτό;

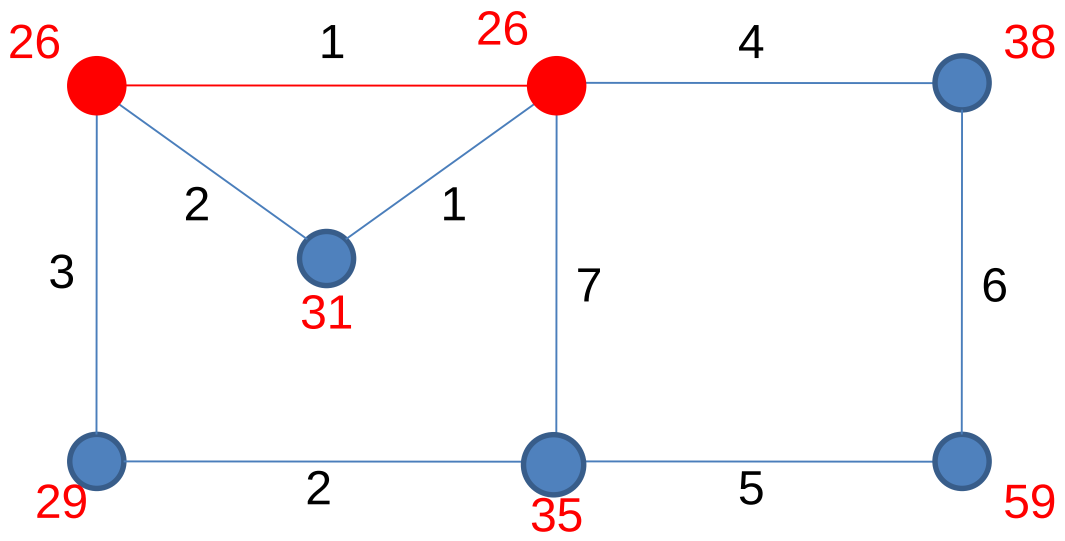
Μέσο γράφου

- **Απόσταση** μιας κορυφής v, dist(v), ζυγισμένου γράφου G ονομάζουμε το άθροισμα των αποστάσεων της κορυφής v από όλες τις υπόλοιπες κορυφές του G.
- **Μεσαία**-median κορυφή λέγεται η κορυφή v με την ελάχιστη απόσταση
- **Μέσο**-median ενός γράφου είναι ο υπογράφος που επηρεάζεται από το σύνολο των μεσαίων κορυφών.

Εφαρμογή σε ζυγισμένο γράφο (Μέσο) Ι

- Από το κεντρικό ταχυδρομείο η αλληλογραφία μεταφέρεται με ένα όχημα στα περιφερειακά γραφεία, και από εκεί με τους διανομείς στις κατοικίες. Το όχημα μεταφέρει την αλληλογραφία ενός μόνο περιφερειακού γραφείου κάθε φορά. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των αποστάσεων που το όχημα πρέπει να καλύψει από το κεντρικό προς το σύνολο των περιφερειακών γραφείων.

Εφαρμογή σε ζυγισμένο γράφο (Μέσο) ΙΙ



Wiener index

- Ο δείκτης Wiener (από τον Harry Wiener, 1947) ενός γράφου G δίνεται από τη σχέση:

$$D(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d_G(u, v)$$

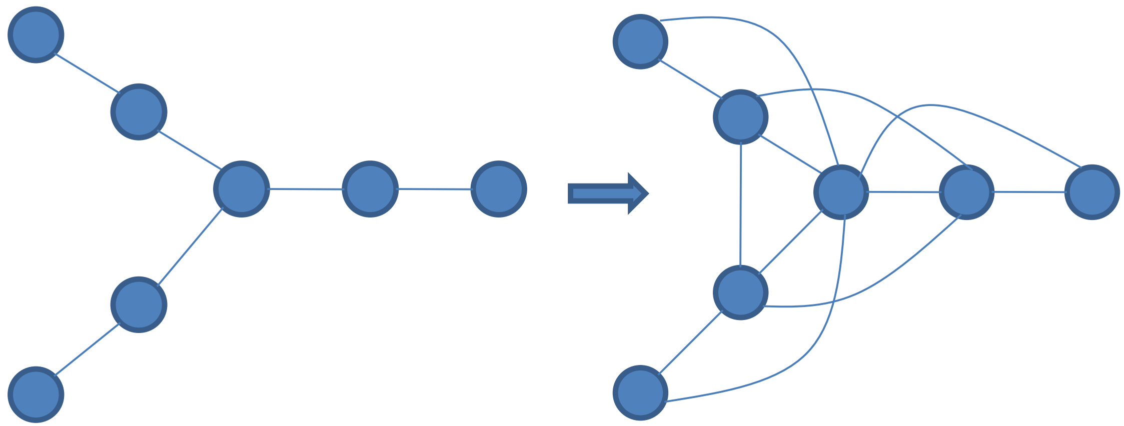
- Μεταξύ των δένδρων με n κορυφές, ο Wiener index D(T) ελαχιστοποιείται για τους αστεροειδείς και μεγιστοποιείται για τα μονοπάτια.
- Ο δείκτης χρησιμοποιείται στη Χημική Θεωρία Γράφων για τη μοριακή διακλάδωση (molecular branching)

Δύναμη γράφου I

- Η n-οστή δύναμη ενός γράφου G(V,E) είναι ένας γράφος που συμβολίζεται με Gn και αποτελείται από το ίδιο σύνολο κορυφών V, ενώ δύο κορυφές u και v ενώνονται με μία ακμή στον Gn, αν για τις κορυφές αυτές στο γράφο G ισχύει η σχέση:

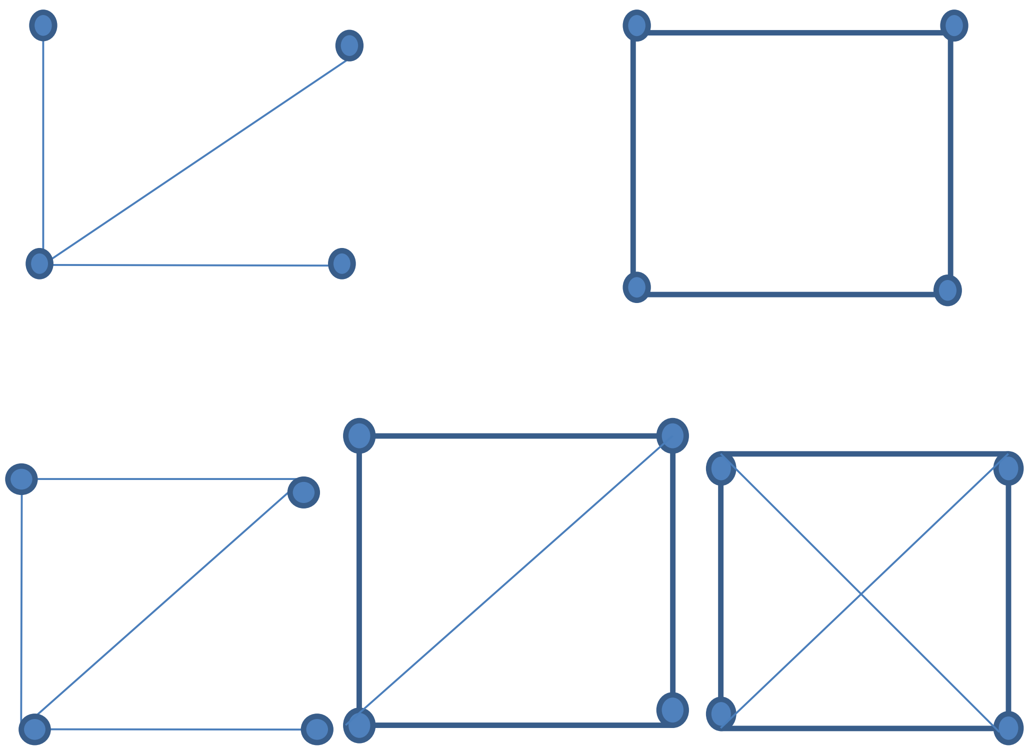
$$1 \leq dist(u, v) \leq n$$

Δύναμη γράφου ΙΙ



Τι εκφράζει ο πίνακας γειτνίασης A του G^n ;

Ρίζα γράφου



- Ένας γράφος H είναι n-οστή ρίζα ενός γράφου G αν ισχύει $H^n=G$ ή $H=G^{1/n}$.
- Οι τετραγωνικές ρίζες του K_4 είναι οι εξής:

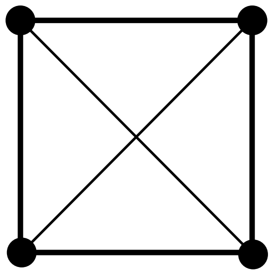
Τετραγωνική ρίζα γράφου

- Θεώρημα: Ένας συνδεδεμένος γράφος G τάξης p με $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$ έχει μία τετραγωνική ρίζα αν και μόνο αν περιέχει μία συλλογή από πλήρεις υπογράφους $G_1,G_2,\ldots,G_p$ έτσι ώστε
  1. $\cup E(G_i)= E(G)$
  2. ο G_i περιέχει την κορυφή v_i, και
  3. ο G_i περιέχει την κορυφή v_j αν και μόνο αν ο G_j περιέχει την v_i.

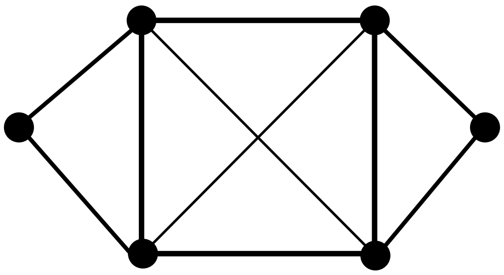
Γράφοι Euler

- **Leonard Euler**, Ελβετός, πατέρας Θεωρίας Γράφων, πρόβλημα γεφυρών Koenigsburg (1736)
- Πρόβλημα: είναι δυνατόν σε κάθε γράφο να βρεθεί κύκλωμα (=κλειστό ίχνος) που να περνά από όλες τις ακμές;
- **Γράφος Euler**: περιέχει γραμμή Euler
- **Γράφος ημι-Euler**: περιέχει ανοικτό ίχνος Euler

Γράφοι Euler – Παραδείγματα Ι

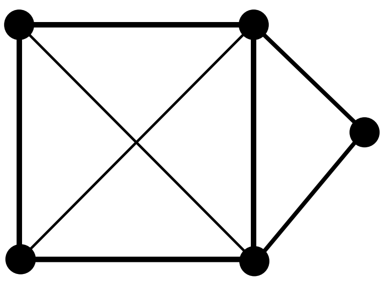


όχι γράφος Euler
ή ημι-Euler

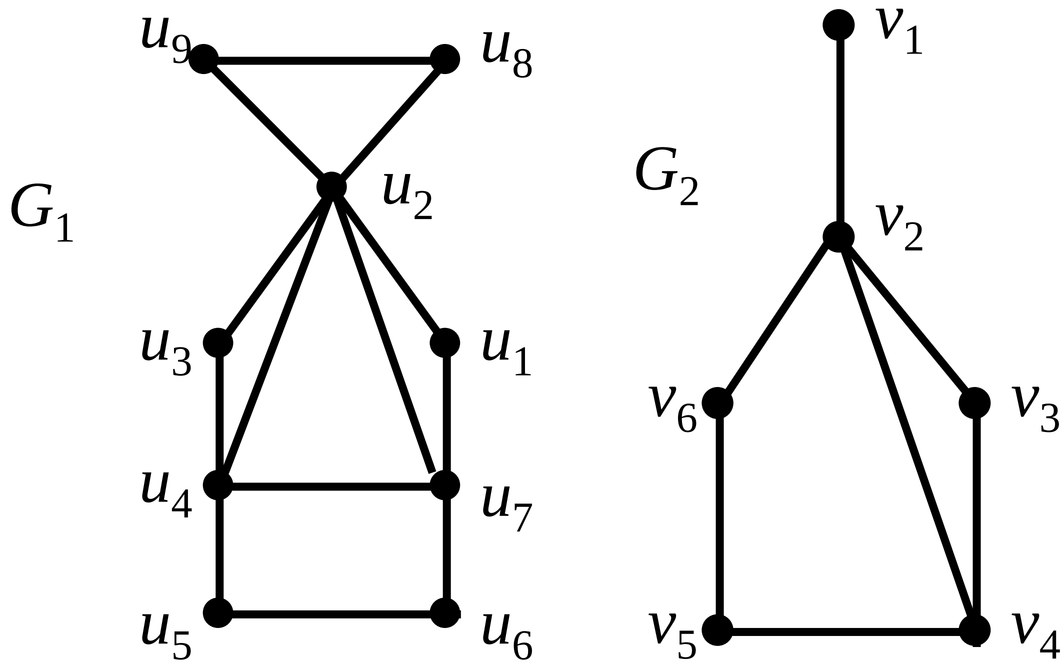


γράφος Euler

ημι-Euler

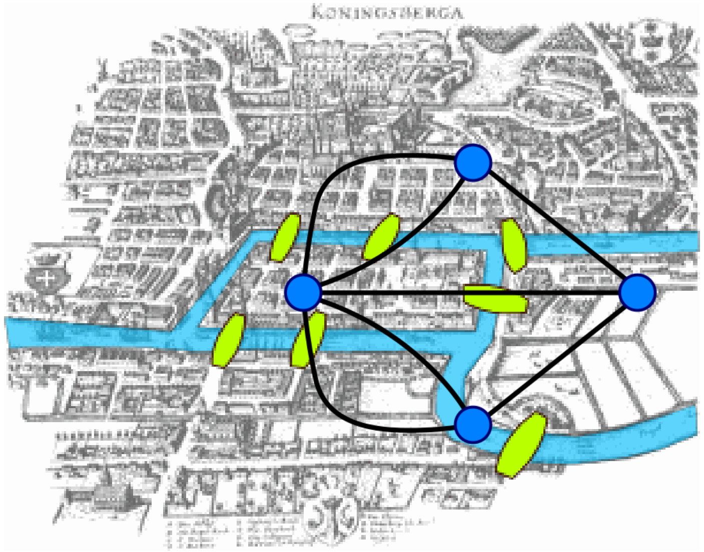


Γράφοι Euler – Παραδείγματα ΙΙ

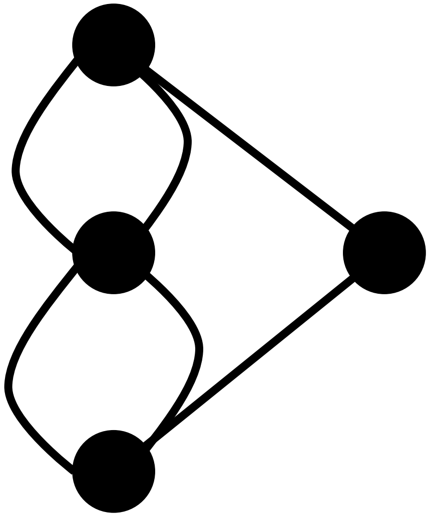


Οι γράφοι G_1, G_2 είναι Eulerian, ημι-Eulerian ;

Γέφυρες του Koenigsberg



Εικόνα 1



Συνθήκες για γράφους Euler

- **Θεώρημα**: Ένας συνδεδεμένος απλός γράφος G(V,E) είναι γράφος Euler αν και μόνο αν δεν έχει κορυφές περιττού βαθμού. Είναι γράφος ημι-Euler αν και μόνο αν έχει ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού.

Οι συνθήκες είναι αναγκαίες γιατί προφανώς αν υπάρχει ένα ίχνος Euler, τότε ο γράφος πρέπει να είναι συνδεδεμένος και ο αριθμός των κορυφών περιττού βαθμού να είναι 0 (αντίστοιχα 2). Σε διαφορετική περίπτωση δεν θα υπήρχε δυνατότητα να περάσει ένα ίχνος από όλες τις ακμές (από μία τουλάχιστο θα περνούσε δύο φορές, οπότε δεν θα ήταν ίχνος).

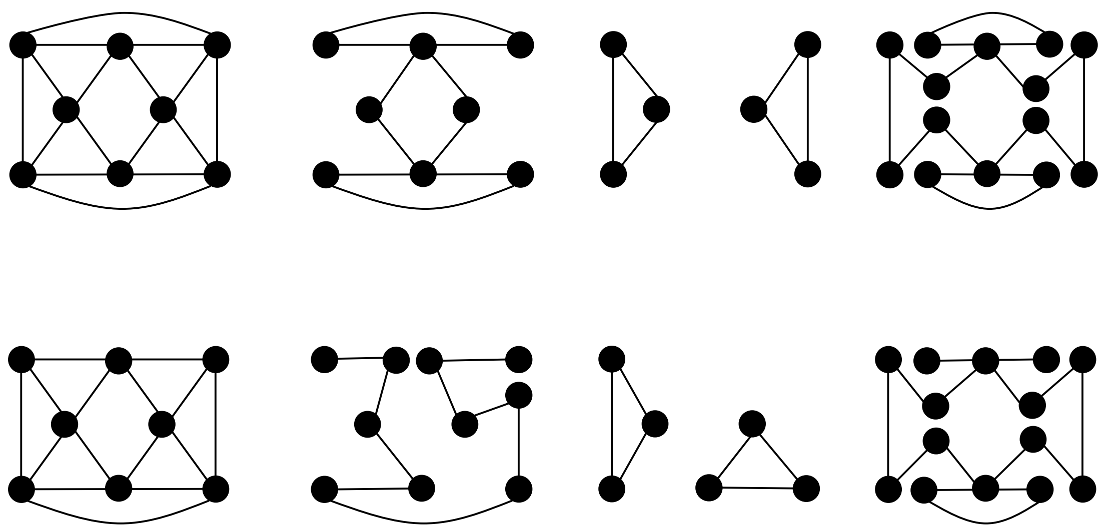
Απόδειξη

Οι συνθήκες είναι και ικανές γιατί:

Ισχύουν προφανώς για |E|=2. Έστω ότι ισχύουν και για |E|>2.

Ας θεωρήσουμε έναν περίπατο W ξεκινώντας από μία κορυφή vi. Έστω ότι ο περίπατος W θέλουμε να περνά από διάφορες κορυφές, έως ότου φτάσει σε μία κορυφή vj χωρίς αχρησιμοποίητες ακμές (θεωρούμε $v_i=v_j$ αν δεν υπάρχει κορυφή περιττού βαθμού). Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν αχρησιμοποίητες ακμές. Αν αγνοηθούν οι χρησιμοποιημένες ακμές, τότε απομένει ένας υπογράφος G΄ που δεν είναι απαραίτητα συνδεδεμένος. Άρα ο υπογράφος G΄ περιέχει μόνο κορυφές άρτιου βαθμού και σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής κάθε συνιστώσα του περιέχει ένα ίχνος Euler. Εφόσον ο γράφος G είναι συνδεδεμένος πρέπει ο περίπατος W να περνά τουλάχιστον από μία κορυφή κάθε συνιστώσας του G΄.
Συνεπώς, μπορεί να κατασκευασθεί ένα ίχνος Euler για το γράφο G εισάγοντας στον περίπατο και τα ίχνη των συνιστωσών του υπογράφου

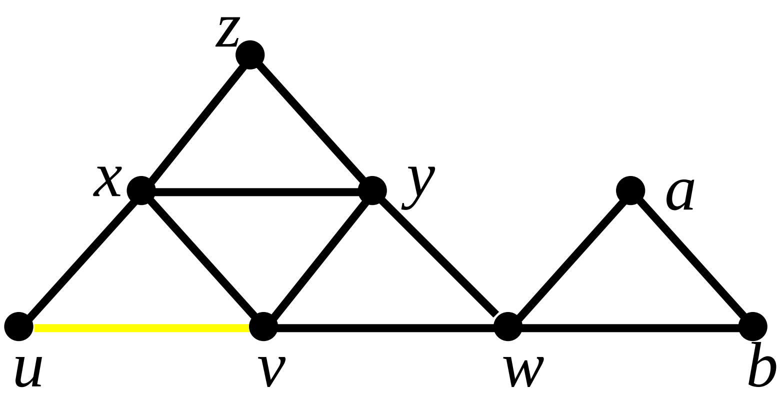
Κατασκευή με βάση την απόδειξη



Έλεγχος γράφου Euler

- Για να διαπιστώσουμε αν ένας γράφος είναι Eulerian ελέγχουμε
  1. αν είναι συνδεδεμένος
  2. αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.
- Πως γίνεται αυτό αλγοριθμικά και με τι πολυπλοκότητα;

Θεώρημα 3ο

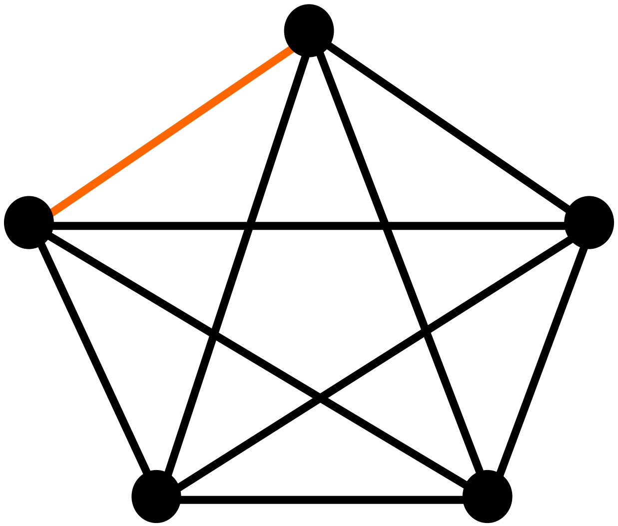


C_1: u, v, x, u
C_2: u, v, y, x, u
C_3: u, v, y, z, x, u
C_4: u, v, w, y, z, x, u
C_5: u, v, w, y, x, u

- Ένας συνδεδεμένος απλός γράφος G είναι γράφος Euler αν και μόνο αν κάθε ακμή ανήκει σε περιττό αριθμό κύκλων.
- Είναι ο γράφος Eulerian; Σε πόσους κύκλους ανήκει η ακμή u,v ;

Παράδειγμα – Άσκηση

- Σε πόσους κύκλους ανήκει κάθε ακμή του K_n ;
- C_3:?
- C_4:?
- C_5:?
- Σύνολο:?



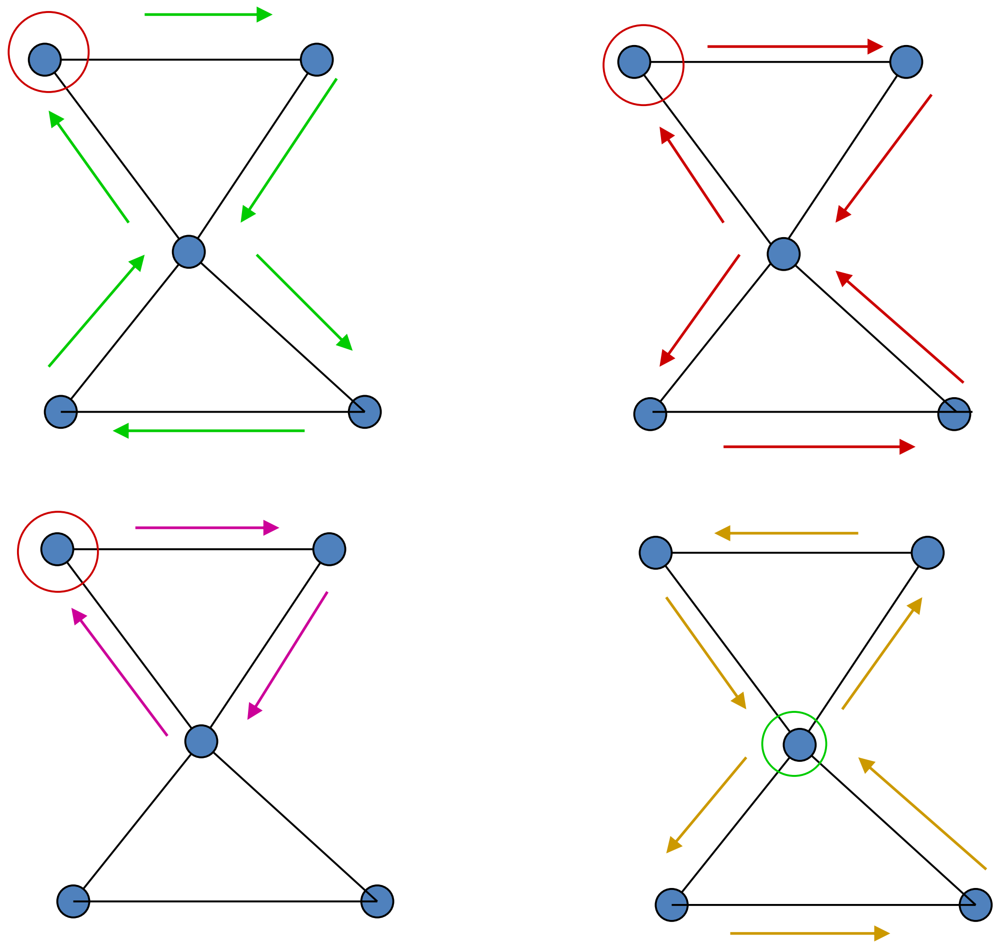
Αλγόριθμοι εύρεσης ίχνους Euler I

- Απλοϊκή μέθοδος: Ξεκινούμε από τυχούσα κορυφή και πηγαίνουμε σε τυχούσα ακμή που δεν έχει ακόμη εξετασθεί.
- Δεν υπάρχει εγγύηση ότι έτσι μπορούμε πάντα να βρούμε ένα ίχνος Euler.
- Ένας γράφος ονομάζεται **αυθαίρετα εξιχνιάσιμος από την κορυφή v**, αν είναι βέβαιο ότι μπορούμε να σχηματίσουμε ένα ίχνος Euler από την κορυφή αυτή.

Γράφος αυθαίρετα εξιχνιάσιμος Ι

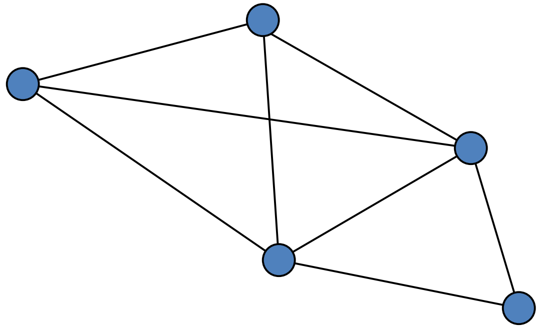
- Ένας Eulerian γράφος λέγεται αυθαίρετα εξιχνιάσιμος από την κορυφή v αν

1. Ξεκινούμε από την κορυφή v.
2. Επιλέγουμε τυχούσα ακμή αν υπάρχουν πολλές επιλογές.
3. Τελικά επιστρέφουμε στη v.

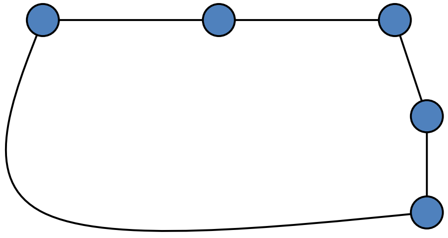


Γράφος αυθαίρετα εξιχνιάσιμος ΙΙ

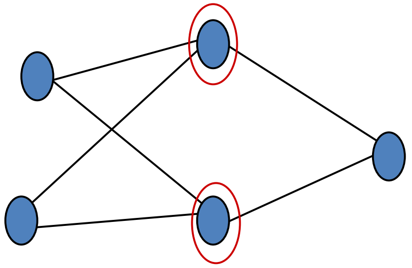
- Όχι αυθαίρετα εξιχνιάσιμος



- Αυθαίρετα εξιχνιάσιμος από όλες τις κορυφές



- Αυθαίρετα εξιχνιάσιμος από 2 κορυφές

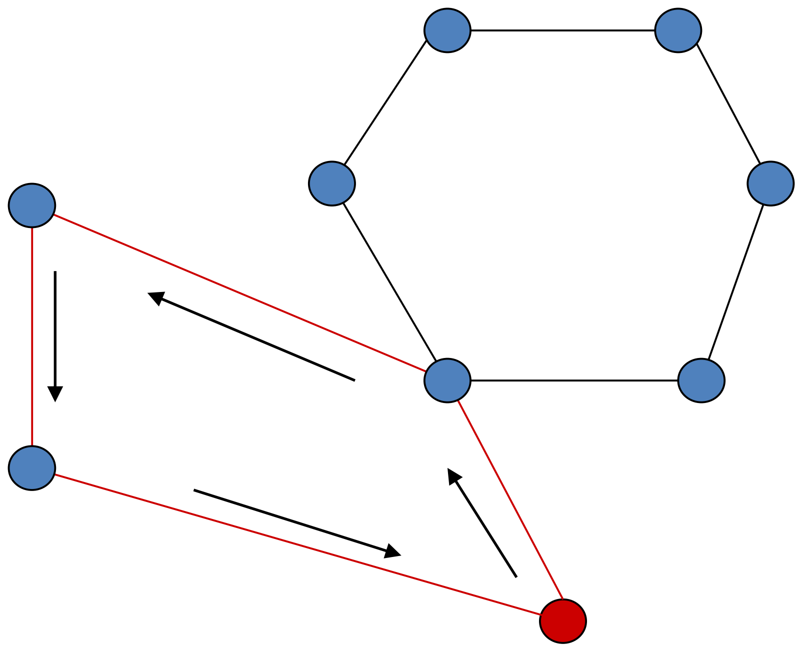


Γράφος αυθαίρετα εξιχνιάσιμος ΙΙΙ

- Ένας Eulerian γράφος G είναι αυθαίρετα εξιχνιάσιμος από μία κορυφή v αν και μόνο αν κάθε κύκλος του G περνά από την v.
  - Έστω ότι αυτοί οι κύκλοι είναι $c_1, c_2, .., c_k$.
  - Ξεκινώντας από τη v, αυθαίρετα επιλέγουμε ένα κύκλο, τον ακολουθούμε και επιστρέφουμε στη v.
  - Επιλέγουμε έναν άλλο κύκλο και συνεχίζουμε.
  - Συνεπώς, ο γράφος G είναι αυθαίρετα εξιχνιάσιμος.

Γράφος αυθαίρετα εξιχνιάσιμος IV

- Έστω ότι ένας Eulerian γράφος G είναι αυθαίρετα εξιχνιάσιμος από την κορυφή v, και έστω ότι υπάρχει κάποιος κύκλος που δεν περνά από την κορυφή v.

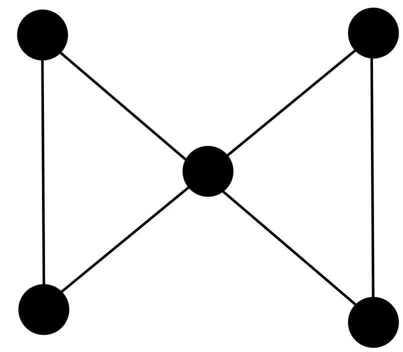


Γράφος αυθαίρετα εξιχνιάσιμος V

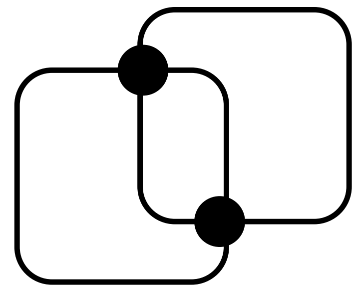
- Ένας Eulerian γράφος G μπορεί να εξιχνιασθεί αυθαίρετα από τουλάχιστον 2 κορυφές.
  - Έστω ότι ο G μπορεί να εξιχνιασθεί αυθαίρετα από 3 κορυφές. Άρα, όλοι οι κύκλοι περνούν από αυτές τις 3 κορυφές.
  - Υπάρχουν τουλάχιστον 2 κύκλοι που περνούν από αυτές τις 3 κορυφές.
  - Υπάρχει τουλάχιστον ένας κύκλος που ορίζεται με κόκκινο κομμάτι, πράσινο κομμάτι και 2 κορυφές, ο οποίος δεν περνά από την τρίτη κορυφή.

Γράφος αυθαίρετα εξιχνιάσιμος – Παραδείγματα

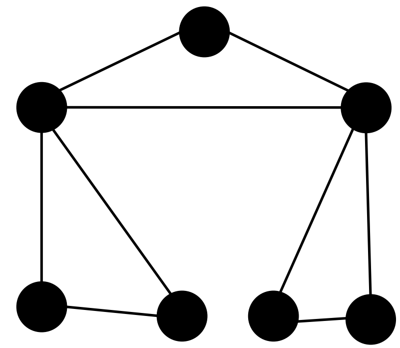
- Αυθαίρετα εξιχνιάσιμος μόνο από κεντρική κορυφή



- Αυθαίρετα εξιχνιάσιμος από κάθε κορυφή



- Μη αυθαίρετα εξιχνιάσιμος



Αλγόριθμοι εύρεσης ίχνους Euler

- **Fleury** (<1921): με σταδιακή επέκταση του ίχνους T αποφεύγοντας τις γέφυρες (αποκόπτουσες ακμές) στον υπογράφο G–T, εκτός αν δεν υπάρχει άλλη επιλογή
- **Hierholtzer** (1873): με συγκόλληση από επιμέρους ίχνη
- **Tucker** (1976): με διάσπαση κορυφών ώστε να σχηματιστούν ξένοι επιμέρους κύκλοι, και συγκόλληση κύκλων

Αλγόριθμος Fleury

1. Επιλέγουμε μία κορυφή $v_0 \in \mathrm{V}$ ως πρώτη κορυφή του ίχνους. Θέτουμε $T_0=(v_0)$ και $i \longleftarrow 0$
2. Έστω το ίχνος $T_i =(v_0, e_1, v_1,\ldots, e_i, v_i)$

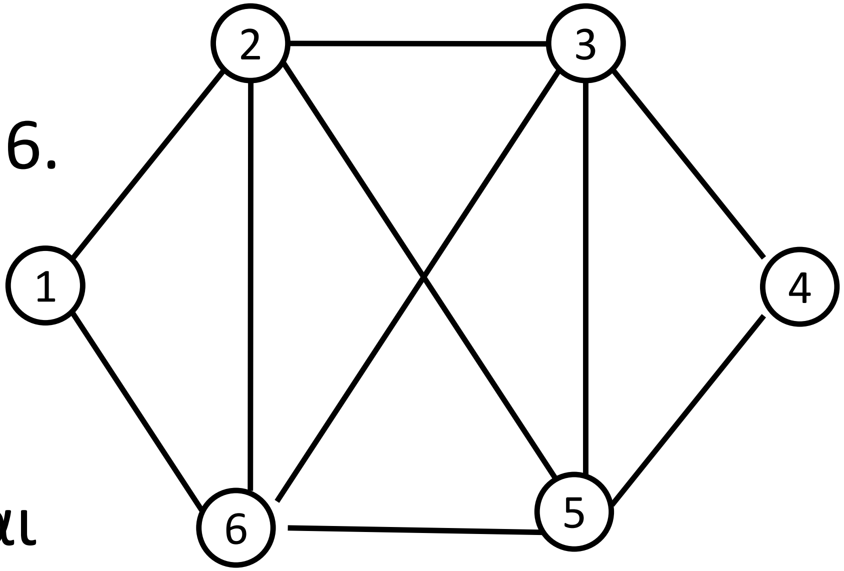
   Από την κορυφή vi επιλέγεται τυχαία μία ακμή $e_{i+1} \notin T_i$ που δεν είναι αποκόπτουσα στον υπογράφο G–E(T_i) εκτός αν δεν υπάρχει άλλη επιλογή.

   Ορίζεται το ίχνος $T_{i+1} = (T_i, e_{i+1}, v_{i+1})$Ti+1 = (Ti, ei+1,vi+1). Θέτουμε $i \leftarrow i+1$
3. Αν i=|E|, τότε C=T_i είναι ένα κύκλωμα Euler, αλλιώς πήγαινε στο βήμα 2.

Πολυπλοκότητα: $O(m^2)$

Παράδειγμα Αλγορίθμου Fleury I

- Βήμα 1: 1
- Βήμα 2: επιλέγεται τυχαία η 2. Ίχνος 1, 2
- Βήμα 3: επιλέγεται τυχαία η 6. Ίχνος 1, 2, 6
- Βήμα 4-5: δεν μπορεί να επιλεγεί η 1 γιατί στον υπογράφο G–(1,2)–(2,6) είναι αποκόπτουσα. Ίχνος 1, 2, 6, 5, 3



Παράδειγμα Αλγορίθμου Fleury II

- Βήμα 6-9: δεν μπορεί να επιλεγεί η 6 γιατί στον υπογράφο G–(1,2)–(2,6)–(6,5)–(5,3) η (3,6) είναι αποκόπτουσα.

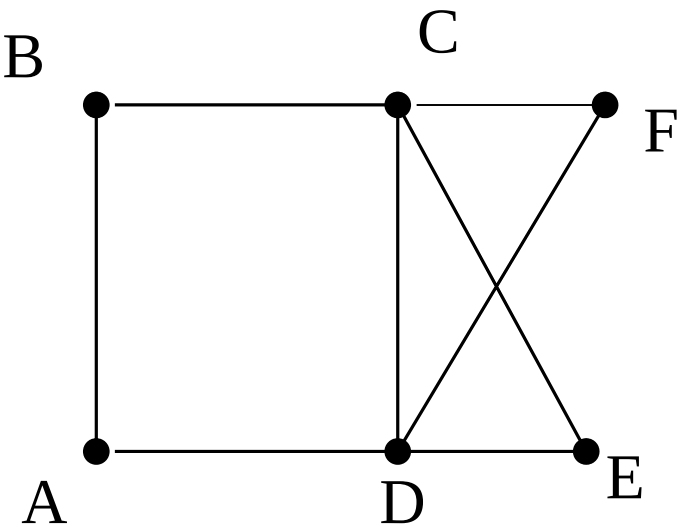
  Ίχνος 1,2,6,5,3,4,5,2,3

- Βήμα 10: επιλέγεται αναγκαστικά η 6.
  Ίχνος 1,2,6,5,3,4,5,2,3,6

- Βήμα 11: επιλέγεται η 1 αναγκαστικά.
  Ίχνος 1,2,6,5,3,4,5,2,3,6,1

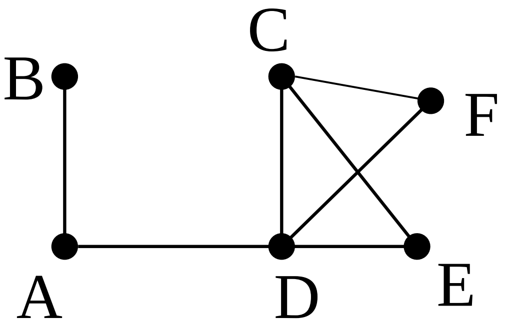
Άσκηση Ι

Να βρεθεί ένα Eulerian κύκλωμα για τον επόμενο γράφο

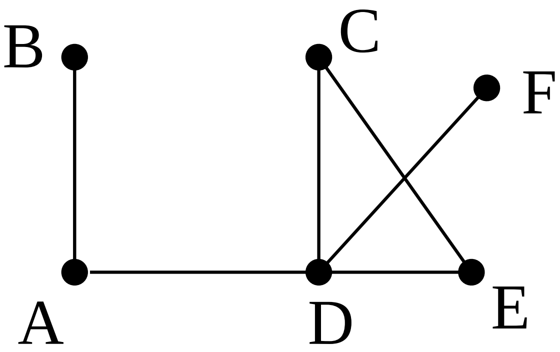


Άσκηση ΙΙ

Επιλογή BC

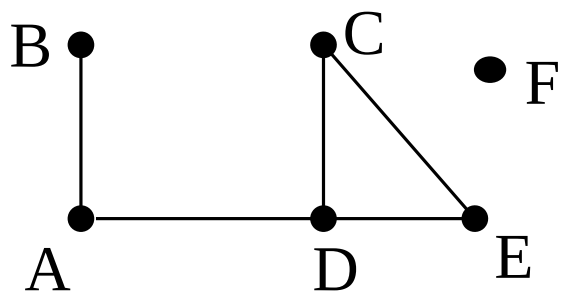


Επιλογή CF

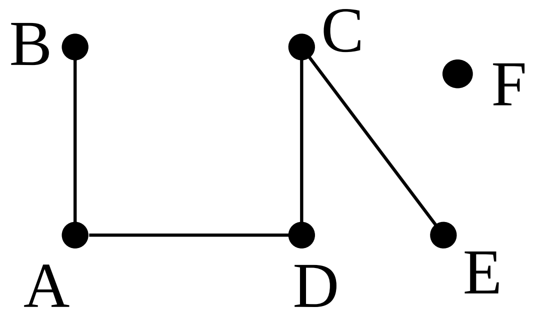


Άσκηση III

Επιλογή FD



Επιλογή DE



Αλγόριθμος Hierholtzer

1. Επιλέγουμε μία κορυφή $v \in V$ και δημιουργείται ένα ίχνος C_0 λαμβάνοντας κάθε φορά οποιαδήποτε ακμή $\notin C_0$. Θέτουμε $i \leftarrow 0$.
2. Αν $E(C_i)=E(G)$, τότε $C=C_i$ είναι ένα ίχνος Euler αλλιώς επιλέγεται μία κορυφή $v_i \in C_i$ που είναι προσκείμενη σε ακμή $\in Ci$ και η διαδικασία προχωρεί κτίζοντας ένα άλλο ίχνος C'_i με αρχή την κορυφή v_i, μέσα στον υπογράφο $G–E(C_i)$
3. Από τα ίχνη C_i, C'_i δημιουργείται ένα υπερ-ίχνος C_{i+1} ξεκινώντας από την κορυφή v_{i-1}, διασχίζοντας το ίχνος C_i, συνεχίζοντας στο ίχνος C'_i και τελειώνοντας στην κορυφή v_i. Θέτουμε $i \leftarrow i +1$. Πήγαινε Βήμα 2.

Παράδειγμα Αλγορίθμου Hierholtzer

Αρχικά:

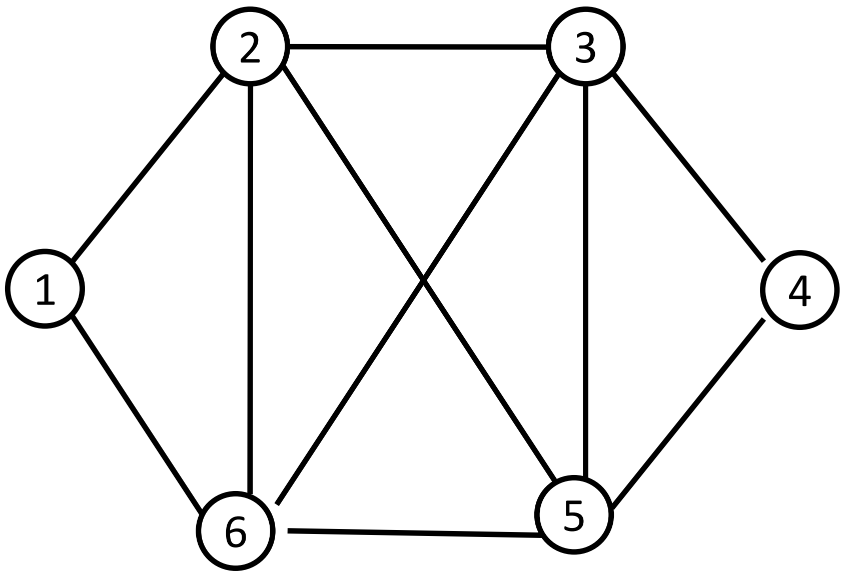
- 1→2→6→1
- 2→3→6→5→2
- 3→5→4→3

Ενώνουμε διαδοχικά:

- 1→2→3→6→5→2→6→1

Τελικά:

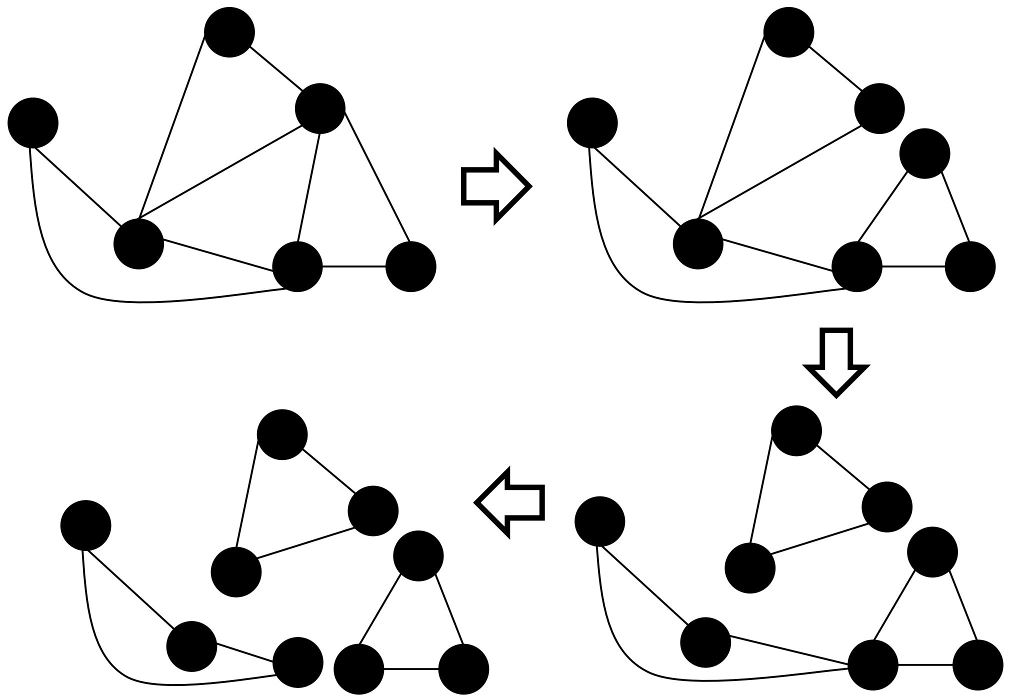
- 1→2→3→5→4→3→6→5→2→6→1



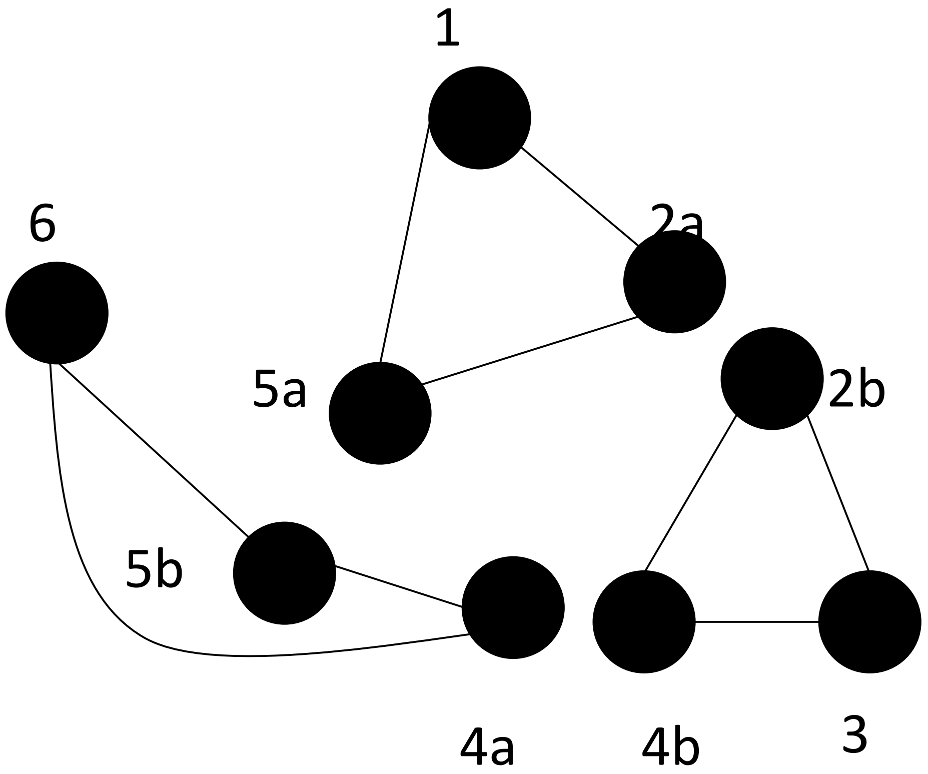
Αλγόριθμος Tucker

1. Διασπούμε τις κορυφές του G μέχρι να υπάρξουν κορυφές βαθμού 2. Ο γράφος που προκύπτει ονομάζεται G_1. Θέτουμε i←0. Έστω ότι ci ο αριθμός των συνιστωσών του γράφου G_i.
2. Αν c_i=1, τότε C=G_i είναι ένα κύκλωμα Euler, αλλιώς αναζητούμε δύο συνιστώσες T και T΄ του G_i με κοινή την κορυφή v_i. Σχηματίζεται το ίχνος C_{i+1} αρχίζοντας από την κορυφή v_i, διασχίζοντας τις συνιστώσες T και T' και καταλήγοντας πάλι στην v_i.
3. Ορίζεται ο γράφος $G_{i+1}=G_i-\{T,T'\}\cup C_{i+1}$. Θεωρείται ότι το ίχνος C_{i+1} είναι συνιστώσα του υπογράφου G_{i+1}. Θέτουμε T=C_{i+1} και i ← i+1. Έστω ότι ci είναι ο αριθμός των συνιστωσών του υπογράφου G_i. Πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Παράδειγμα Αλγορίθμου Tucker I



Παράδειγμα Αλγορίθμου Tucker II



Αρχικά:

- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$
- $5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 5$
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

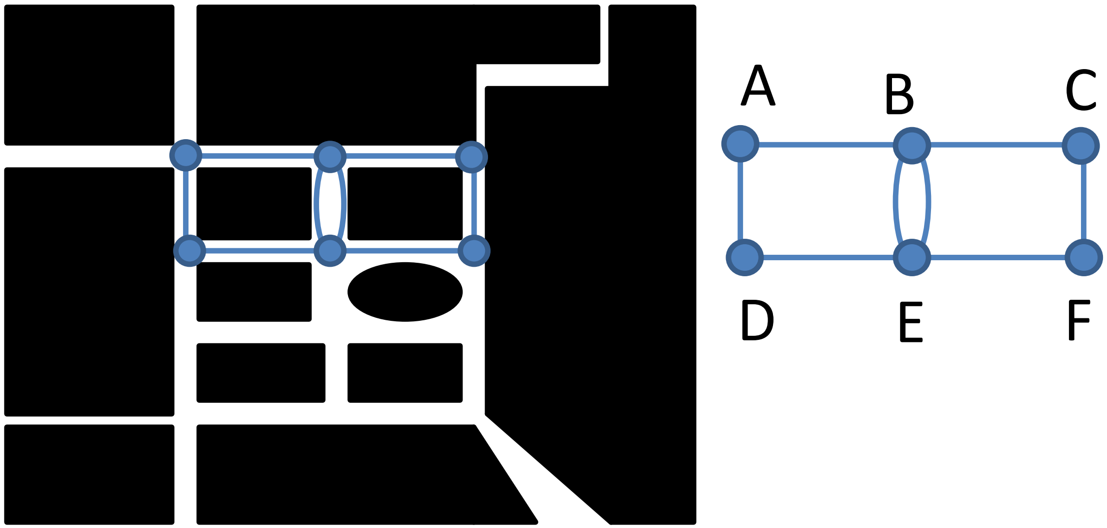
Τελικά:

- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 1$

Προβλήματα οδικών δικτύων Ι

- Κινέζος ταχυδρόμος
- Συλλογή σκουπιδιών
- Έλεγχος παρκομέτρων
- Έλεγχος μετρητών ΔΕΗ
- Εξέταση σιδηροδρομικού δικτύου

Προβλήματα οδικών δικτύων ΙΙ



Μετατροπή του οδικού δικτύου σε γράφο

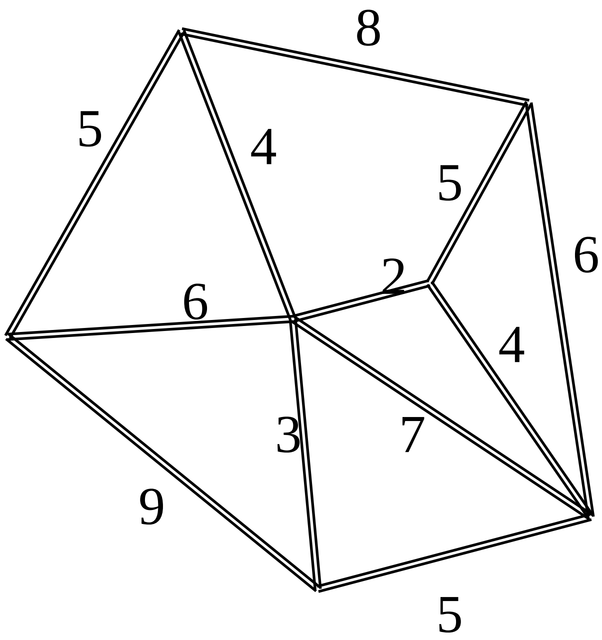
Προβλήματα οδικών δικτύων III

- Είναι δυνατόν να περάσουμε μία φορά (ακριβώς) από όλες τις πόρτες ?
- Κάθε δωμάτιο αναπαρίσταται από μία κορυφή. Χρειάζεται και ένα σημείο για την αναπαράσταση της περιοχής έξω από το διάγραμμα
- Πρέπει να βρεθεί Eulerian κύκλωμα

Πρόβλημα του Κινέζου Ταχυδρόμου

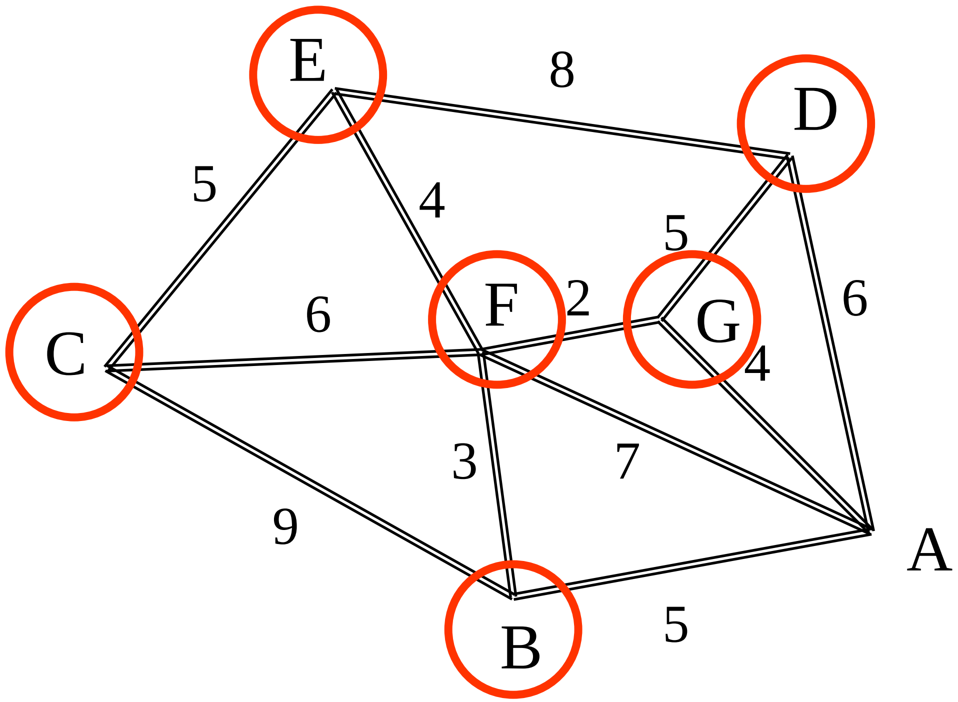
- Ένας ταχυδρόμος ξεκινά από την υπηρεσία του, επισκέπτεται όλους τους δρόμους και επιστρέφει στο γραφείο του. Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή?
- Το πρόβλημα έθεσε το 1962 ο Κινέζος μαθηματικός Kuan Mei-Ko, και έκτοτε το πρόβλημα λέγεται «του Κινέζου Ταχυδρόμου».
- Έως τώρα θεωρούσαμε μη ζυγισμένους γράφους.
- Αν ένας ζυγισμένος γράφος είναι Eulerian, τότε απλώς ο ταχυδρόμος πρέπει να βρει ένα κύκλωμα (το κόστος είναι ίδιο για όλα τα κυκλώματα).
- Έστω ότι ο ζυγισμένος γράφος δεν είναι Eulerian. Ποιό είναι το ελάχιστο κόστος της κλειστής διαδρομής που θα περάσει από όλες τις ακμές?

Παράδειγμα Ι



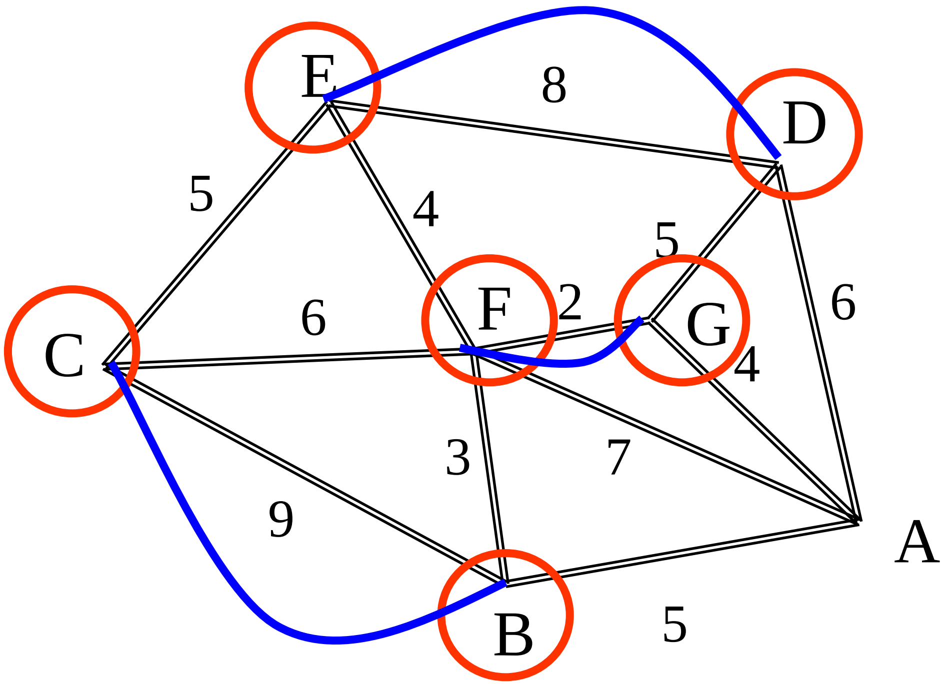
Κεντρική υπηρεσία

Παράδειγμα II



Εύρεση κόμβων περιττού βαθμού

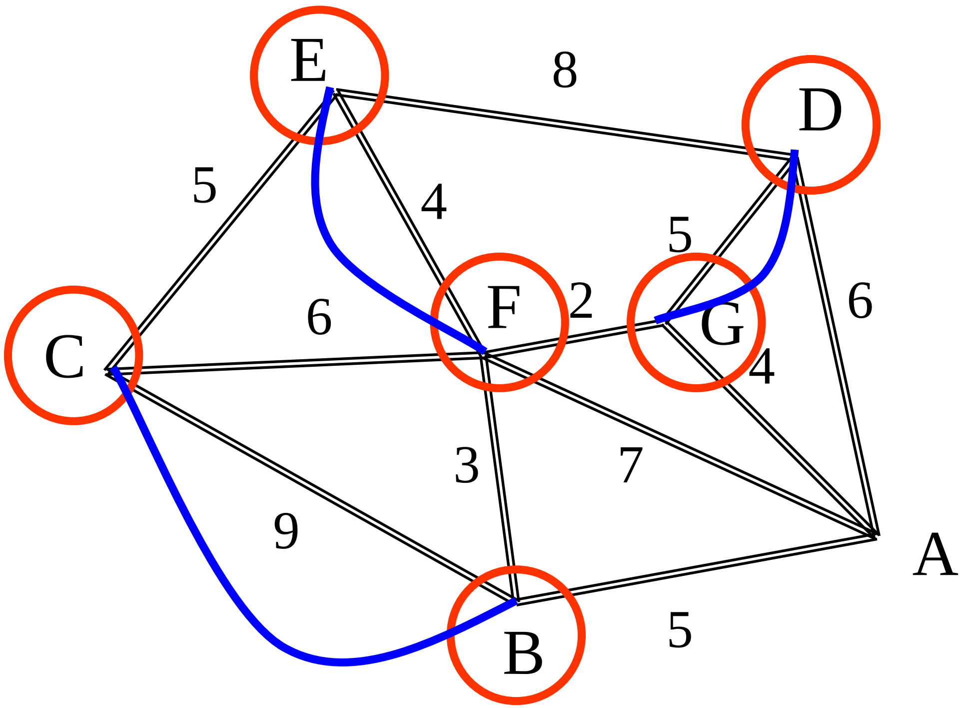
Παράδειγμα III



Διερεύνηση πιθανών ζευγών

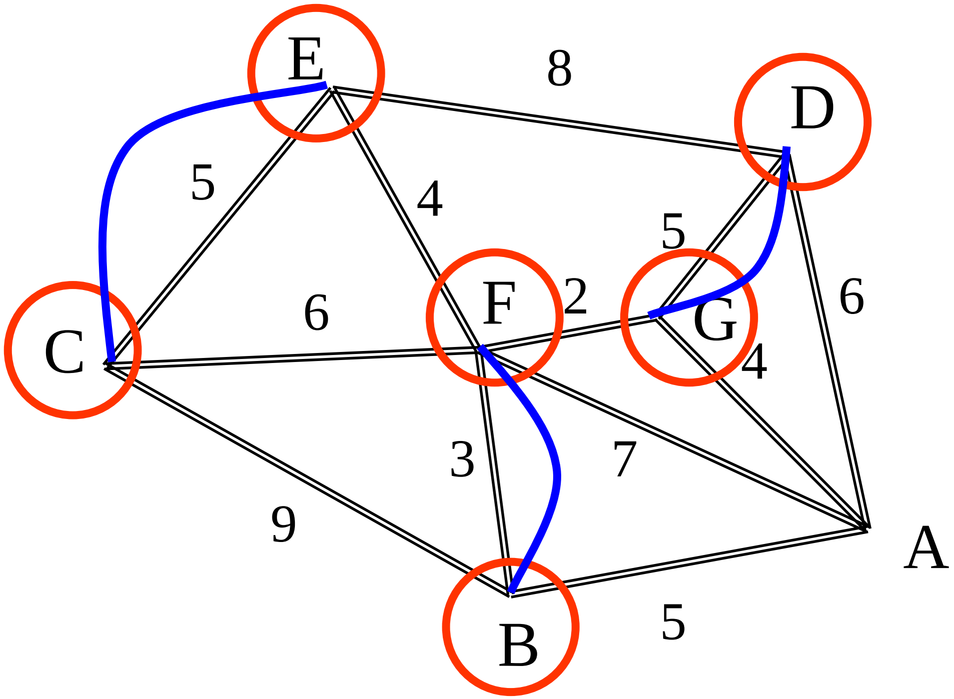
Άθροισμα μήκους BC, DE, FG = 9+8+2=19

Παράδειγμα IV



Άθροισμα μήκους BC, EF, DG = 9+4+5=18

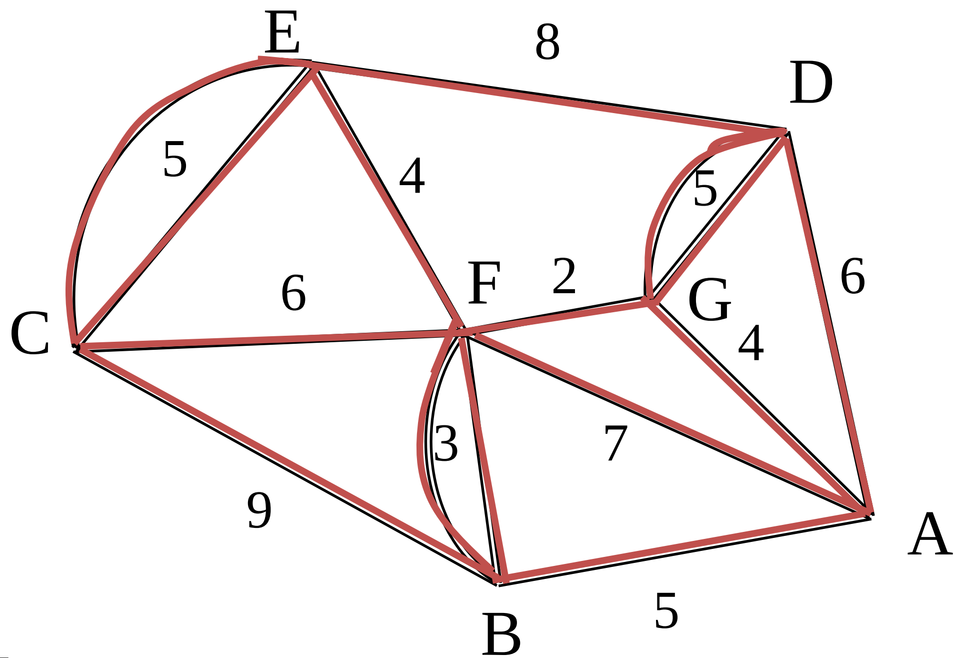
Παράδειγμα V



Άθροισμα μήκους BF, CE, DG = 3+5+5=13

Αυτό αποτελεί την καλύτερη περίπτωση

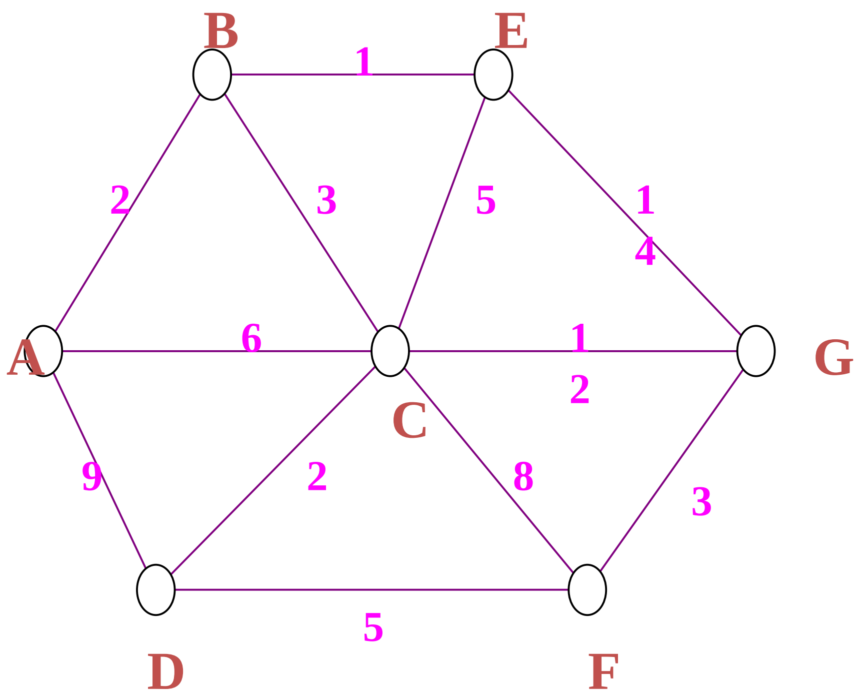
Λύση Παραδείγματος



Συνολικό κόστος = μήκος όλων των ακμών + μήκος των ακμών BF, CE και DG = 64+13=77.

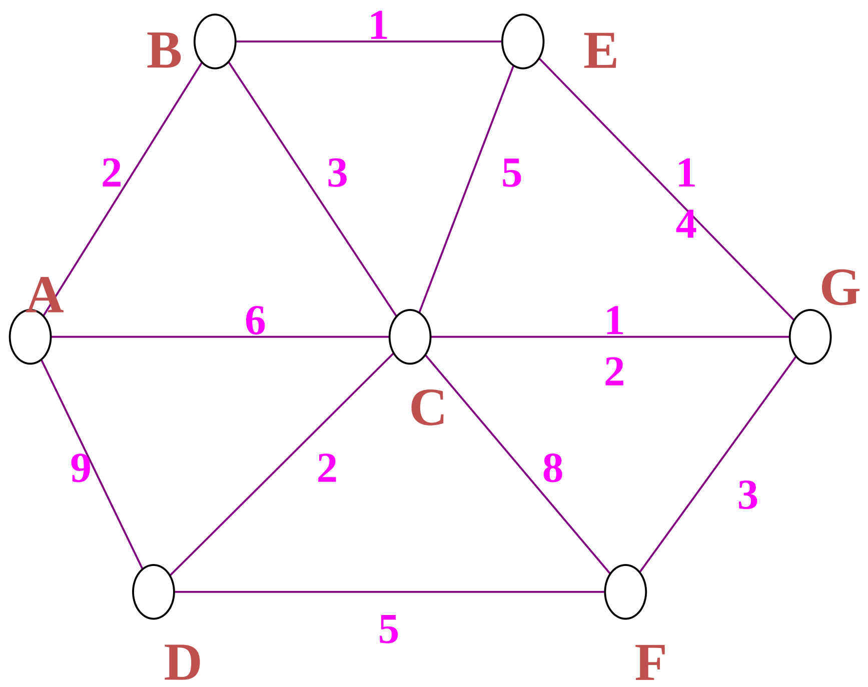
Μία πιθανή διαδρομή είναι DGFAGDABFBCECFED

Ένα ακόμη παράδειγμα Ι



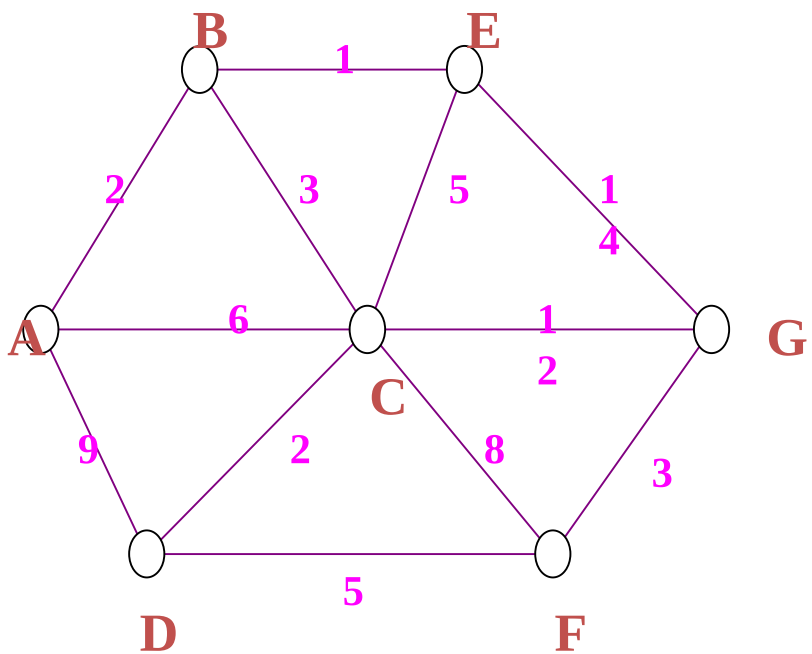
Προφανώς δεν είναι Eulerian

Ένα ακόμη παράδειγμα ΙΙ



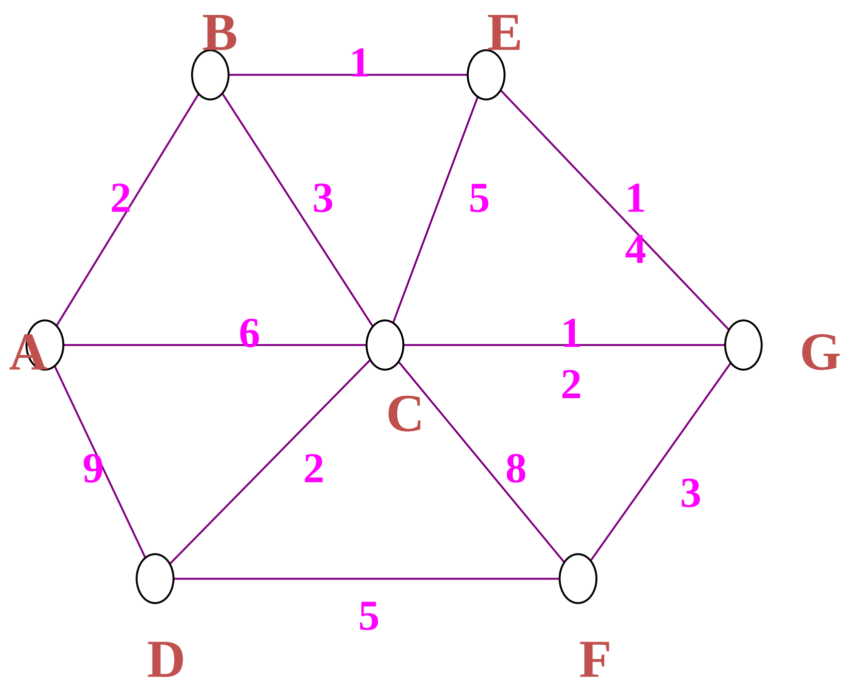
Είναι η καλύτερη λύση ;

Ένα ακόμη παράδειγμα III



Είναι η καλύτερη λύση ;

Ένα ακόμη παράδειγμα IV



Η βέλτιστη λύση !

Αλγόριθμος Κινέζου Ταχυδρόμου I

- Σκοπός: Η εύρεση του κλειστού μονοπατιού με το μικρότερο κόστος σε ζυγισμένο μη Eulerian γράφο.
- **Βήμα 1**: Βρίσκουμε τις κορυφές περιττού βαθμού
- **Βήμα 2**: Για κάθε ζεύγος κόμβων με περιττό βαθμό, βρίσκουμε το αντίστοιχο γεωδεσικό μονοπάτι (ζευγνύον μονοπάτι με ελάχιστο βάρος)
- **Βήμα 3**: Ενώνουμε όλες τις κορυφές περιττού βαθμού μεταξύ τους ώστε να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα των βαρών των γεωδεσικών μονοπατιών που βρέθηκαν στο Βήμα 3.
- **Βήμα 4**: Βρίσκουμε το κύκλωμα για το νέο (Eulerian) γράφο.

Αλγόριθμος Κινέζου Ταχυδρόμου ΙΙ

- Παρατηρήσεις

1. Στο Βήμα 2, η εφαρμογή του αλγορίθμου Dijkstra απαιτεί πολυπλοκότητα O(n2), όπου n το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού
2. Για μη ζυγισμένο γράφο, το μήκος k της βέλτιστης λύσης είναι: $|E| \leq k \leq 2|E|$
3. Το μήκος της βέλτιστης λύσης για ένα δένδρο είναι $2|E|$
4. Θα δοθεί αποτελεσματικότερη λύση στο Κεφάλαιο περί αντιστοιχίσεων (matching)

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνα 1: <Οι γέφυρες του Konigsberg> <Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported> <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.