ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # **6**: Δένδρα

Ιωάννης Μανωλόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δένδρα

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δένδρα – Βασικά στοιχεία Ι

- Δένδρα: Συνδεδεμένοι άκυκλοι γράφοι
- **Θεώρημα**: Ένας γράφος G είναι δένδρο αν και μόνο αν δύο οποιεσδήποτε κορυφές ενώνονται με ένα μοναδικό μονοπάτι.
- **Θεώρημα**: Σε ένα δένδρο T ισχύει η σχέση: m=n–1
- **Πόρισμα**: Σε κάθε δένδρο υπάρχουν τουλάχιστον δύο εκκρεμείς κορυφές, δηλαδή κορυφές με βαθμό 1.
- **Πόρισμα**: Μία μη αύξουσα ακολουθία ακεραίων S: $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ανήκει σε ένα δένδρο μόνο αν κάθε di είναι θετικός αριθμός και ισχύει η σχέση:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

Δένδρα – Βασικά στοιχεία ΙΙ

- **<u>Θεώρημα</u>**: Ένας άκυκλος γράφος με n κορυφές και n–1 ακμές είναι συνδεδεμένος.
- **<u>Θεώρημα</u>**: Κάθε συνδεδεμένος γράφος με n κορυφές και n–1 ακμές είναι δένδρο.
- **<u>Θεώρημα</u>**: Ένας γράφος είναι δένδρο αν είναι συνδεδεμένος κατά ελάχιστο τρόπο.

Ιδιότητες Δένδρων

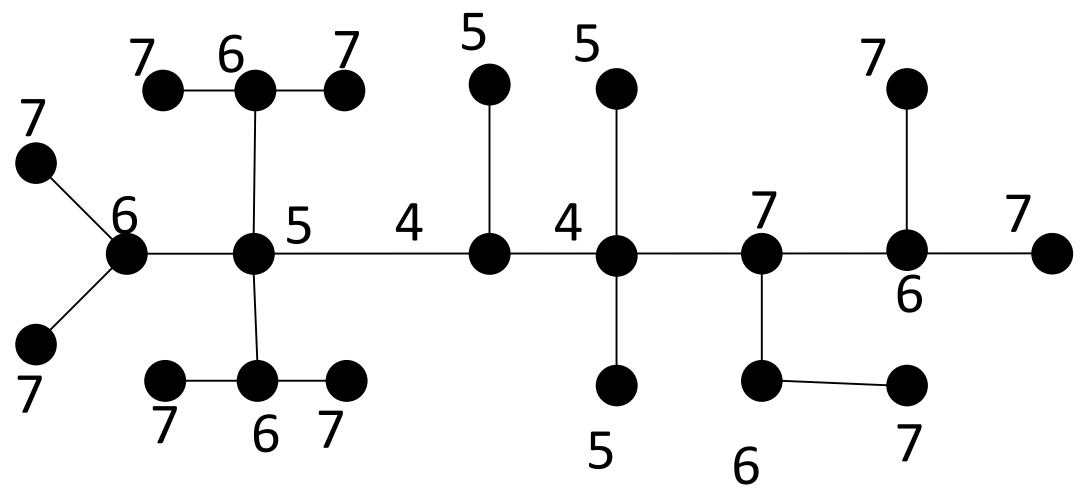
- Ένας συνδεδεμένος γράφος με n κορυφές είναι δένδρο:
  - αν δεν περιέχει κύκλους
  - αν υπάρχει μόνο 1 μονοπάτι μεταξύ 2 τυχαίων κορυφών
  - αν κάθε ακμή είναι γέφυρα
  - αν αποτελείται από n–1 ακμές
  - αν περιέχει τουλάχιστον 2 κορυφές βαθμού 1 (n≥2)
  - αν παράγεται 1 μόνο κύκλος, αν προθέσουμε 1 ακμή

Κάποιες επιπλέον ιδιότητες

- **<u>Πόρισμα</u>**: Δάσος με n κορυφές και k συνιστώσες έχει n–k ακμές.
- **<u>Θεώρημα (Jordan, 1869):</u>** Ένα δένδρο έχει κέντρο που αποτελείται από 1 ή 2 κορυφές
- **<u>Πόρισμα</u>**: Αν το κέντρο ενός δένδρου αποτελείται από δύο κορυφές, τότε αυτές είναι γειτονικές και ονομάζονται **δίκεντρα**-bicenters.

Παράδειγμα

- Κάθε κορυφή του δένδρου χαρακτηρίζεται από την αντίστοιχη εκκεντρικότητα.
- Να βρεθεί η τιμή της ακτίνας, η τιμή της διαμέτρου και το κέντρο.



Δένδρα – Cayley

- Arthur Cayley, 1857
- C_kH_{2k+2}, πλήθος ισομερών
- Άτομα άνθρακα : κορυφές βαθμού 4
  υδρογόνου : κορυφές βαθμού 1
- $n=k+2k+2=3k+2$
- $m=½(\Sigma d(v))=½(4k+2k+2)=3k+1$

Απαρίθμηση Δένδρων Ι

<u>Θεώρημα:</u> Έστω ότι το άθροισμα των θετικών ακεραίων $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (όπου $n \geq 2$) είναι $2n-2$.
Το πλήθος των δένδρων με n κόμβους, όπου οι βαθμοί των κόμβων είναι $d_1, d_2, \ldots, d_n$, ισούται με:

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\,(d_2-1)!\ldots(d_n-1)!}$$

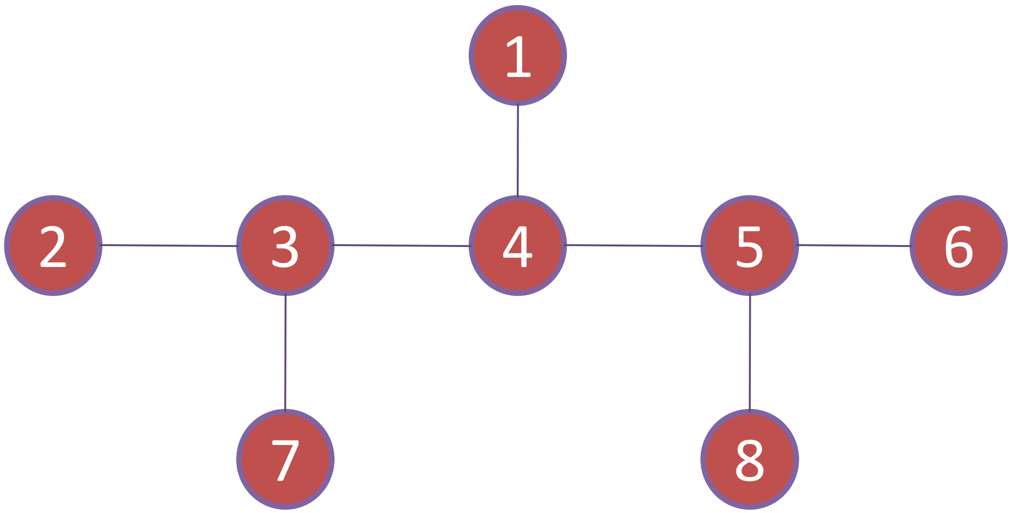
Απαρίθμηση Δένδρων ΙΙ

<u>Θεώρημα (Cayley):</u> Ο αριθμός των διακριτών δένδρων με επιγραφές και $n \geq 2$ κορυφές είναι n^{n-2}

Απόδειξη Cayley:

- Επιγράφουμε τους κόμβους του δένδρου με 1, 2, ..., n.
- Βρίσκουμε την εκκρεμή ακμή με τη μικρότερη επιγραφή, έστω a_1.
- Τη διαγράφουμε και έστω b_1 η γειτονική της.
- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στον υπογράφο που μένει.
- Έτσι, μετά από n–2 διαγραφές, το δένδρο εκφυλίζεται σε μία ακμή, και έχουμε δημιουργήσει S: $(b_1,b_2,\ldots,b_{n-2})$.
- Κάθε στοιχείο της ακολουθίας S μπορεί να πάρει τιμές από το διάστημα [1..n]

Απαρίθμηση Δένδρων – Παράδειγμα



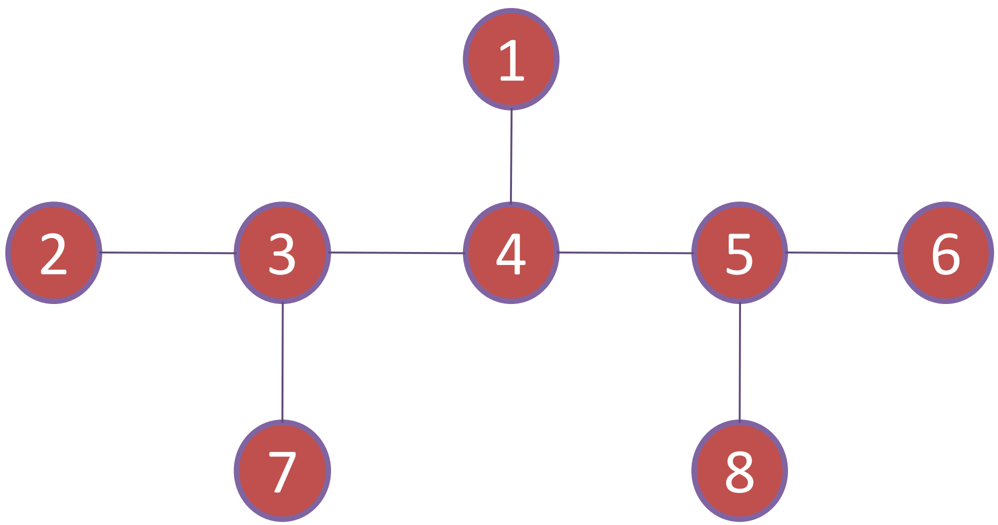
- (1,4)
- (2,3)
- (6,5)
- (7,3)
- (3,4)
- (4,5)
- και μένει (5,8)

Ανακατασκευή δένδρου από επιγραφές I

- Αντιστρόφως απόδειξης Cayley.

Έστω ότι n=8 και b=4,3,5,3,4,5.
Αναζητείται ο μικρότερος αριθμός από το διάστημα [1,8], που δεν εμφανίζεται στην ακολουθία b. Ο αριθμός αυτός είναι ο $a_1=1$. Έτσι προσδιορίζεται η ακμή $(a_1, b_1)=(1,4)$.

Ανακατασκευή δένδρου από επιγραφές II



- Με τον ίδιο τρόπο προσδιορίζονται οι ακμές

  $(a_2, b_2)=(2,3)$,

  $(a_3, b_3)=(6,5)$,

  $(a_4,b_4)= (7,3)$,

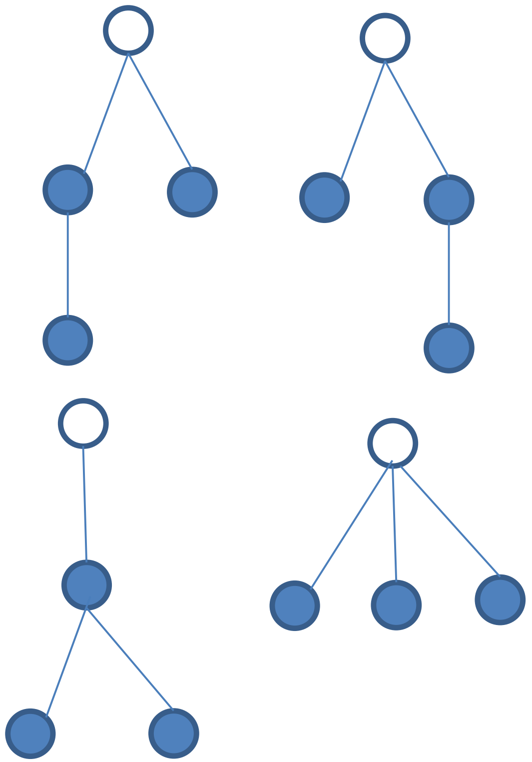
  $(a_5, b_5)=(3,4)$ και

  $(a_6, b_6)=(4,5)$.

Στο τέλος ενώνεται η μη χρησιμοποιημένη (5) με τη μέγιστη επιγραφή (8)

Ριζωμένα Δένδρα

- **<u>Θεώρημα</u>**: Ο αριθμός των διακριτών ριζωμένων δένδρων με επιγραφές που έχει n κορυφές είναι n^{n-1}.
- Ισομορφικά δένδρα μπορεί να είναι αλλά μπορεί και να μην είναι ισομορφικά ως ριζωμένα.



Πόσα είναι τα ισομερή του C_kH_{2k+2};

- Εφόσον οι κορυφές που παριστούν το H είναι εκκρεμείς και άρα εξαρτώνται κατά μοναδικό τρόπο από τις κορυφές που αναπαριστούν τον άνθρακα, δεν χρειάζεται να πεικονίζονται στο σχετικό γράφο.
- Έτσι, αρκεί να εξετασθεί τι συμβαίνει με τα k άτομα του άνθρακα σε έναν απλουστευμένο γράφο όπου πλέον δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ των κορυφών.

Ύπαρξη Ζευγνύοντος Δένδρου

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε συνδεδεμένος γράφος έχει τουλάχιστον ένα ζευγνύον δένδρο.

- Έστω ηλεκτρικό κύκλωμα που απεικονίζεται με ένα γράφο από n κορυφές και m ακμές. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ακμών που πρέπει να διαγράψουμε, έτσι ώστε να μην υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα;

Απάντηση: Ο αριθμός των χορδών m–n+1.

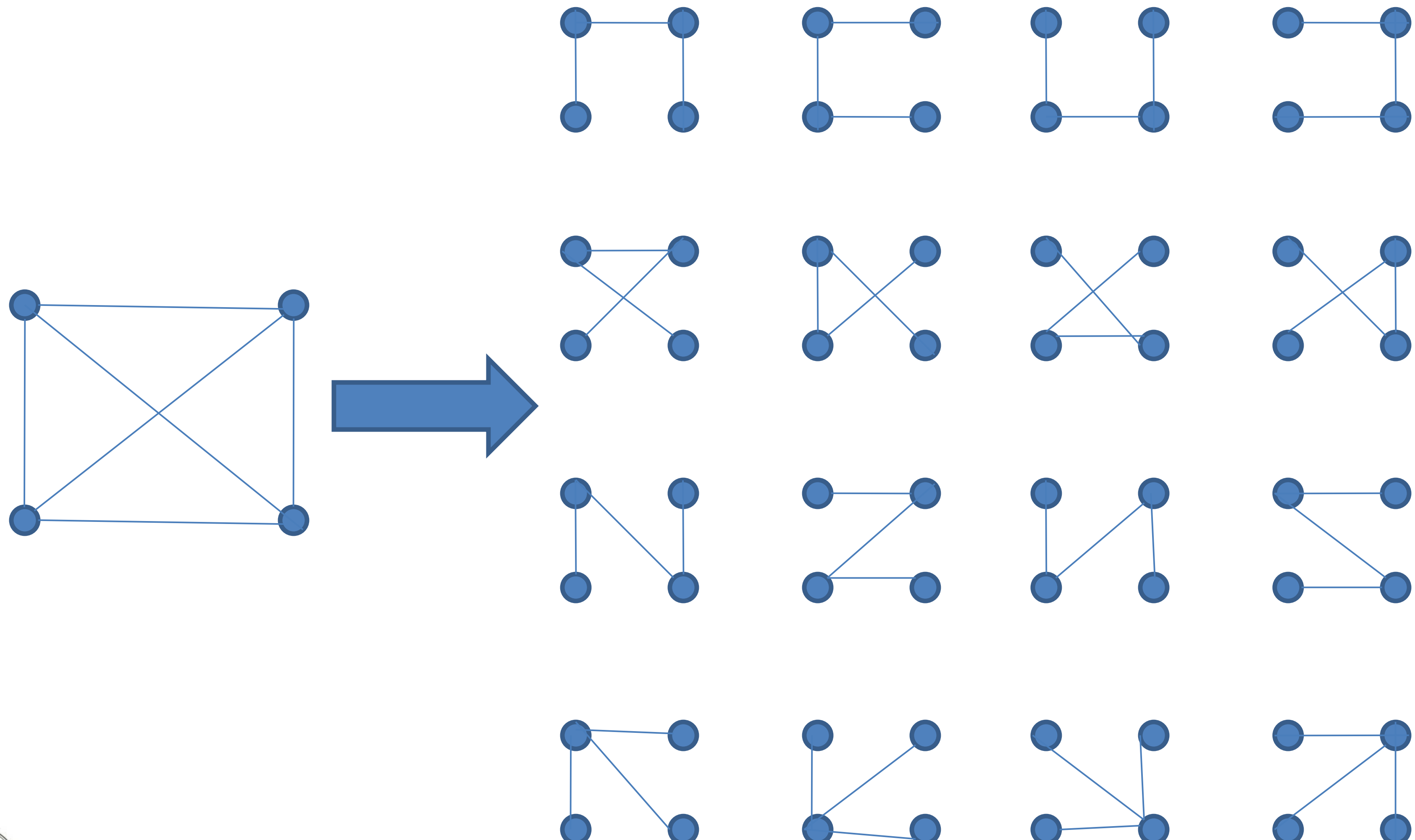
Μερικά θεωρήματα

<u>Θεώρημα:</u> Κάθε δένδρο με n κορυφές είναι υπογράφος ενός γράφου G με $d(G) \geq n-1$.

Πόσα ζευγνύοντα δένδρα μπορούν να προκύψουν από ένα συνδεδεμένο γράφο;

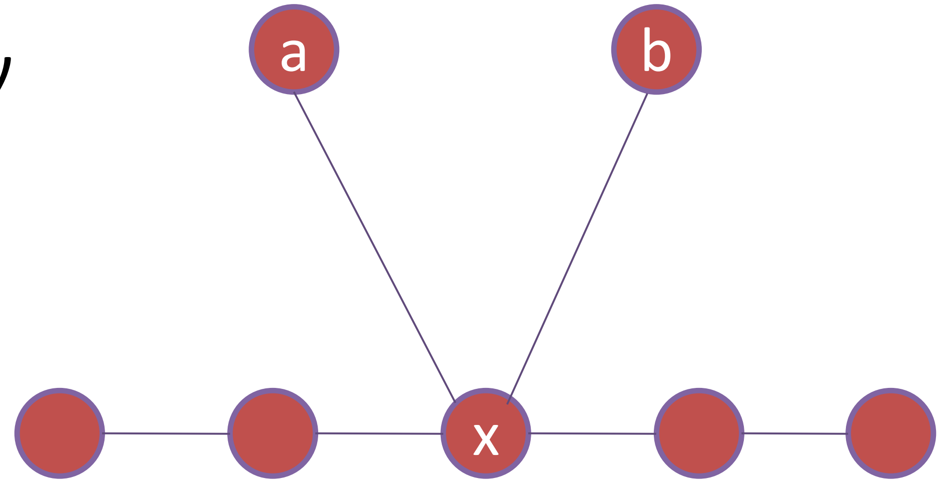
<u>Θεώρημα:</u> Ο αριθμός των διακριτών ζευγνυόντων δένδρων ενός πλήρους γράφου K_n είναι n^{n-2}.

Ζευγνύοντα δένδρα του K_4



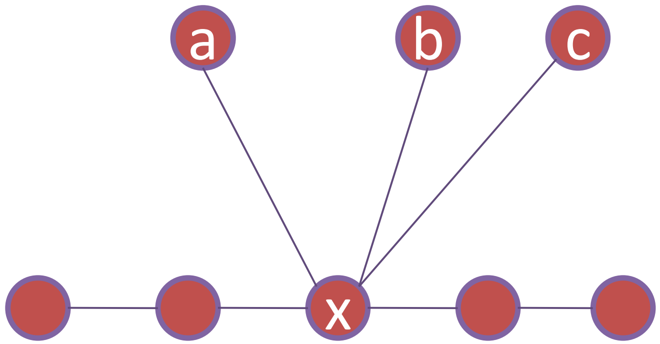
Απαρίθμηση Ζευγνυόντων Δένδρων

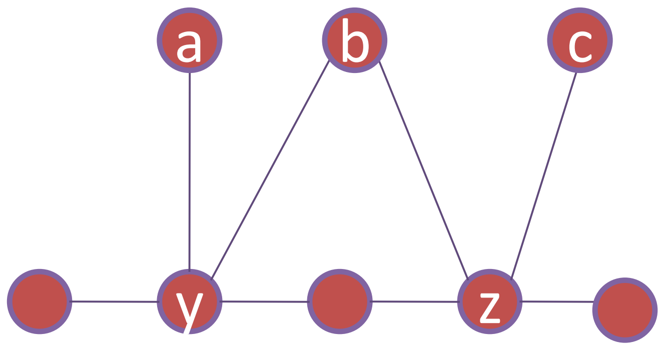
- **Θεώρημα**: Ο αριθμός των διακριτών ζευγνυόντων δένδρων ενός πλήρους διμερούς γράφου $K_{m,n}$ είναι $m^{n-1}n^{m-1}$.
- **Θεώρημα**: Ο αριθμός των διακριτών ζευγνυόντων δένδρων ενός πλήρους διμερούς γράφου $K_{2,n}$ είναι $n2^{n-1}$



Περισσότερη απαρίθμηση Ι

- <u>**Θεώρημα**</u>: Ο αριθμός των διακριτών ζευγνυόντων δένδρων ενός πλήρους διμερούς γράφου $K_{3,n}$ είναι $n^2 3^{n-1}$





Περισσότερη απαρίθμηση ΙΙ

- **Θεώρημα**: Ο αριθμός των διακριτών ζευγνυόντων δένδρων ενός τροχοειδούς γράφου W_n είναι

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - 2$$

Μερικοί ορισμοί για πίνακες Ι

- **Πίνακας βαθμών**: $C(i,j)=0$ για $i\neq j$ και $C(i,i)=d(v_i)$ για $1\leq i\leq n$.
- Αν από ένα δισδιάστατο πίνακα B με $n\times n$ στοιχεία διαγραφεί η i-οστή γραμμή και η j-οστή στήλη, τότε προκύπτει ένας πίνακας B_{ij} που ονομάζεται **ελάσσων**-minor στη θέση i,j.

Μερικοί ορισμοί για πίνακες ΙΙ

- **Συμπαράγοντας** -cofactor του πίνακα B στη θέση i,j λέγεται η τιμή $(-1)^{i+j}|B_{ij}|$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

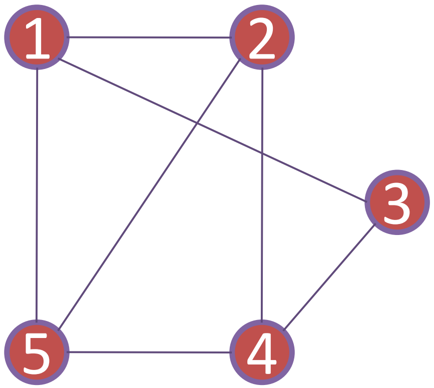
$$B_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα Πίνακα-Δένδρου Kirchoff

Matrix-tree theorem

Έστω ένας μη ασήμαντος γράφος G με πίνακα γειτνίασης A και πίνακα βαθμών C. O αριθμός των διαφορετικών ζευγνυόντων δένδρων του G ισούται με την τιμή οποιουδήποτε συμπαράγοντα του πίνακα C-A.

Θεώρημα Πίνακα-Δένδρου Kirchoff



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

24 δένδρα

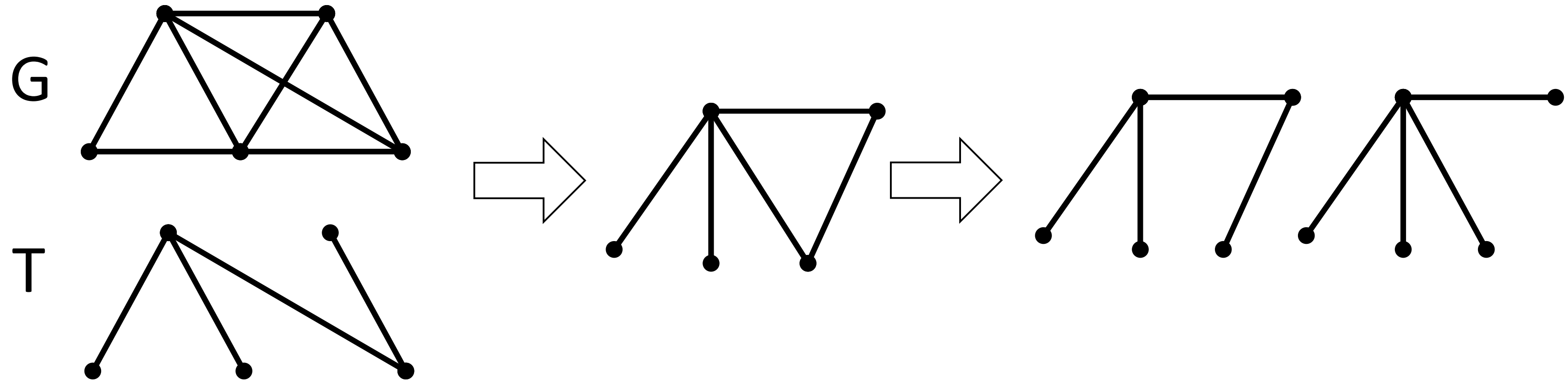
Θεμελιώδες Κύκλωμα

- **Θεμελιώδες κύκλωμα** – fundamental circuit, δημιουργείται αν χορδή εισαχθεί σε ζευγνύον δένδρο
- Ποιό το πλήθος των θεμελιωδών κυκλωμάτων για τυχόν ζευγνύον δένδρο ? **m–n+1**
- Από τυχόν ζευγνύον δένδρο και τυχαία χορδή παράγεται ένα πρώτο θεμελιώδες κύκλωμα. Κατόπιν με **κυκλικές εναλλαγές** (cyclic interchanges) παράγονται <u>**όλα**</u> τα ζευγνύοντα δένδρα

Κυκλικές εναλλαγές Ι

- Επιλέγουμε ένα ζευγνύον δένδρο T του G
- Εισάγουμε μια χορδή στο T, οπότε παράγεται ένα θεμελιώδες κύκλωμα C_i
- Διαγράφοντας μία-μία τις ακμές του C_i παράγονται τα T_1, T_2, …, T_K ζευγνύοντα δέντρα
- Εισάγουμε νέα χορδή, οπότε παράγεται νέο θεμελιώδες κύκλωμα C_{i+1}

Κυκλικές εναλλαγές ΙΙ



Απόσταση Δένδρων

- **Απόσταση** δύο ζευγνυόντων δένδρων ενός συνδεδεμένου γράφου G είναι ο αριθμός των ακμών που ανήκουν στο ένα δένδρο αλλά δεν ανήκουν στο άλλο και δίνεται εξ ορισμού ως
  – $\mathrm{dist}(T_i, T_j) = \mathrm{dist}(T_j, T_i)$
  – $\mathrm{dist}(T_i, T_j) \geq 0$ και $\mathrm{dist}(T_i, T_i)=0$ αν και μόνο αν $T_i=T_j$
  – $\mathrm{dist}(T_i, T_j) \leq \mathrm{dist}(T_j, T_k)+ \mathrm{dist}(T_k, T_j)$
- **Δενδρικός γράφος** – tree graph, οι κόμβοι αντιστοιχούν σε ζευγνύονται δένδρα και ενώνονται αν το ένα προκύπτει από το άλλο με κυκλική εναλλαγή.
- Η απόσταση δύο ζευγνυόντων δένδρων ισούται με την απόσταση των αντίστοιχων κόμβων στο δενδρικό γράφο.

Απόσταση Δένδρων

- **<u>Θεώρημα:</u>** Η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο ζευγνυόντων δένδρων T_i και T_j ενός συνδεδεμένου γράφου G(V,E) είναι:

$$\max(dist(T_i, T_j)) \leq \min(n-1, m-n+1)$$

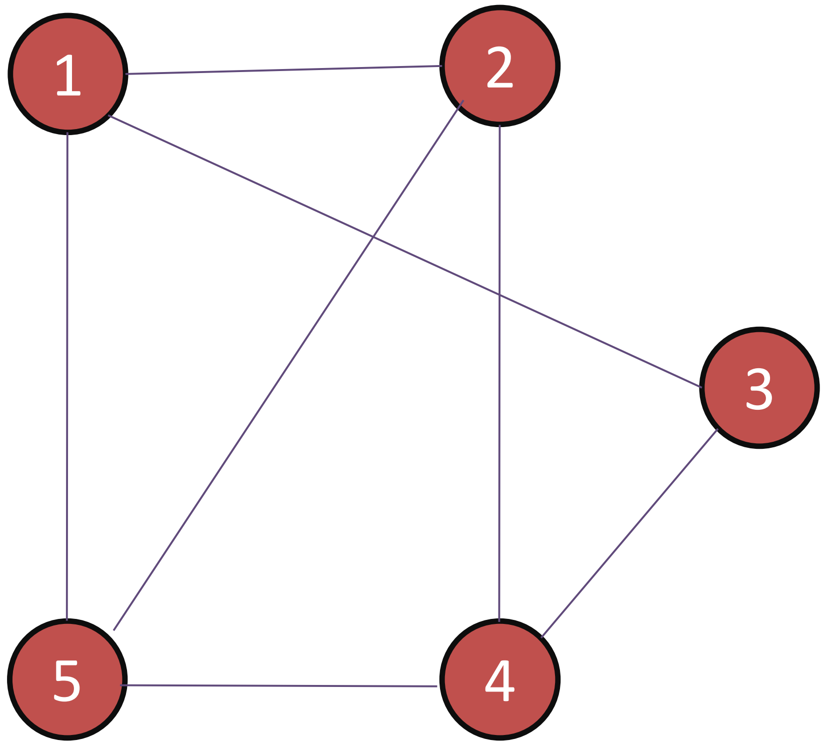
- **Κεντρικό** λέγεται ένα ζευγνύον δένδρο T_0 αν για κάθε ζευγνύον δένδρο T ισχύει η σχέση

$$\max(dist(T_0, T_i)) \leq \max(dist(T_i, T_j))$$

Διατήρηση απόστασης Ι

- Δεδομένου γράφου *G* μπορούμε να κατασκευάσουμε δένδρο *T*, όπου η απόσταση από κάποια κορυφή *v* $\in T$ προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές του *T* να είναι ίδια με την ελάχιστη απόσταση της κορυφής *v* προς κάθε μία από τις κορυφές του *G*. Τότε λέγεται ότι το ζευγνύον δένδρο *T* **διατηρεί** την απόσταση από την κορυφή *v*.

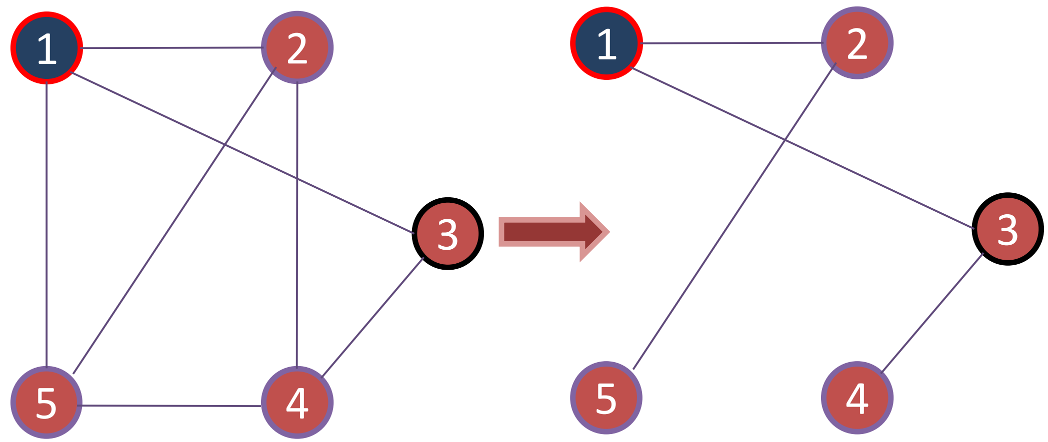
Διατήρηση απόστασης ΙΙ



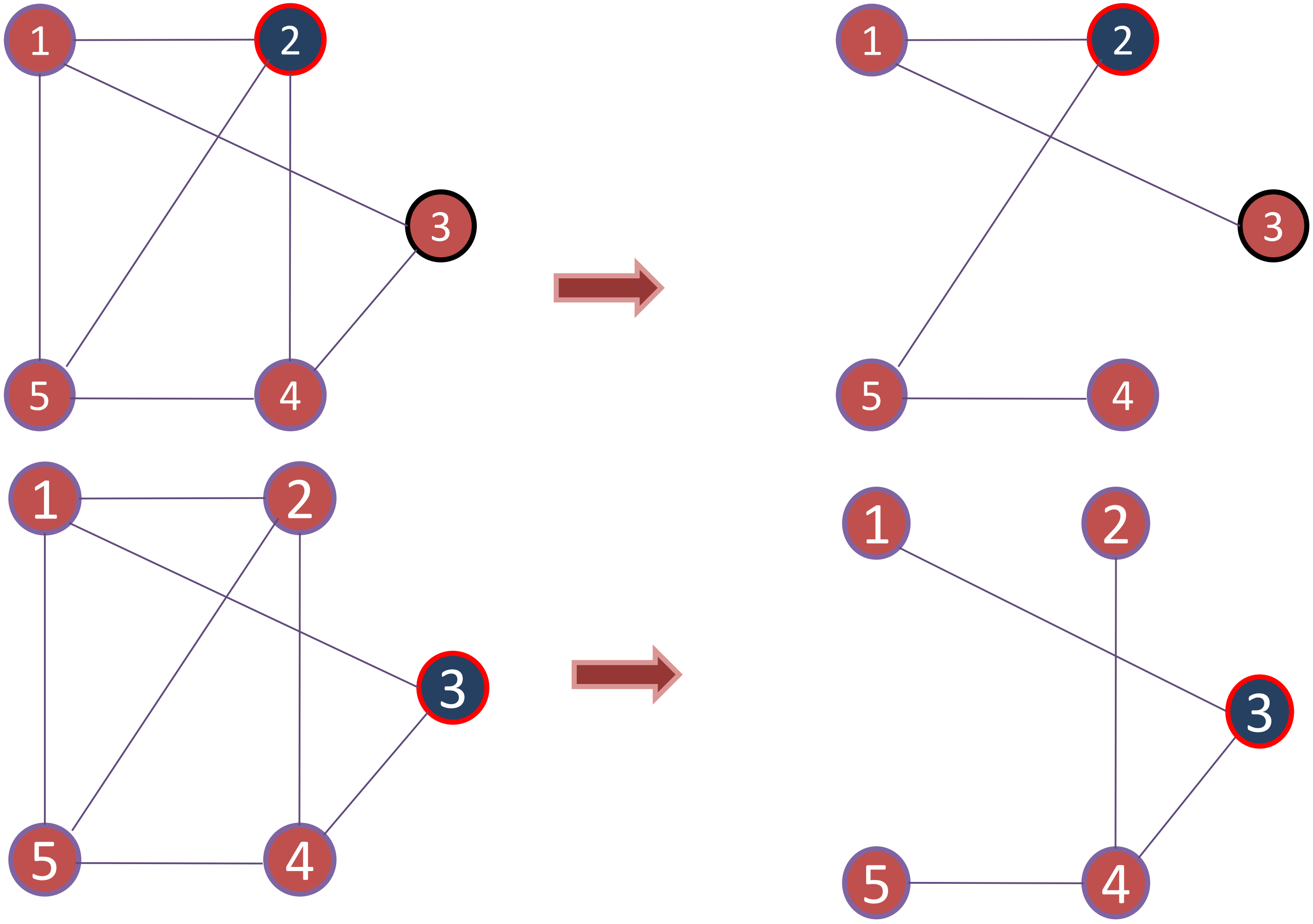
Διατήρηση απόστασης – Παράδειγμα Ι

Θεώρημα:

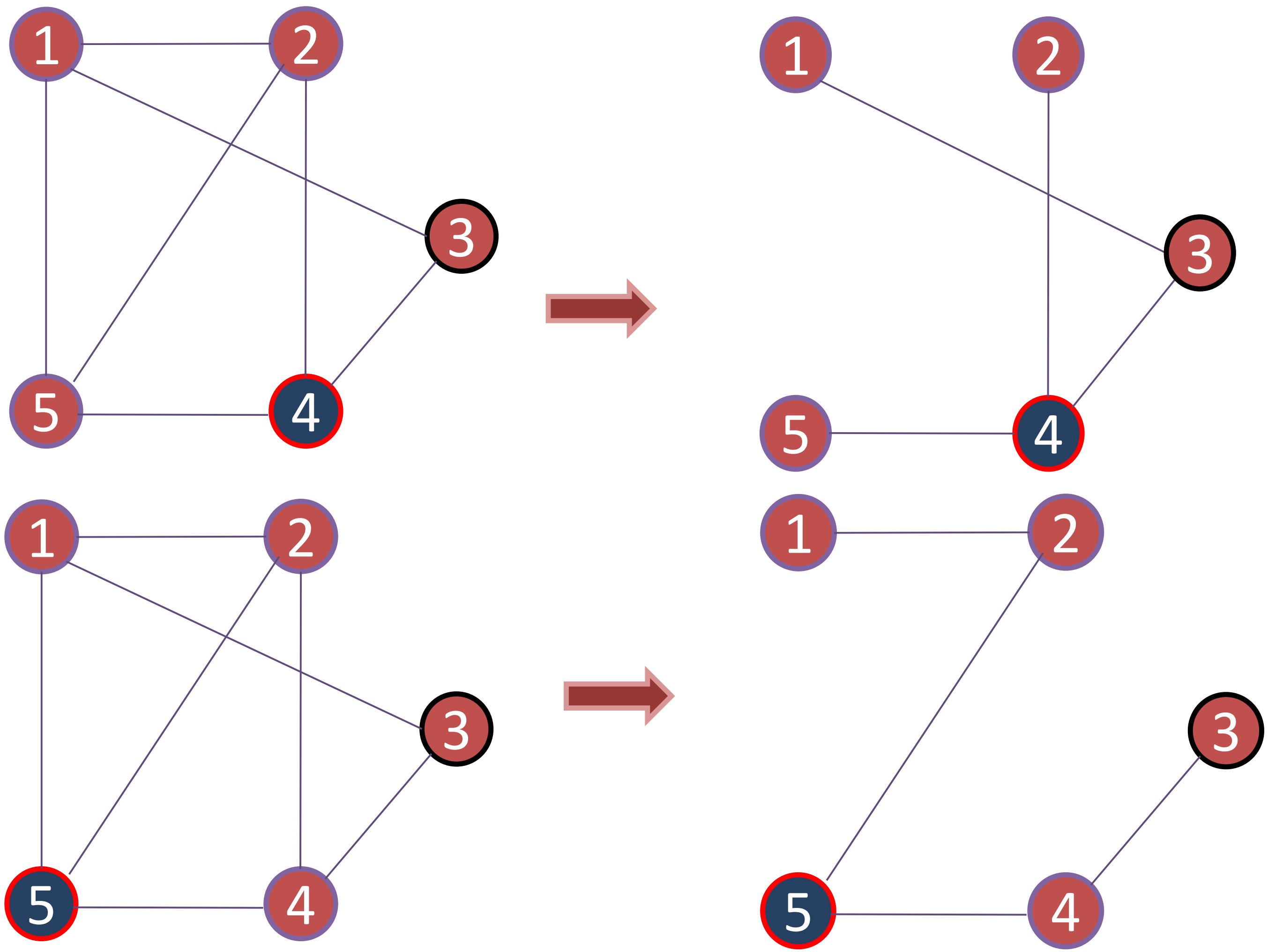
Για κάθε κορυφή v ενός συνδεδεμένου γράφου *G*, υπάρχει ένα ζευγνύον δένδρο που **διατηρεί την απόσταση.**



Διατήρηση απόστασης – Παράδειγμα ΙΙ



Διατήρηση απόστασης – Παράδειγμα ΙΙΙ



Το πρόβλημα του συνδέσμου Ι

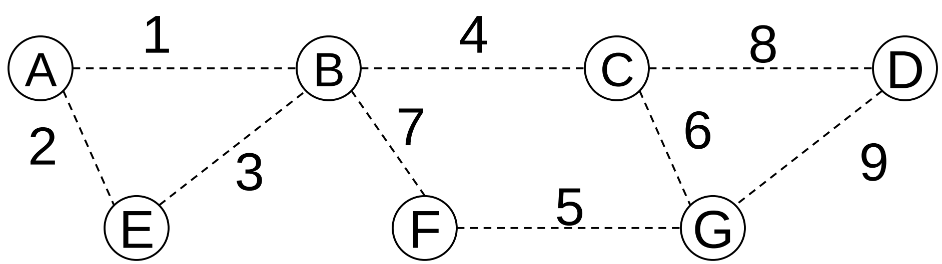
- Το πρόβλημα του συνδέσμου (connector problem) σε γράφο εξετάζει την εύρεση ενός δένδρου που ονομάζεται ελάχιστο και είναι το ζευγνύον δένδρο με το ελάχιστο βάρος (για ζυγισμένους γράφους).
- **Ελάχιστο Ζευγνύον Δένδρο** – Minimum Spanning Tree Στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως **MST**

Το πρόβλημα του συνδέσμου II

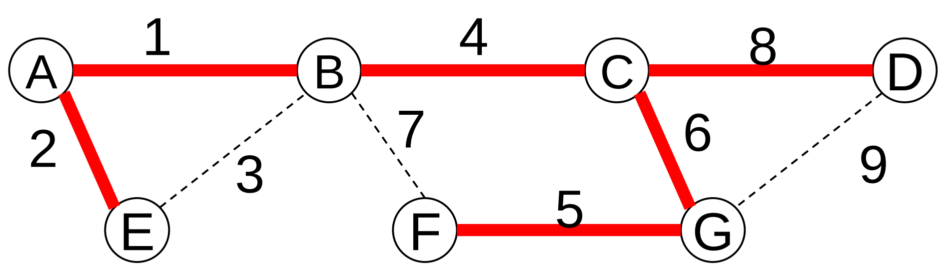
- Εφαρμογή MST
  - στη σχεδίαση δικτύων: τηλεπικοινωνιακό, ηλεκτρικό, οδικό, υδραυλικό, υπολογιστικό, καλωδιακής τηλεόρασης, κλπ
  - στην ομαδοποίησης-clustering
  - σε προσεγγιστικούς αλγορίθμους για NP προβλήματα (TSP)

Παράδειγμα MST

Είσοδος



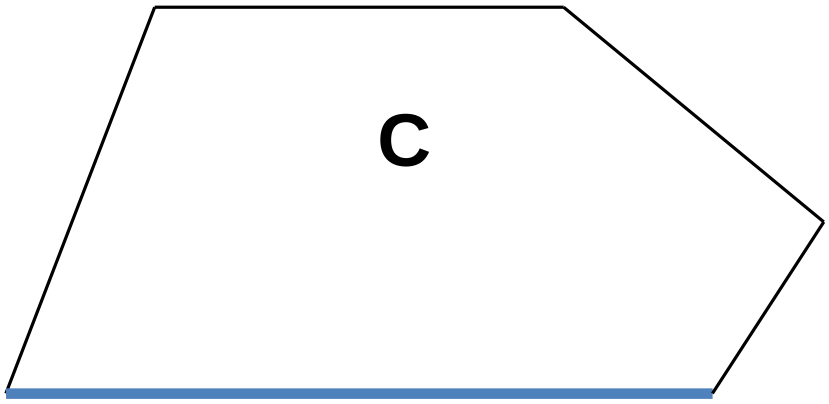
Έξοδος



Αν τα βάρη των ακμών είναι διακριτοί αριθμοί, τότε το MST είναι μοναδικό. Αλλιώς μπορεί να υπάρχουν πολλά ισοδύναμα MST.

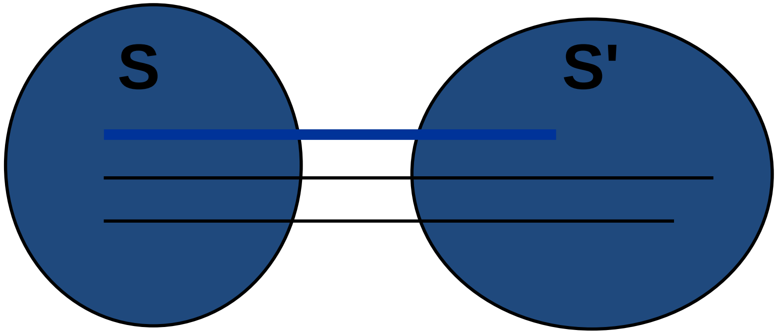
Δύο ιδιότητες των MST: Cycle Property

- Cycle Property:
  Για κάθε κύκλο C στο γράφο, η βαρύτερη ακμή του C δεν εμφανίζεται στο MST
  - Χρησιμοποιείται για να εξαιρέσουμε ακμές

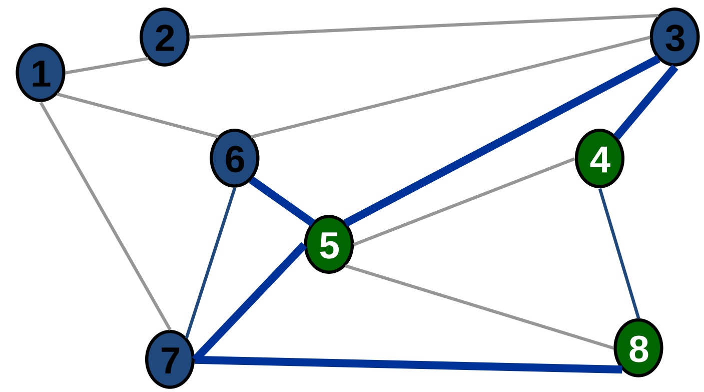


Δύο ιδιότητες των MST: Cut Property

- Cut Property:
  Για κάθε μη κενό υποσύνολο κορυφών S, η ελαφρύτερη ακμή που προσπίπτει σε μία μόνο κορυφή του S ανήκει στο MST
  - Χρησιμοποιείται για να μην εξαιρέσουμε ακμές

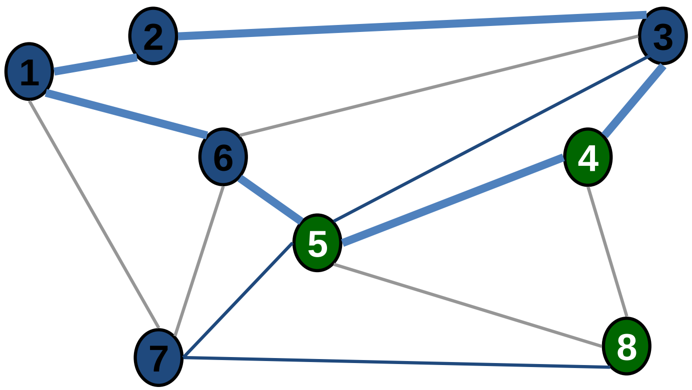


Παράδειγμα cycle - cut



S = {4,5,8}

Cut = {4,3},{5,3},{5,6},{5,7},{8,7}

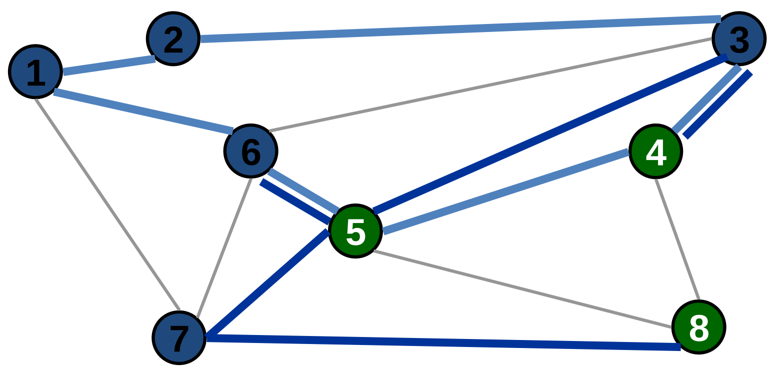


Path = 1-2-3-4-5-6-1

Cycle = {1,2},{2,3},{3,4},{4,5},{5,6},{6,1}

Τομή cycle-cut

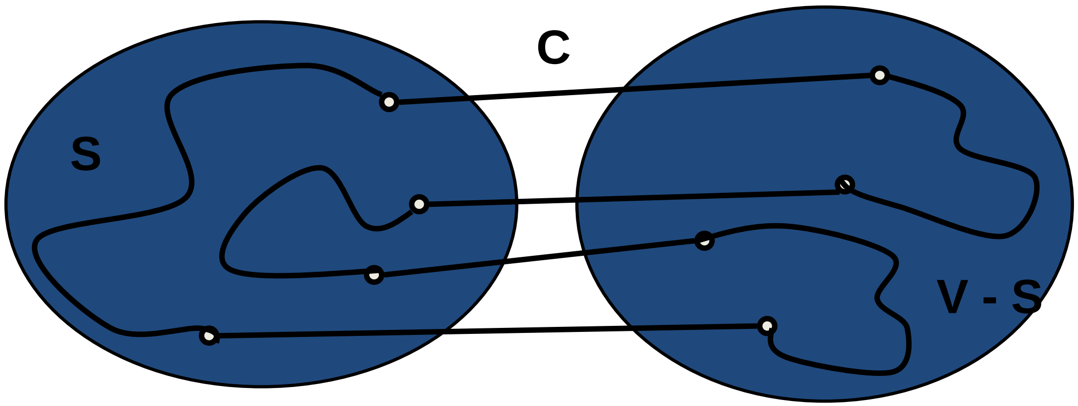
Η τομή ενός cycle και ενός cut είναι ένας άρτιος αριθμός ακμών.



Intersection = {3,4},{5,6}

Τομή cycle-cut – Απόδειξη

Απόδειξη



Τρεις κλασικοί άπληστοι αλγόριθμοι

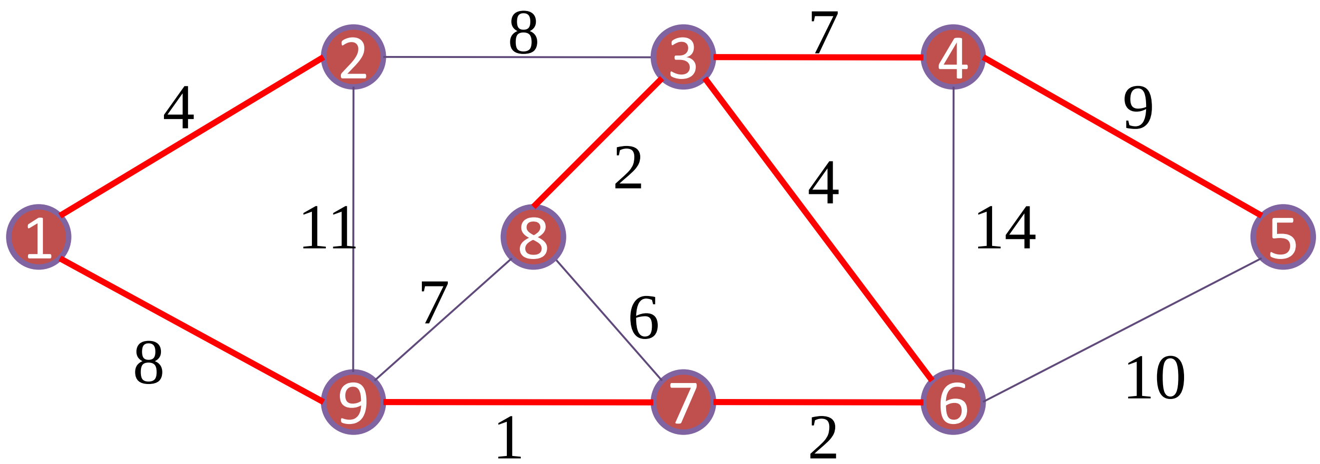
- Kruskal
  - Επιλέγουμε την ελαφρύτερη ακμή που δεν δημιουργεί κύκλο
- Prim
  - Επιλέγουμε τυχαία μία πρώτη κορυφή v
  - Κάθε φορά, έχουμε μία συνδεδεμένη συνιστώσα N που περιέχει τη v και κάποιους άλλους κόμβους V-N
  - Επιλέγουμε την ελαφρύτερη ακμή από N προς V-N
- Boruvka
  - Prim "εν παραλλήλω"
- και ... Αντίστροφης διαγραφής
  - Kruskal αντίστροφος

Αλγόριθμος Kruskal (1956)

1. Αρχικά το δένδρο T είναι κενό.
   Θέτουμε $i=0$. Οι ακμές ταξινομούνται κατά μη φθίνον βάρος.
2. Εισάγεται στο T η επόμενη ακμή που δεν ανήκει ήδη στο T και δεν δημιουργεί κύκλο. Θέτουμε $i=i+1$
3. Αν $i<n-1$, τότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Θεώρημα: Ο αλγόριθμος Kruskal δίνει ένα ζευγνύον δένδρο με ελάχιστο βάρος.

Αλγόριθμος Kruskal – Παράδειγμα



Δεν λαμβάνεται η ακμή (8,9) διότι δημιουργείται κύκλος.

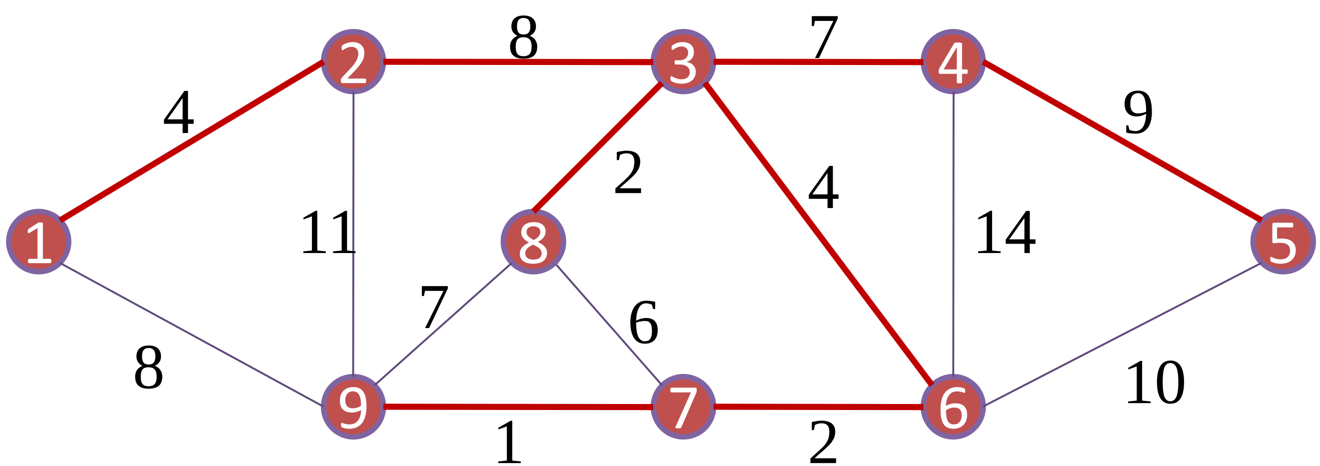
Δεν λαμβάνεται η ακμή (2,3) διότι δημιουργείται κύκλος

Αλγόριθμος Prim (1957)

1. Στο αρχικό δένδρο T εισάγεται μία τυχαία κορυφή v. Θέτουμε i=0.
2. Από το σύνολο των ακμών που πρόσκεινται στις κορυφές του T επιλέγεται εκείνη με το μικρότερο βάρος και εισάγεται στο T. Θέτουμε i=i+1
3. Αν i<n, τότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

<u>**Θεώρημα:**</u> Ο αλγόριθμος Prim δίνει ένα ζευγνύον δένδρο με ελάχιστο βάρος.

Αλγόριθμος Prim – Παράδειγμα



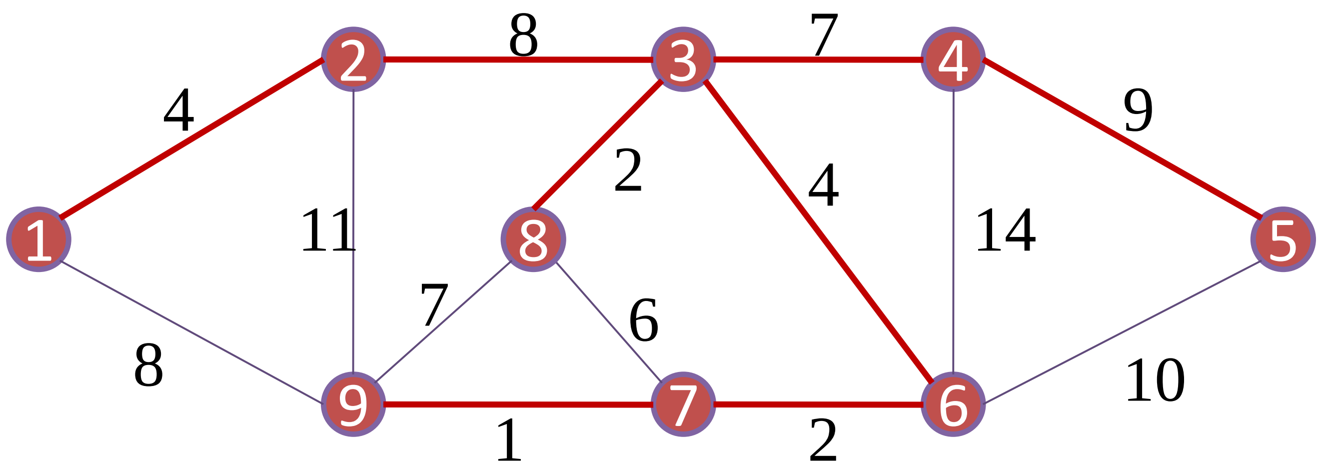
Αλγόριθμος Boruvka (1957)

1. Ενώνουμε κάθε κόμβο u με τον κοντινότερο γείτονά του.
   Σχηματίζεται δάσος F από F’ δένδρα.

2. Ενώνουμε κάθε δένδρο του F με το κοντινότερό του δένδρο.
   Ανανεώνεται η τιμή του F’.

3. Αν F’ > 1, τότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Αλγόριθμος Boruvka – Παράδειγμα

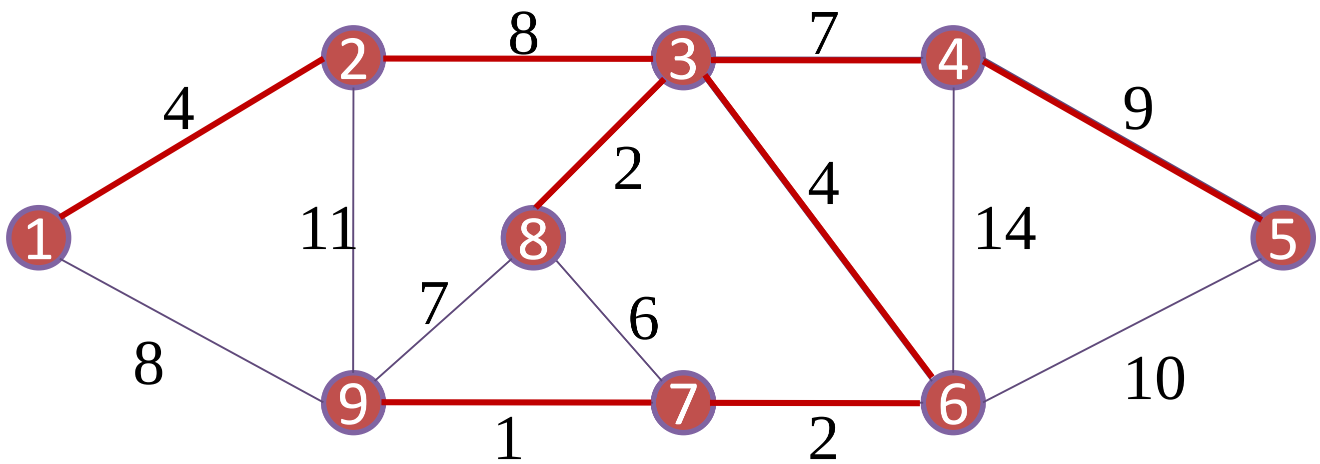


Αλγόριθμος αντίστροφης διαγραφής

Ο αλγόριθμος **αντίστροφης διαγραφής** (reverse-delete**)** είναι «αντίστροφος» του αλγορίθμου Kruskal

1. Θέτουμε i=m. Οι ακμές ταξινομούνται κατά μη αύξον βάρος.
2. Διαγράφεται η βαρύτερη ακμή αν δεν είναι γέφυρα. Θέτουμε i=i–1
3. Αν i>n–1, τότε πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Αλγόριθμος αντίστροφης διαγραφής – Παράδειγμα



Πολυπλοκότητες αλγορίθμων Ι

- Οι πολυπλοκότητες εξαρτώνται από τις υλοποιήσεις
    - αναπαράσταση γράφου (πίνακας γειτνίασης ή δυναμική λίστα)
    - άλλες χρησιμοποιούμενες δομές (set, heaps, κλπ)
- Kruskal
    - Disjoint set
O(m logm)
- Boruvka
    - O(m logn)

Πολυπλοκότητες αλγορίθμων ΙΙ

- Prim
  - Adjacency matrix $O(n^2)$
  - Binary heap, adjacency list $O(m \log n)$
  - Fibonacci heap, adjacency list $O(m + n \log n)$
- Reverse-deletion
  - $O(m \log m)$ για ταξινόμηση
  - $O(n+m)$ για bridge detection, Tarjan
  - m επαναλήψεις
  - Άρα, $O(m^2)$

Νεότεροι αλγόριθμοι MST

- Αλγόριθμοι βασισμένοι στις συγκρίσεις
  - $O(m \log n)$ Jarník, Prim, Dijkstra, Kruskal, Boruvka
  - $O(m \log \log n)$ Cheriton-Tarjan (1976), Yao (1975)
  - $O(m\, \beta(m,n))$ Fredman-Tarjan (1987)
  - $O(m \log \beta(m,n))$ Gabow-Galil-Spencer-Tarjan (1986)
  - $O(m\, \alpha(m, n))$ Chazelle (2000)
- Άλλοι αλγόριθμοι
  - $O(m)$ randomized Karger-Klein-Tarjan (1995)
  - $O(m)$ verification Dixon-Rauch-Tarjan (1992)

Γενικότερα προβλήματα

- Ζευγνύον δέντρο με περιορισμό βαθμού k, π.χ. σε ηλεκτρικό κύκλωμα
(αν k=2 τότε είναι το TSP πρόβλημα).
- Σε ζυγισμένο γράφο G(V,E) και για σύνολο $V' \subset V$ να βρεθεί το ζευγνύον δέντρο με το ελάχιστο βάρος που συνδέει τις κορυφές του V΄, μέσω πιθανώς μερικών κορυφών ακόμα (Steiner points).

Εφαρμογή: Ομαδοποίηση-clustering I

- Δοθέντος συνόλου σημείων σε πολυδιάστατο χώρο, να χωρισθούν τα σημεία σε διακριτές ομάδες, έτσι ώστε τα σημεία μίας ομάδας να είναι κοντά μεταξύ τους, ενώ τα σημεία διαφορετικών ομάδων να απέχουν περισσότερο.
- Αντικείμενο της Αναγνώρισης Προτύπων, της Τεχνητής Νοημοσύνης, της Εξόρυξης Δεδομένων

Εφαρμογή: Ομαδοποίηση-clustering II

- Εφαρμογές
  - Εξόρυξη Δεδομένων/Κειμένου,
  - Ανάκτηση Πληροφορίας
  - Ανάλυση Παγκόσμιου Ιστού, Βιβλιομετρική
  - Μάρκετινγκ, Χρηματο-οικονομικά
  - Ανάλυση Εικόνων, Βιοπληροφορική
  - κλπ

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.