ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων

Ενότητα # **10**: Χρωματισμός

Ιωάννης Μανωλόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Χρωματισμός

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

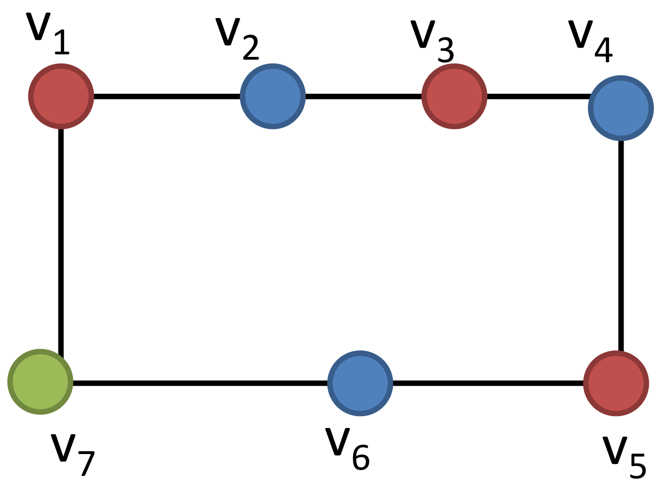
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

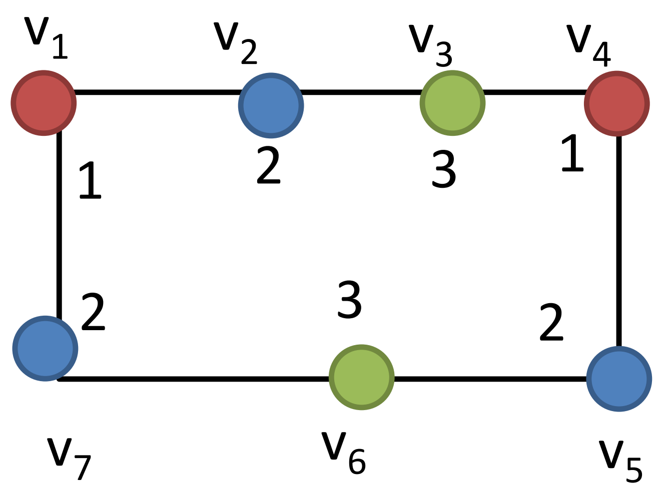
Χρωματισμός κορυφών

- **Χρωματισμός** –coloring– ενός γράφου είναι η απόδοση χρωμάτων στις κορυφές του, ώστε να μην υπάρχουν γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα
- **Χρωματική τάξη** -color class- είναι το σύνολο κορυφών με το ίδιο χρώμα
- Επίσης διακρίνουμε χρωματισμό ακμών και χρωματισμό περιοχών

Παράδειγμα

- Ο επόμενος γράφος C_7 έχει χρωματιστεί με 3 χρώματα. Αριστερά χρησιμοποιούνται οι χρωματικές τάξεις $\{v_1,v_3,v_5\},\{v_2,v_4,v_6\},\{v_7\}$, ενώ δεξιά οι χρωματικές τάξεις $\{v_1,v_4\},\{v_2,v_5,v_7\},\{v_3,v_6\}$





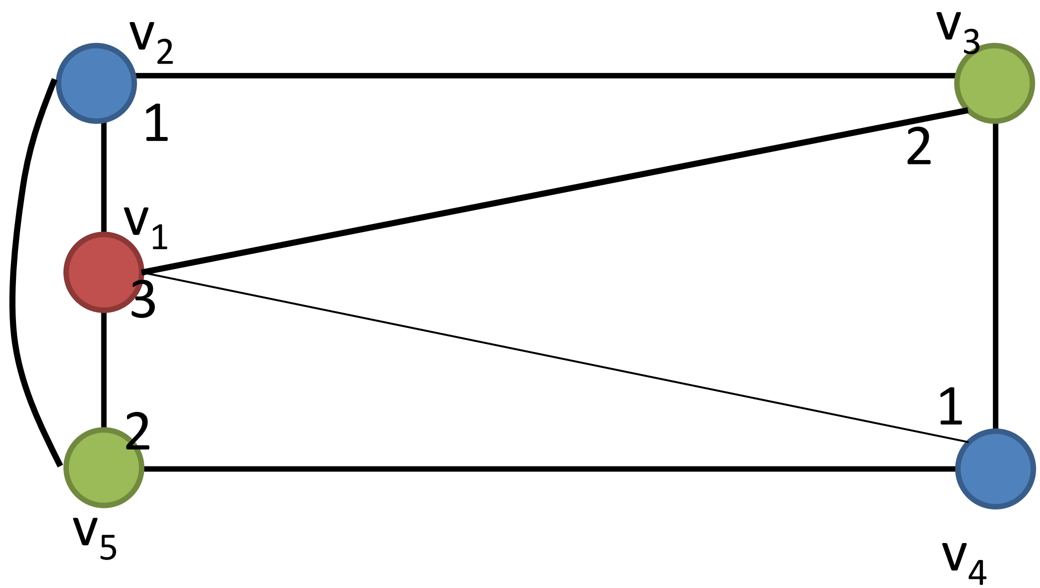
Χρωματικός Αριθμός Ι

- Ένα γράφος χωρίς βρόχους λέγεται ***k*-χρωματίσιμος** (*k*-colorable), αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματισθούν με *k* το πολύ χρώματα
- **Γράφος *k*-χρωματικός** (*k*-chromatic): οι κορυφές του μπορούν να χρωματισθούν με *k* χρώματα, αλλά όχι με *k*–1. Άρα, ένας *k*-χρωματικός δεν είναι (*k*–1)-χρωματίσιμος
- **Χρωματικός αριθμός** (chromatic number): είναι ο μικρότερος αριθμός χρωμάτων $\chi(G)=k$ που χρειάζονται για να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός γράφου, έτσι ώστε 2 γειτονικές κορυφές του να έχουν διαφορετικό χρώμα

Χρωματικός Αριθμός ΙΙ

- Αν ένας γράφος G είναι k-χρωματίσιμος, τότε $\chi(G) \leq k$, ενώ αν είναι k-χρωματικός τότε $\chi(G)=k$
- Αν ένα γράφος G είναι p-χρωματίσιμος ($p>\chi(G)$), τότε ο γράφος G είναι και r-χρωματίσιμος ($p>r>\chi(G)$)

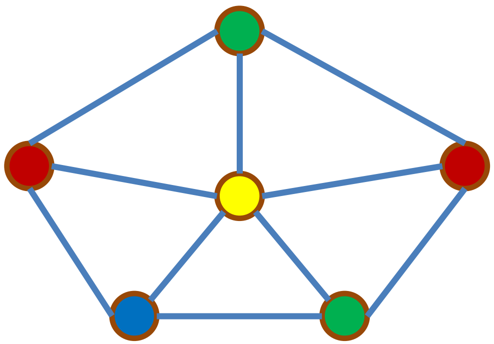
Μοναδικά χρωματίσιμος γράφος



- **Γράφος χρωματίσιμος κατά μοναδικό τρόπο** -uniquely colorable- είναι εκείνος που έχει ένα συγκεκριμένο σύνολο χρωματικών τάξεων, χωρίς να είναι δυνατό να κατασκευαστεί ένα διαφορετικό σύνολο.
- Ο επόμενος γράφος έχει χρωματικές τάξεις: $\{v_1\}$, $\{v_2,v_4\}$, $\{v_3,v_5\}$

Κρίσιμος γράφος

- **Κρίσιμος** (critical) γράφος: $\chi(H)<\chi(G)$, για κάθε $H\subset G$
- ***k*-κρίσιμος** (*k*-critical) γράφος: ο G είναι κρίσιμος και k-χρωματικός
- **Θεώρημα**: Αν ο G είναι k-κρίσιμος, τότε $d(G)\geq k-1$



4-κρίσιμος γράφος

Τέλειος γράφος

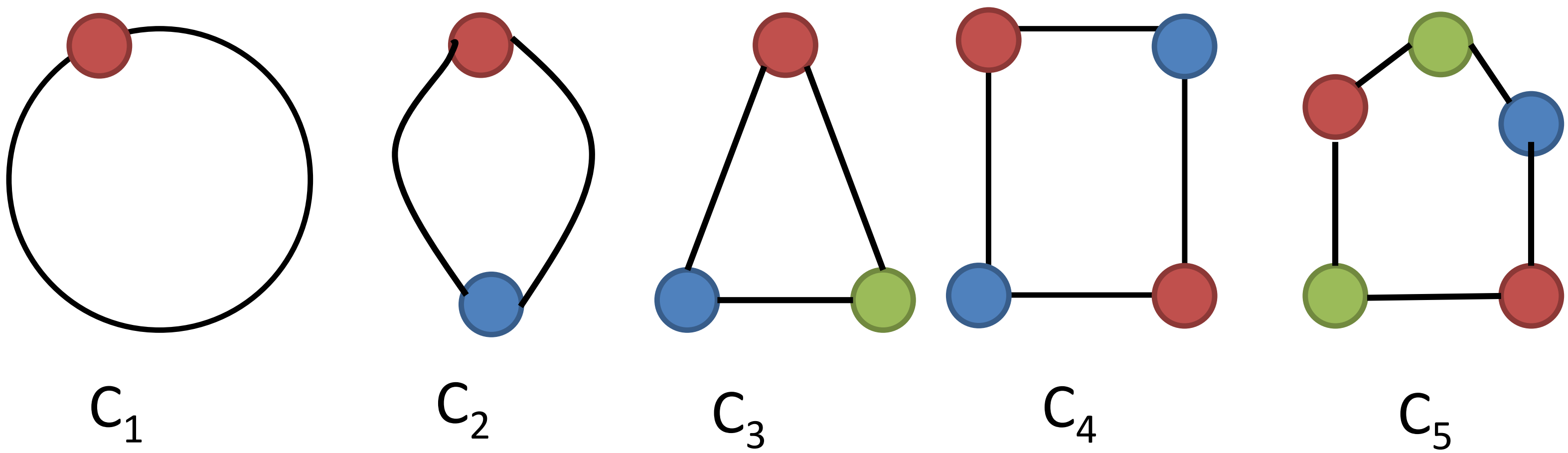
- **Κλίκα** –clique- ενός γράφου G είναι ο μέγιστος πλήρης υπογράφος H του G.
- **Τάξη** –order- της κλίκας λέγεται αριθμός της κλίκας $\omega(G)$
- **Τέλειος** –perfect- γράφος: αριθμός κλίκας $\omega(G)=\chi(G)$

Περιπτώσεις χρωματισμού

- $\chi(K_n)=n$.
- $\chi(N_n)=1$.
- $\chi(K_{m,n})=2$.
- $\chi(T)=2$.
- $\chi(G)=2$, αν ο $G \neq N_n$ δεν περιέχει κύκλο περιττού μήκους.

Χρωματισμός κύκλου

- $\chi(C_{2n})=2$
- $\chi(C_{2n+1})=3$

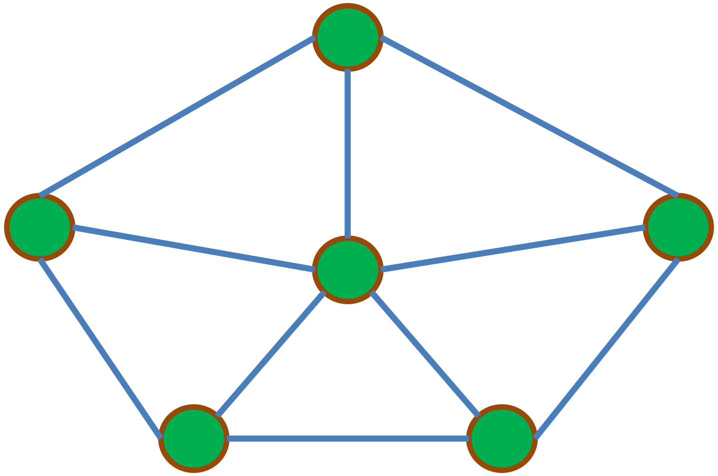


Τροχοειδής γράφος Ι

- Ο **τροχοειδής γράφος** W_n περιέχει ένα κύκλο τάξης n-1 (C_{n-1}) και κάθε κορυφή αυτού του κύκλου συνδέεται με μια άλλη κορυφή που ονομάζεται **κομβικό σημείο** (hub).

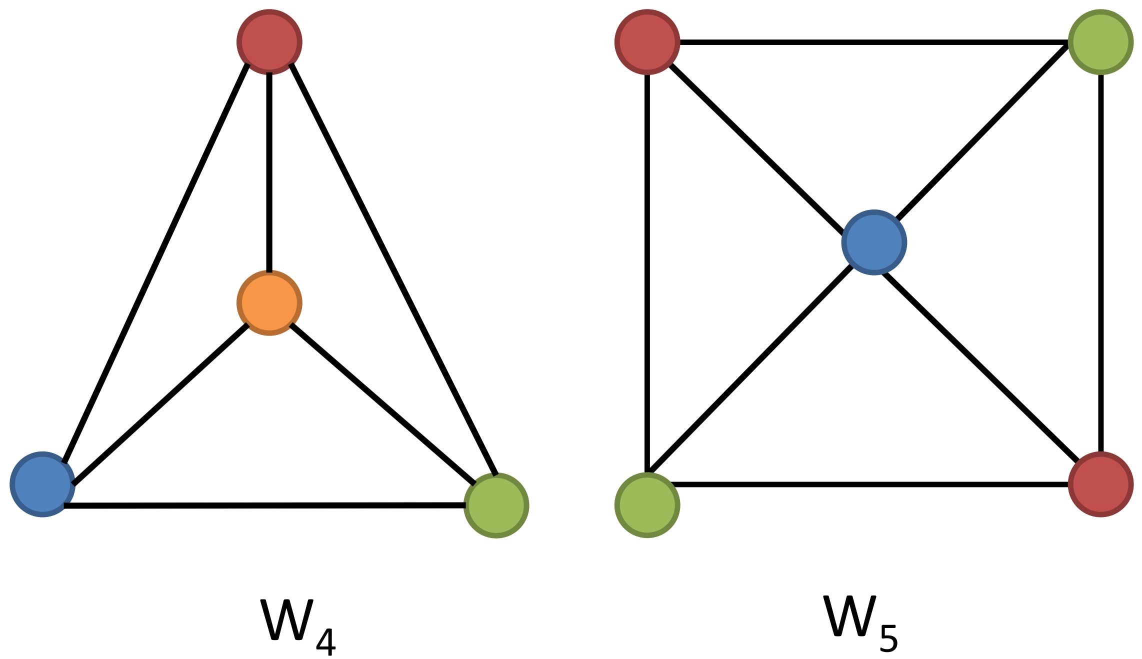
Τροχοειδής γράφος ΙΙ

- Οι ακμές του γράφου που περιέχουν το κομβικό σημείο λέγονται **ακτίνες** (spokes)



Χρωματικός αριθμός του W_n

- $\chi(W_{2n})$=4
- $\chi(W_{2n+1})$=3



Διγράφος

- Κάθε 2-χρωματικός γράφος είναι διμερής, γιατί οι κορυφές του μπορούν να διαχωρισθούν σε 2 υποσύνολα V_1 και V_2, έτσι ώστε να μην υπάρχει ακμή που να ενώνει κορυφές του ίδιου συνόλου.
- Κάθε διμερής γράφος δεν είναι 2-χρωματικός. Π.χ ο μηδενικός γράφος N_n με n κορυφές και m=0 ακμές μπορεί να θεωρηθεί διμερής αλλά είναι 1-χρωματικός

Κάποια θεωρήματα

- **Θεώρημα**: Κάθε απλός γράφος μέγιστου βαθμού κορυφών D είναι (D+1)-χρωματίσιμος, δηλαδή $\chi(G) \leq D+1$
- **Θεώρημα** (Brooks 1941): Κάθε απλός και συνδεδεμένος γράφος $G \neq K_n$ με $D(G) \geq 3$ είναι D-χρωματίσιμος, δηλαδή $\chi(G) \leq D$
- **Θεώρημα** (Brooks 1941 - άλλη διατύπωση): Κάθε απλός και συνδεδεμένος γράφος $G \neq K_n$ που δεν είναι κυκλικός γράφος περιττού μήκους ($G \neq C_{2n+1}$) είναι D-χρωματίσιμος, δηλαδή $\chi(G) \leq D$

Άνω όρια χρωματικού αριθμού

- **Ερώτημα**: Ποιός είναι ο χρωματικός αριθμός ενός γράφου G;
- **Απάντηση**: $r \leq \chi(G) \leq n$, αν υπάρχει υπογράφος K_r
- Πιθανά άνω όρια του $\chi(G)$
  – n, ο αριθμός των κορυφών του G
  – D+1, όπου D ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του G (Θεώρημα)
  – D, όπου D είναι ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του G (Θεώρημα Brooks) με την προϋπόθεση ότι $G \neq K_n$ ή C_n (για περιττό n)

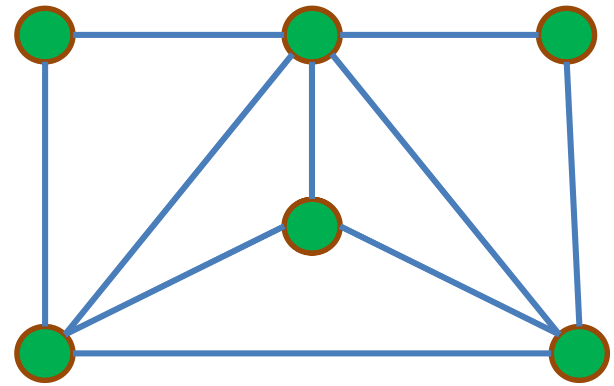
Κάτω όρια χρωματικού αριθμού

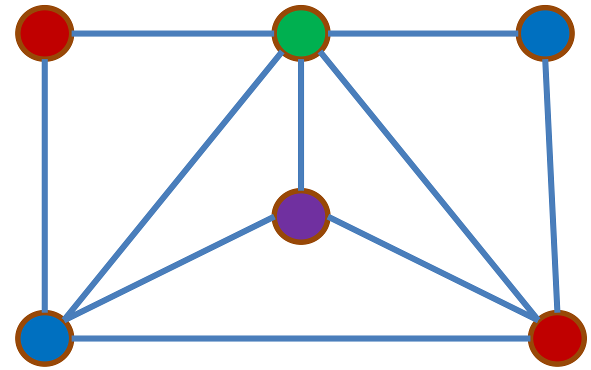
- Πιθανά κάτω όρια του $\chi(G)$
  - Η τάξη της μέγιστης κλίκας K_r του G
- Το θεώρημα του Brooks δεν δίνει πάντα ένα καλό επάνω όριο.
- Έστω ο πλήρης διμερής γράφος $K_{1,12}$ (αστεροειδής). Από το θεώρημα Brooks προκύπτει $\chi(G) \leq 12$, ενώ ισχύει $\chi(G)=2$

Άσκηση 1

Να προσδιοριστεί ο χρωματικός αριθμός για τον επόμενο γράφο

- Λύση: Ο G περιέχει τον K_4, άρα $\chi(G) \geq 4$.
  Δίπλα δείχνεται ένας χρωματισμός του G με 4 χρώματα.
  Άρα $\chi(G) \leq 4$. Συνεπώς $\chi(G)=4$

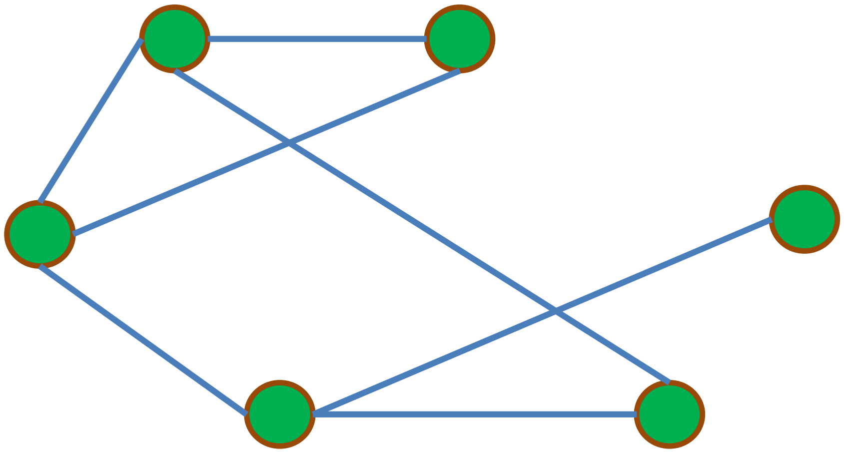




Άσκηση 2 Ι

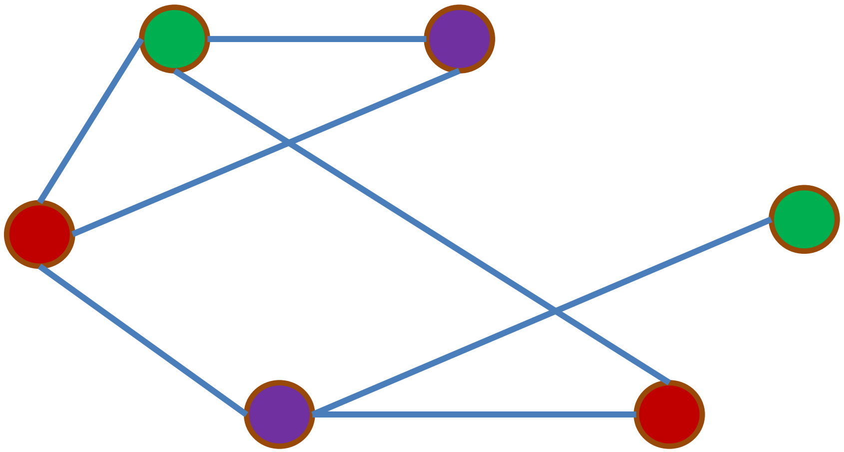
Για τον επόμενο γράφο *G*, υπολογίστε:

- Τη μικρότερη τιμή του $\chi(G)$ με βάση την τάξη του μεγαλύτερου πλήρους υπογράφου
- Τη μεγαλύτερη τιμή του $\chi(G)$ με βάση το Θεώρημα Brooks
- Την τελική τιμή του $\chi(G)=k$ καθώς και έναν k-χρωματισμό του *G*



Άσκηση 2 ΙΙ

- **Λύση**:
  Επειδή περιέχεται ο πλήρης γράφος $K_3 \Rightarrow$ $\chi(G) \geq 3$. Από Brooks $\Rightarrow$ $\chi(G) \leq D=3$. Τιμή που προκύπτει από τον επόμενο χρωματισμό $\chi(G)=3$



Αποθήκευση ασύμβατων προϊόντων

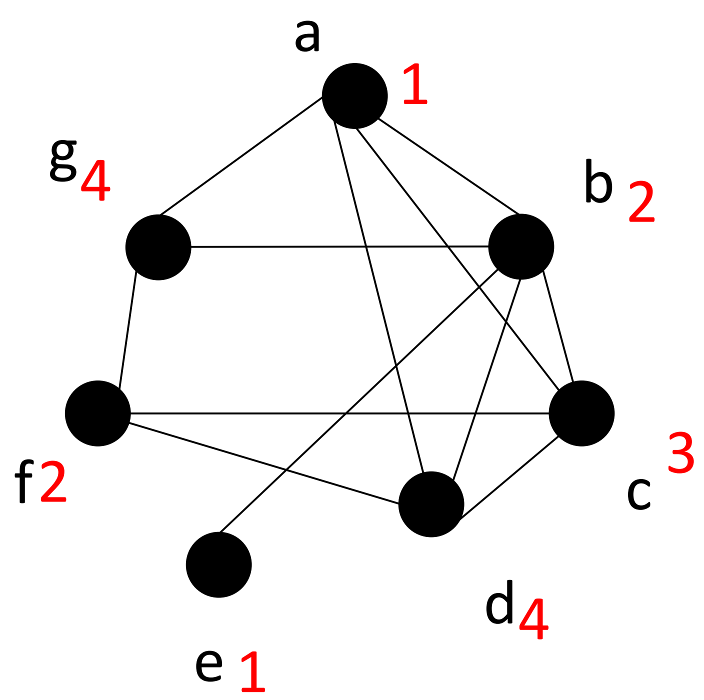
- **Πρόβλημα**: μια εταιρεία παραγωγής χημικών προϊόντων θέλει να τα αποθηκεύσει σε μια αποθήκη. Μερικά προϊόντα αντιδρούν με κάποια άλλα όταν έρθουν σε επαφή. Άρα η αποθήκη πρέπει να διαιρεθεί σε περιοχές ώστε προϊόντα που αντιδρούν μεταξύ τους να μη βρίσκονται στην ίδια περιοχή
- **Ερώτημα**: ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός περιοχών που απαιτείται για την ασφαλή φύλαξη των προϊόντων;

Η Λύση Ι

- Στον πίνακα, ο αστερίσκος δηλώνει ότι το αντίστοιχο ζεύγος χημικών προϊόντων πρέπει να μην έρθουν σε επαφή
- Στο γράφο, οι κορυφές αντιστοιχούν στα προϊόντα και ενώνονται όταν τα αντίστοιχα προϊόντα δεν πρέπει να έρθουν σε επαφή

Η Λύση ΙΙ

	a	b	c	d	e	f	g
a	–	*	*	*	–	–	*
b	*	–	*	*	*	–	*
c	*	*	–	*	–	*	–
d	*	*	*	–	–	*	–
e	–	*	–	–	–	–	–
f	–	–	*	*	–	–	*
g	*	*	–	–	–	*	–



Χρωματισμός επιπεδικών γράφων Ι

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε επίπεδος γράφος είναι 6-χρωματίσιμος

Απόδειξη: Με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών n.

Βήμα 1. Η υπόθεση ισχύει προφανώς για n=1.

Επίσης ισχύει για $n \le 6$

Βήμα 2. Υποθέτουμε ότι οι κορυφές όλων των συνδεδεμένων επίπεδων γράφων με λιγότερες από n κορυφές μπορούν να χρωματιστούν με 6 ή λιγότερα χρώματα.

Βήμα 3. Θα δείξουμε ότι ο χρωματισμός αυτός είναι εφικτός και για γράφους με n κορυφές

Χρωματισμός επιπεδικών γράφων ΙΙ

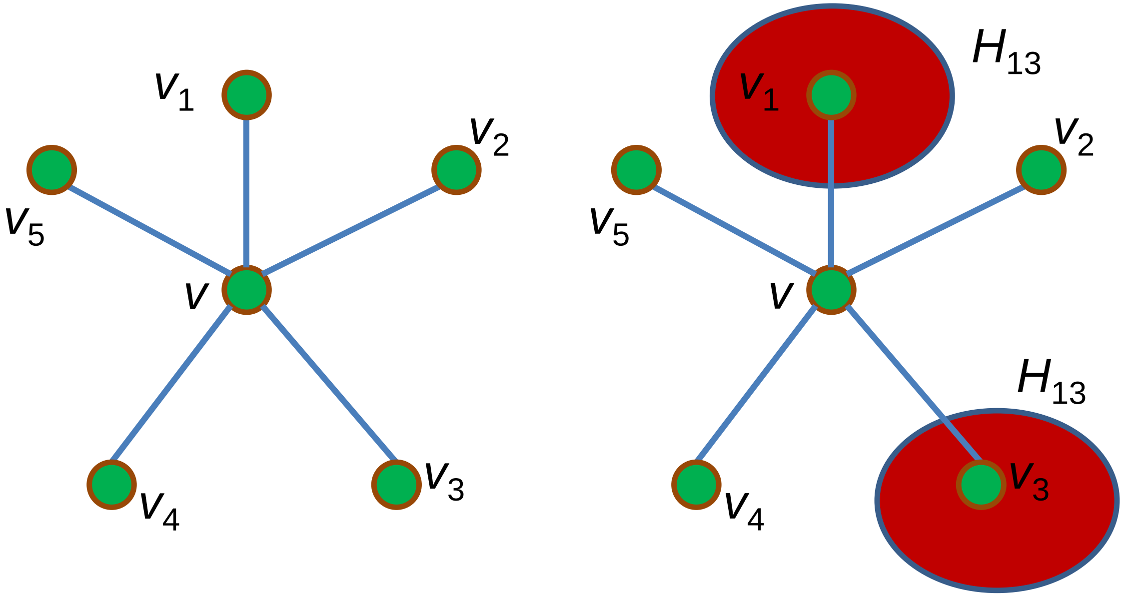
Απόδειξη (συνέχεια): Έστω ότι ο *G* είναι συνδεδεμένος, επίπεδος και έχει *n* κορυφές. Τότε από το Πόρισμα 5.6 έχουμε ότι ο *G* περιέχει μια κορυφή *v* βαθμού $d(v) \leq 5$. Αφαιρούμε την *v* και τις προσκείμενες σε αυτή ακμές, οπότε παίρνουμε το γράφο *H*.

Χρωματισμός επιπεδικών γράφων ΙΙΙ

Απόδειξη (συνέχεια): Ο γράφος *H* επειδή έχει *n*–1 κορυφές μπορεί να χρωματισθεί με 6 το πολύ χρώματα (υπόθεση). Ας ξαναβάλουμε στο *H* την κορυφή *v* και τις προσκείμενες σε αυτήν ακμές. Η *v* έχει το πολύ 5 γειτονικές κορυφές και έχουμε στη διάθεσή μας 6 χρώματα. Οπότε υπάρχει ένα διαθέσιμο χρώμα για την *v*. Άρα ο *G* είναι 6-χρωματίσιμος.

Χρωματισμός επιπεδικών γράφων IV

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε επίπεδος γράφος είναι 5-χρωματίσιμος



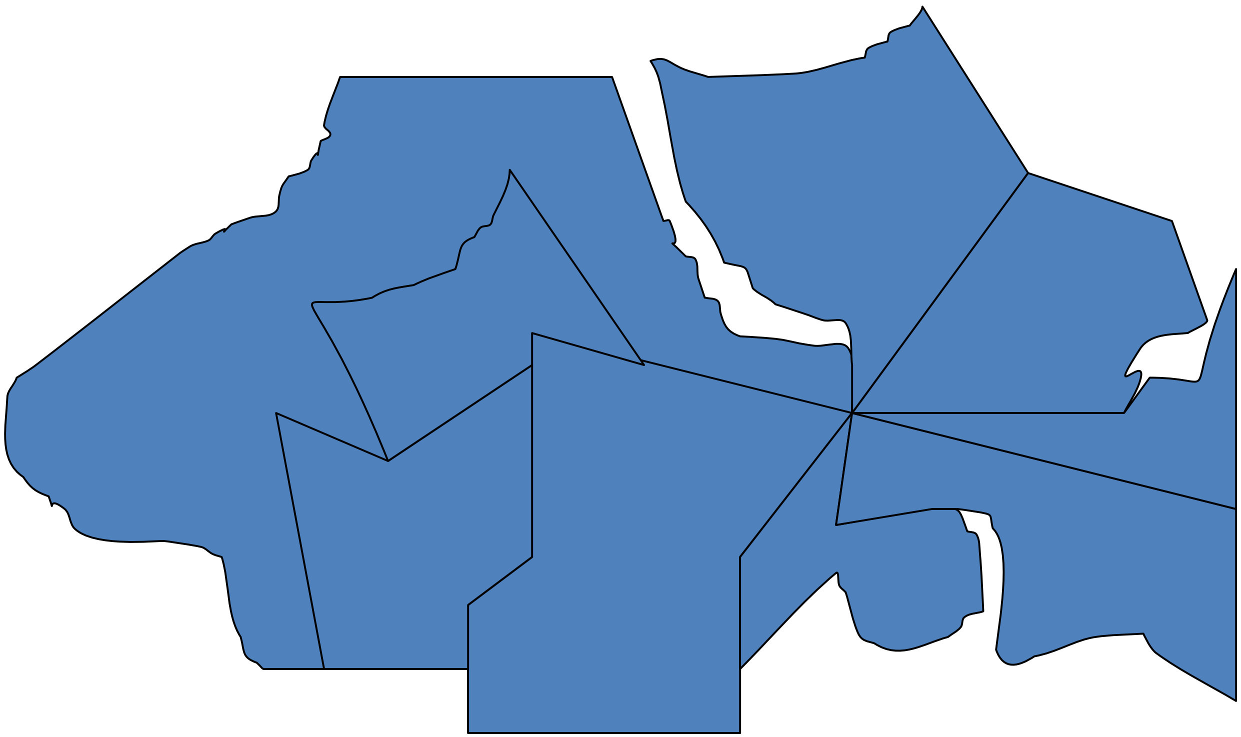
<u>Θεώρημα</u>: Κάθε επίπεδος γράφος είναι 4-χρωματίσιμος

Χρωματισμός χαρτών

- Γράφος ***k*-χρωματίσιμος ως προς περιοχές** (*k*-region colorable): οι περιοχές μπορούν να χρωματισθούν με *k* χρώματα
- **Χρωματισμός χαρτών**: Να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που απαιτούνται για να χρωματισθεί ένας χάρτης, έτσι ώστε δύο γειτονικά κράτη να μην έχουν το ίδιο χρώμα.
- Το πρόβλημα έμεινε άλυτο για 125 χρόνια και έμεινε γνωστό ως η "**Εικασία των 4 χρωμάτων**", επειδή δεν υπήρχε η σχετική απόδειξη αν και ήταν εμπειρικά γνωστό ότι 4 χρώματα ήταν αρκετά

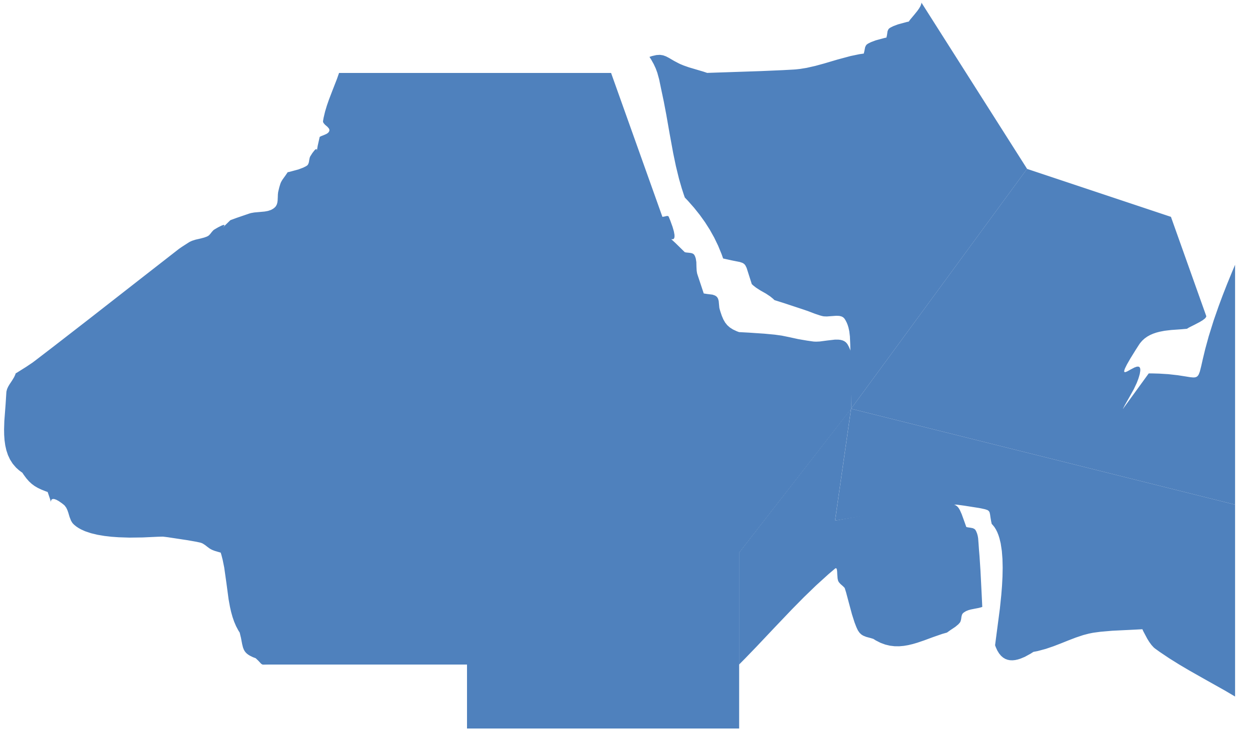
Παράδειγμα Ι

Έστω μία ήπειρος



Παράδειγμα ΙΙ

Διώχνουμε τα σύνορα αλλά θα θέλαμε να διακρίνουμε τις χώρες. Ένα χρώμα δεν είναι αρκετό



Παράδειγμα III

Ας προσθέσουμε ένα ακόμα χρώμα.

Θα γεμίζουμε κάθε χώρα με ένα από τα δύο χρώματα.

Παράδειγμα IV

Ας προσθέσουμε ένα ακόμα χρώμα.

Θα γεμίζουμε κάθε χώρα με ένα από τα δύο χρώματα.

Παράδειγμα V

Ας προσθέσουμε ένα ακόμα χρώμα.

Θα γεμίζουμε κάθε χώρα με ένα από τα δύο χρώματα.

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Παράδειγμα VI

Ας προσθέσουμε ένα ακόμα χρώμα.

Θα γεμίζουμε κάθε χώρα με ένα από τα δύο χρώματα.

Παράδειγμα VII

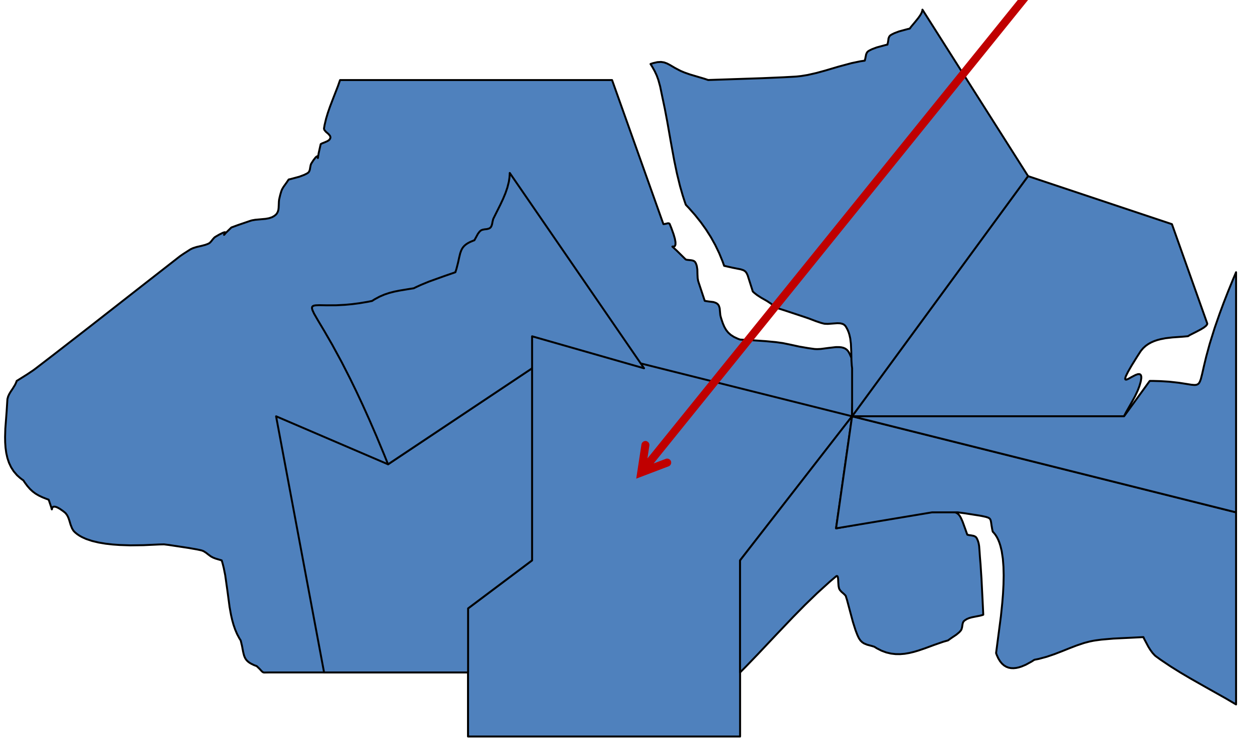
<u>Πρόβλημα:</u> Δύο γειτονικές χώρες θα έχουν ίδιο χρώμα. Δεν φαίνεται το σύνορο.

Παράδειγμα VIII

Ας προσθέσουμε ένα ακόμα χρώμα:

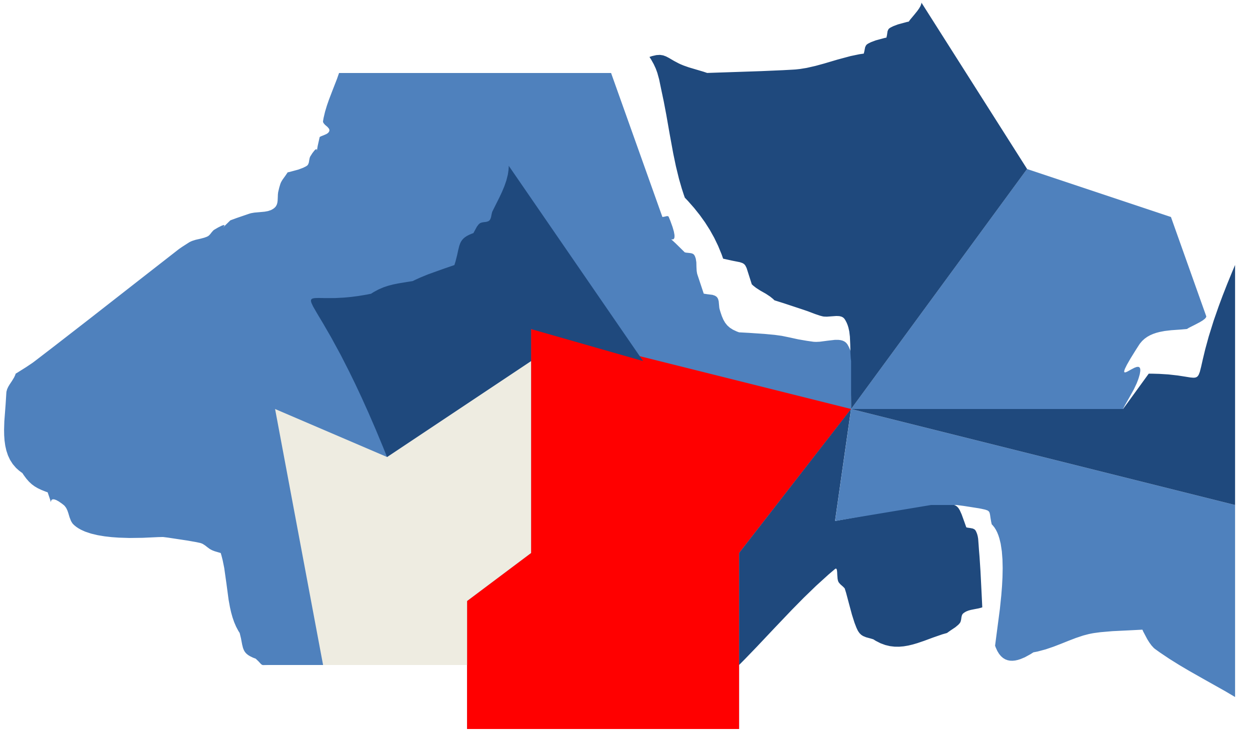
Παράδειγμα IX

Δεν αρκούν. Χρειαζόμαστε 4 χρώματα εξαιτίας αυτής της χώρας



Παράδειγμα Χ

Με 4 χρώματα γίνεται ο χρωματισμός.



4-χρωματισμός χαρτών

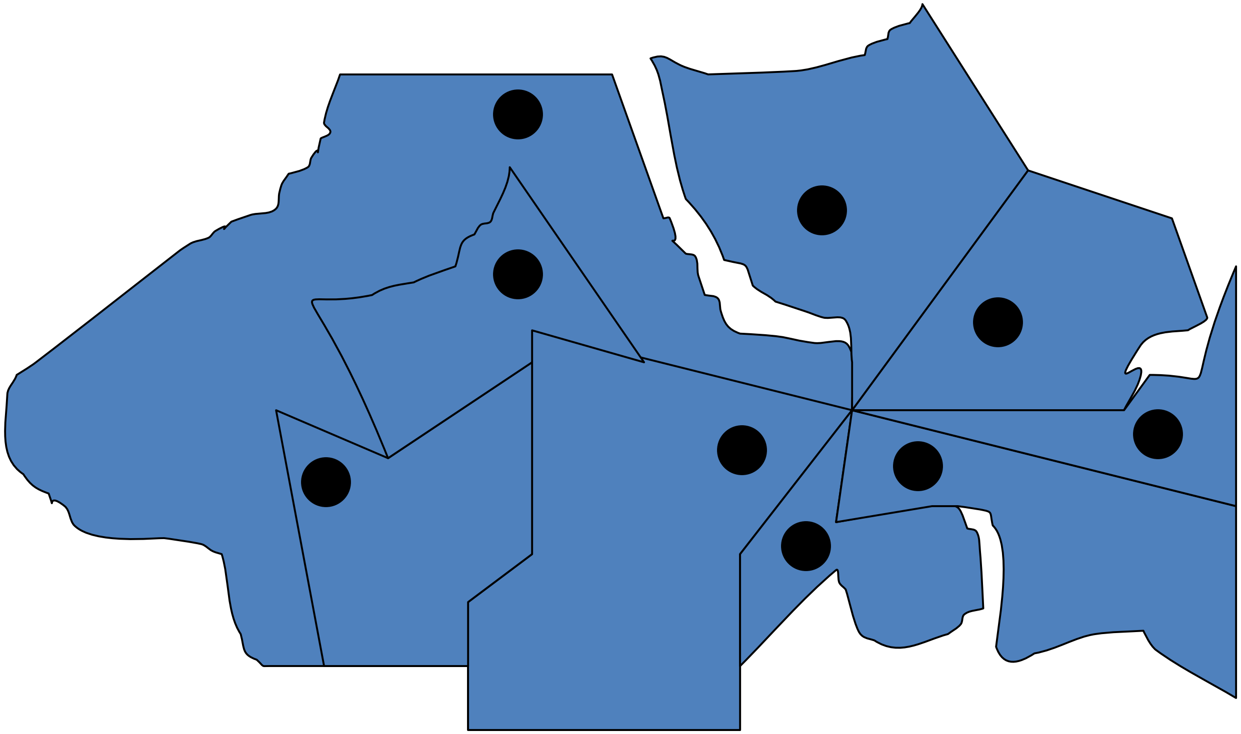
- **<u>Εικασία των 4 χρωμάτων</u>** (4 color conjecture): Κάθε χάρτης μπορεί να χρωματισθεί με 4 χρώματα
  - Guthrie 1850 (παρατήρηση)
  - DeMorgan 1852
  - Hamilton 1852
  - Cayley 1878 (δεν βρήκε λύση)
  - Kempe 1880 (βρήκε λάθος λύση)
  - Heawood 1890 (βρήκε το λάθος της λύσης)
  - Franklin 1920 (για n≤25)
  - Reynolds 1926 (για n ≤ 27)
  - Franklin 1931 (για n ≤ 31)
  - Winn 1943 (για n ≤ 35)
  - Ore-Stemple 1968 (για n ≤ 40)
  - Appel-Haken-Koch 1976 **βρήκαν μια λύση (υπολογιστική)**

Χρωματισμός περιοχών

- **<u>Θεώρημα</u>**: Ένας επίπεδος απλός γράφος G είναι k-χρωματίσιμος (ως προς τις κορυφές), αν και μόνον αν ο γεωμετρικός δυαδικός γράφος G^* είναι k-χρωματίσιμος ως προς τις περιοχές
- **<u>Πόρισμα</u>**: Η εικασία των 4 χρωμάτων για το χρωματισμό περιοχών είναι ισοδύναμη με την εικασία των 4 χρωμάτων για το χρωματισμό των κορυφών επίπεδων γράφων χωρίς βρόχους
- **<u>Θεώρημα</u>**: Ένας χάρτης G είναι 2-χρωματίσιμος ως προς τις περιοχές αν και μόνον αν είναι Eulerian

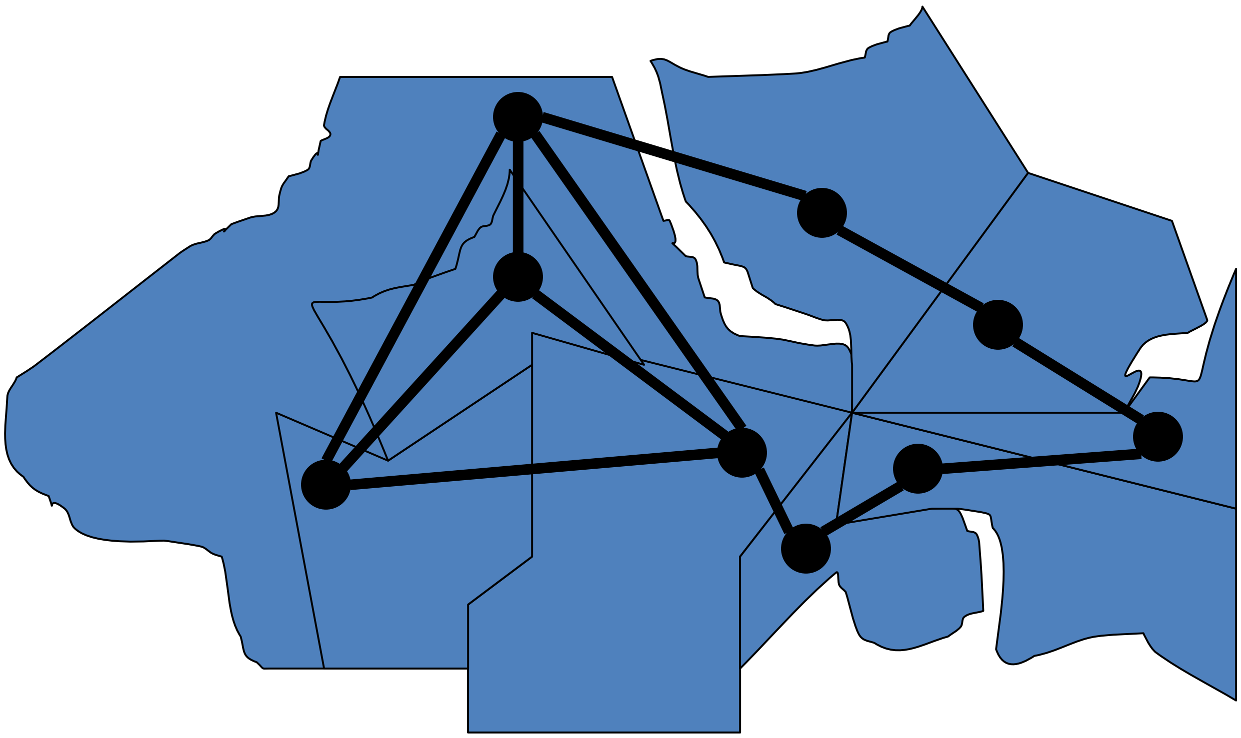
Χρωματισμός χαρτών vs. κορυφών Ι

Σε κάθε περιοχή εισάγεται μία κορυφή



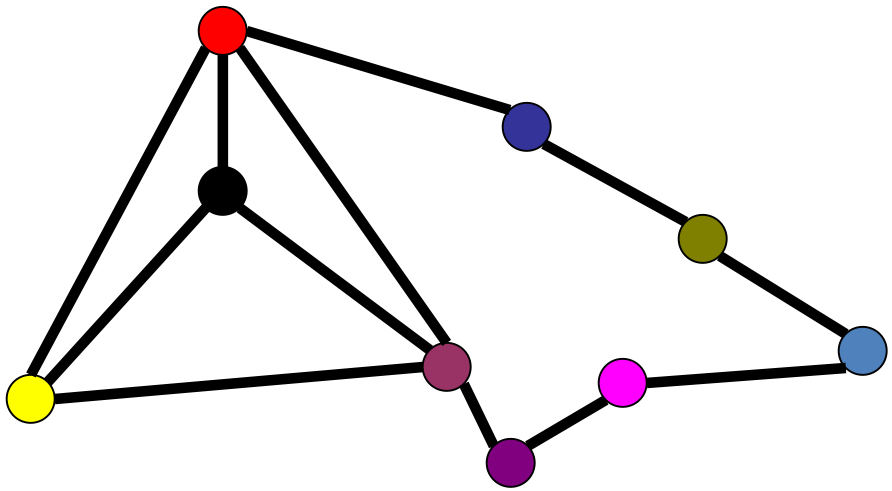
Χρωματισμός χαρτών vs. κορυφών ΙΙ

Σε κάθε ζεύγος περιοχών με κοινά σύνορα εισάγεται μία ακμή



Χρωματισμός χαρτών vs. κορυφών ΙΙΙ

Ο χρωματισμός των περιοχών είναι ισοδύναμος με το χρωματισμό του δυαδικού γράφου



Χρωματισμός ακμών Ι

- **Γράφος *k*-χρωματίσιμος ως προς ακμές,** *k*-edge colorable: οι ακμές μπορούν να χρωματισθούν με $\geq k$ χρώματα, ώστε 2 ακμές προσπίπτουσες στην ίδια κορυφή να έχουν διαφορετικό χρώμα
- **Γράφος *k*-χρωματικός ως προς ακμές,** *k*-edge chromatic: οι ακμές μπορούν να χρωματιστούν με *k* χρώματα, αλλά όχι με k–1
- Το *k* λέγεται **χρωματικός αριθμός ακμών** - edge chromatic number - ή **χρωματικός κατάλογος** - chromatic index - και συμβολίζεται με $\chi'(G)=k$

Χρωματισμός ακμών ΙΙ

- Έστω ένας γράφος G με μέγιστο βαθμό κορυφών $D(G)$. Είναι προφανές ότι $\chi'(G) \geq D(G)$
- **Θεώρημα** (Vizing 1964): Αν G είναι ένας απλός γράφος, τότε ισχύει: $D(G) \leq \chi'(G) \leq D(G)+1$
- Είναι άλυτο πρόβλημα ο προσδιορισμός των γράφων με χρωματικό αριθμό ακμών $D(G)$ και $D(G)+1$

Ειδικές περιπτώσεις

- Είναι δυνατό να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός ακμών σε ειδικές περιπτώσεις γράφων. Για παράδειγμα:
  - $\chi'(C_{2n})=2$
  - $\chi'(C_{2n+1})=3$
  - $\chi'(W_n)=n-1$, αν $n\geq 4$

Διγράφοι

- **Θεώρημα Koenig**: Έστω G ένας διμερής γράφος με μέγιστο βαθμό κορυφών D. Τότε ισχύει $\chi'(G) = D$.

  Άλλη διατύπωση:

- **Θεώρημα**: Για κάθε πλήρη διμερή γράφο ισχύει

$$\chi'(K_{m,n})=D(K_{m,n})=\max(m,n)$$

Απόδειξη για πλήρη διγράφο

- **<u>Απόδειξη</u>**: Έστω ότι $m \geq n$. Έστω επίσης ότι ο γράφος παριστάνεται γραφικά όπως στο προηγούμενο σχήμα δηλ. οι m κορυφές βρίσκονται επί μιας ευθείας γραμμής, ενώ οι n κορυφές τοποθετούνται χαμηλότερα επί μιας άλλης ευθείας. Ο χρωματισμός του γράφου επιτυγχάνεται χρωματίζοντας διαδοχικά τις ακμές που πρόσκεινται στις n κορυφές κατά την ωρολογιακή φορά και χρησιμοποιώντας τα χρώματα: $\{1,2,\ldots,m\}$, $\{2,3,\ldots,m,1\}$,…,$\{n,\ldots,m,1,..,n-1\}$.

Πλήρεις γράφοι

- **<u>Θεώρημα</u>**: Για κάθε πλήρη γράφο K_n ισχύει:

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n \; για \; n \; περιττο \\ n - 1 \; για \; n \; αρτιο \end{cases}$$

Απόδειξη (περιττή τάξη)

<u>Θεώρημα</u>: Για κάθε πλήρη γράφο K_n ισχύει:

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n \; για \; n \; περιττο \\ n-1 \; για \; n \; αρτιο \end{cases}$$

Απόδειξη: Επειδή κάθε κορυφή έχει βαθμό n–1 από το θεώρημα του Vizing έχουμε ότι $\chi'(G)=n$ ή $\chi'(G)=n-1$. Αν το n είναι περιττός, τότε το πλήθος των ακμών με ίδιο χρώμα είναι το πολύ (n-1)/2 (π.χ. K_3 ή K_5), διότι διαφορετικά 2 από αυτές τις ακμές (ίδιου χρώματος) συναντώνται σε μια κοινή κορυφή. Αλλά ο πλήρης γράφος K_n έχει ακριβώς n(n-1)/2 ακμές, άρα ο αριθμός των διαφορετικών χρωμάτων των ακμών του πρέπει να είναι τουλάχιστο n. Άρα $\chi'(G)\geq n$.

Απόδειξη (άρτια τάξη)

Θεώρημα: Για κάθε πλήρη γράφο K_n ισχύει:

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n \; για \; n \; περιττο \\ n-1 \; για \; n \; αρτιο \end{cases}$$

Απόδειξη: Αν το n είναι *άρτιος* θα δείξουμε ότι $\chi'(K_n)=n-1$, δίνοντας ένα (n–1) χρωματισμό των ακμών του K_n. Αν n=2, τότε προφανώς χρειαζόμαστε 1 χρώμα. Αν n>2, διαγράφουμε μια κορυφή v μαζί με όλες τις προσκείμενες ακμές. Τότε προκύπτει ο γράφος K_{n-1} που έχει περιττό πλήθος ακμών και συνεπώς είναι n-1 χρωματικός ως προς τις ακμές. Από κάθε κορυφή λείπει ακριβώς ένα χρώμα και όλα αυτά τα χρώματα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Συνεπώς, οι ακμές του K_n που πρόσκεινται στην κορυφή v μπορούν να χρωματισθούν με τα χρώματα που λείπουν. Συνεπώς $\chi'(K_n)=n-1$, αν n είναι άρτιος.

Χρωματισμός ακμών - πολυγράφοι

- Αν έχουμε πολυγράφο (με παράλληλες ακμές), τότε ορίζουμε ως **μέγιστη πολλαπλότητα** -maximum multiplicity, $m(G)$ το μέγιστο πλήθος ακμών που ενώνουν 2 οποιεσδήποτε κορυφές.
- **Θεώρημα** (Vizing Extended Version, 1965): Αν G είναι πολυγράφος, τότε: $D(G) \leq \chi'(G) \leq D(G)+m(G)$
- **Θεώρημα** (Tait, 1880): Ένας χάρτης G είναι 4-χρωματίσιμος ως προς τις περιοχές αν και μόνο αν είναι 3-χρωματίσιμος ως προς τις ακμές
- **Θεώρημα Shannon**: Έστω G ένα γράφος (μπορεί να είναι και πολυγράφος) με μέγιστο βαθμό κορυφών D. Τότε ισχύει:
  $D \leq \chi'(G) \leq 3*D/2,$ αν D άρτιος
  $D \leq \chi'(G) \leq (3*D-1)/2,$ αν D περιττός

Φράγματα χρωματικού καταλόγου Ι

- Για να βρούμε το χρωματικό κατάλογο $\chi'(G)$ ενός γράφου G χωρίς βρόχους βρίσκουμε ένα επάνω και ένα κάτω όριο. Αν αυτά τα 2 όρια είναι ίσα τότε το $\chi'(G)$ ισούται με αυτή την τιμή.
- Πιθανά επάνω όρια για το $\chi'(G)$:
  - Το μέγεθος m του G
  - D+1, από θεώρημα Vizing (αν το G είναι απλό)
  - D+m(G), από θεώρημα Vizing extended (αν το G είναι πολυγράφος), m(G) είναι το πλήθος των ακμών που συνδέουν 2 οποιεσδήποτε κορυφές.
  - 3D/2 ή (3D–1)/2 από θεώρημα Shannon

Φράγματα χρωματικού καταλόγου II

- Πιθανά κάτω φράγματα για το $\chi'(G)$:
  - D, ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του G

Άσκηση Ι

Ερώτηση: Τι συμπεραίνουμε για τους γράφους G για τους οποίους ισχύει $\chi'(G)=2$

Λύση: Αν $\chi'(G)=2$, τότε πρόκειται για γράφους αποτελούμενους από συνιστώσες που είναι είτε κύκλοι άρτιου μήκους, είτε απομονωμένες κορυφές, είτε μονοπάτια (P_n, $n\geq3$). Επίσης μια τουλάχιστο συνιστώσα είναι κύκλος άρτιου μήκους ή γράφος μονοπάτι (P_n, $n\geq3$).

Άσκηση ΙΙ

Ερώτηση: Ποιός ο χρωματικός κατάλογος του $K_{2,3}$

Απάντηση: $\chi'(K_{2,3})$ =3, Θεώρημα 6.12

Άσκηση ΙΙΙ

Ερώτηση: Για τον πλήρη διμερή γράφο $K_{2,4}$ να υπολογιστούν τα επάνω και τα κάτω όρια του χρωματικού καταλόγου $\chi'(G)$ σύμφωνα με το Θεώρημα του Vizing, η πραγματική τιμή $\chi'(G)$ και ένας χρωματισμός ακμών με $\chi'(G)$ χρώματα.

Απάντηση: $4 \leq \chi'(G) \leq 5$. Πραγματική τιμή $\chi'(G)=4$ (Θεώρημα Koenig ή Θεώρημα 6.12).

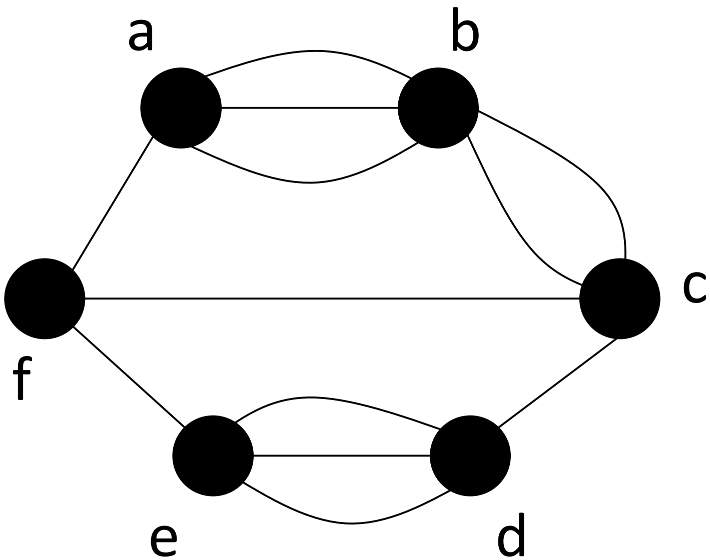
Άσκηση: χρωματισμός καλωδίων

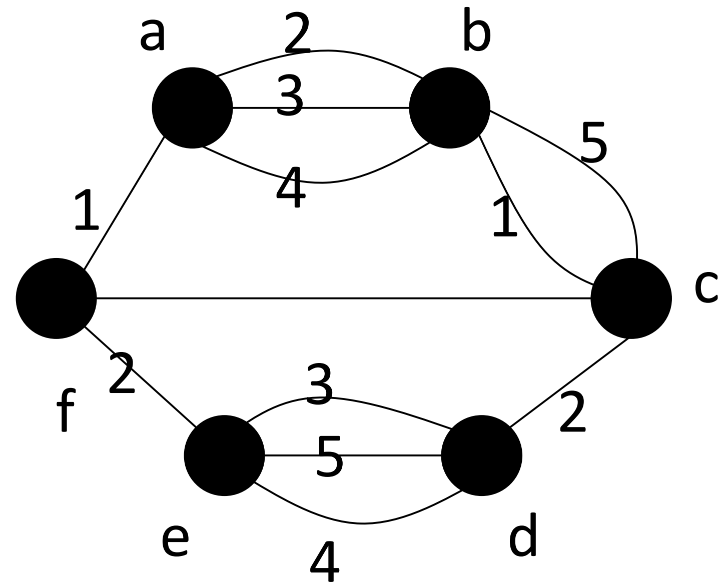
Ένας μηχανικός θέλει να κατασκευάσει ένα ταμπλό απεικόνισης (επίδειξης) μέσα στο οποίο πρόκειται να τοποθετηθούν και να διασυνδεθούν ηλεκτρικά στοιχεία *a*,*b*,….Τα καλώδια που πρόκειται να συνδεθούν στο στοιχείο *a* βγαίνουν από μια οπή του ταμπλό, τα καλώδια που πρόκειται να συνδεθούν στο στοιχείο *b* βγαίνουν από μια άλλη οπή του ταμπλό κ.ο.κ. Για να διακρίνονται τα καλώδια που βγαίνουν μέσα από την ίδια οπή πρέπει να έχουν διαφορετικό χρώμα. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτούνται;

Λύση I

Αναπαριστούμε τα σημεία διασύνδεσης με τις κορυφές ενός γράφου, ενώ τα καλώδια με τις ακμές του. Ο διπλανός γράφος αναπαριστά ένα ταμπλό 6 στοιχείων. Επειδή η κορυφή *b* έχει 5 προσπίπτουσες ακμές και πρέπει όλες οι ακμές να χρωματισθούν διαφορετικά συμπεραίνουμε ότι απαιτούνται τουλάχιστον 5 χρώματα. Στην πράξη 5 χρώματα είναι αρκετά, όπως φαίνεται στο διπλανό χρωματισμό

Λύση ΙΙ



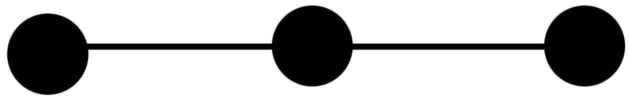


Χρωματικά Πολυώνυμα

- **Ερώτηση**: Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός γράφου με *k* χρώματα;
- **Απάντηση** (Birkhoff 1912): **Χρωματικό πολυώνυμο** – chromatic polynomial ή **χρωματική συνάρτηση** – chromatic function, ονομάζεται ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να χρωματισθούν οι κορυφές ενός γράφου G με k χρώματα και συμβολίζεται με $P_G(k)$.

Παράδειγμα

Η χρωματική συνάρτηση του επόμενου γράφου είναι $P_G(k)=k(k-1)^2$.



Απόδειξη: Έστω ότι η μεσαία κορυφή μπορεί να χρωματιστεί με οποιοδήποτε από τα k χρώματα. Τότε οι 2 ακριανές κορυφές μπορούν να χρωματιστούν με οποιοδήποτε από τα απομένοντα k-1 χρώματα.

Σχέσεις

Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

- $P_{N_n}(k)=k^n$
- $P_T(k)= k(k–1)^{n-1}$, αν T είναι δέντρο
- $P_{K_n}(k)=k(k–1)(k–2)…(k–n+1)$
- $P_G(k)=0$ αν $k<\chi(G)$
- $P_G(k)>0$ αν $k\geq\chi(G)$

Αποδείξεις Ι

- $P_{N_n}(k)=k^n$, γιατί κάθε κορυφή του μηδενικού γράφου μπορεί να χρωματισθεί με οποιοδήποτε από τα διαθέσιμα k χρώματα.
- $P_T(k)= k(k–1)^{n-1}$, αν T είναι ένα δέντρο n κορυφών. Ξεκινούμε από ένα φύλλο (ή ρίζα) που μπορεί να χρωματισθεί με οποιοδήποτε από τα k χρώματα. Πηγαίνουμε σε μια γειτονική μη χρωματισμένη κορυφή του φύλλου, η οποία μπορεί να χρωματισθεί με οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα k-1 χρώματα. Πηγαίνουμε σε μια γειτονική μη χρωματισμένη κορυφή της προηγούμενης κορυφής η οποία μπορεί να χρωματισθεί με οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα k–1 χρώματα κ.ο.κ.

Αποδείξεις ΙΙ

- $P_{K_n}(k)=k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$, είναι προφανές διότι στον πλήρη γράφο K_n όπου όλες οι κορυφές είναι γειτονικές μεταξύ τους, αν η 1η κορυφή χρωματισθεί με οποιοδήποτε από τα k διαθέσιμα χρώματα, η 2η μπορεί να χρωματισθεί με οποιοδήποτε από τα $k-1$ διαθέσιμα χρώματα, ..., η n-οστή με οποιοδήποτε από τα $k-(n-1)=k-n+1$ διαθέσιμα χρώματα

Αποδείξεις ΙΙΙ

- $P_G(k)=0$ αν $k<\chi(G)$, διότι ο χρωματικός αριθμός $\chi(G)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτούνται για τον κατάλληλο χρωματισμό των κορυφών ενός γράφου G.
  Άρα αν έχουμε λιγότερα χρώματα στη διάθεσή μας δεν υπάρχει τρόπος να χρωματισθεί ο γράφος.
- $P_G(k)>0$ αν $k\geq\chi(G)$, διότι αν έχουμε περισσότερα χρώματα από το χρωματικό αριθμό $\chi(G)$, τότε σίγουρα θα υπάρχουν κάποιοι τρόποι χρωματισμού ενός γράφου G.

Εικασία 4 Χρωμάτων

- Η εικασία των 4 χρωμάτων μπορεί να εκφρασθεί ως εξής: αν *G* είναι ένας απλός επίπεδος γράφος, τότε $P_G(4)>0$.

- Για ένα τυχαίο γράφο *G* δεν είναι εύκολη υπόθεση η εύρεση του χρωματικού πολυωνύμου. Το επόμενο θεώρημα βοηθά προς αυτή την κατεύθυνση.

Θεώρημα Χρωματικών Πολυωνύμων

<u>Θεώρημα</u>: Έστω ότι v και w είναι μη γειτονικές κορυφές ενός απλού γράφου G. Αν G_1=G+(v,w) και G_2=G/(v,w) τότε ισχύει:

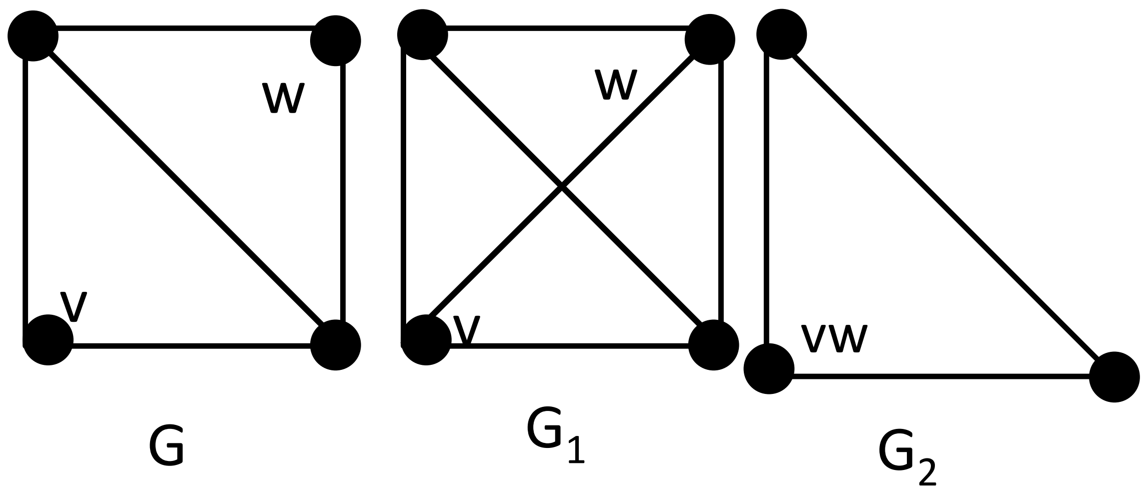
$$P_G(k)=P_{G_1}(k)+P_{G_2}(k)$$

- Η πράξη + λέγεται σύνδεση (join) ή άθροισμα (sum).
- Η πράξη / λέγεται συγχώνευση (fusion, merge).
- Η εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$P_{G_1}(k)= P_G(k) - P_{G_2}(k)$$

Εφαρμογή

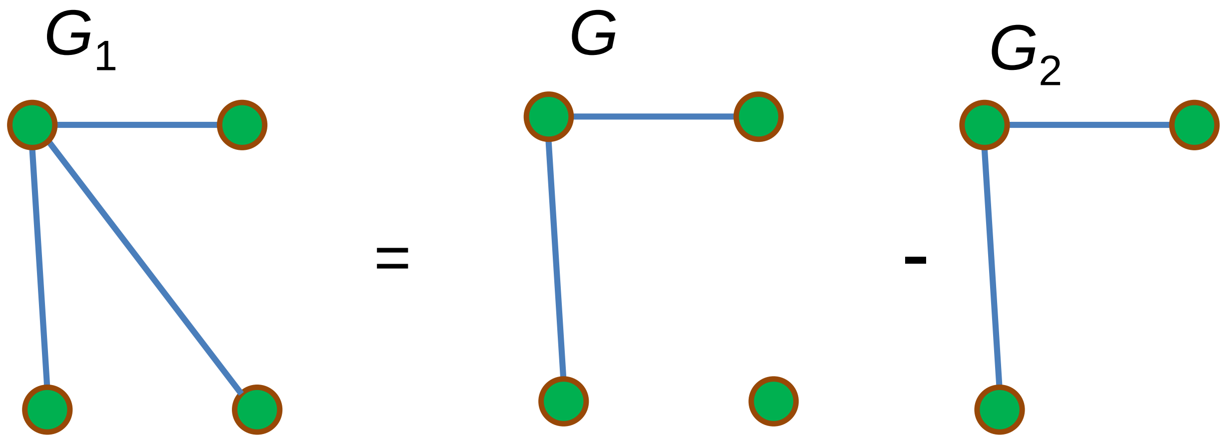
Εφαρμογή του θεωρήματος στο επόμενο σχήμα δίνει τη σχέση: $k(k–1)(k–2)^2 = k(k–1)(k–2)(k–3)+k(k–1)(k–2)$



Πόρισμα

Η χρωματική συνάρτηση ενός απλού γράφου G με n κορυφές είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς k. Επίσης το πολυώνυμο αυτό έχει ακέραιους συντελεστές με εναλλασσόμενα πρόσημα, ως μεγαλύτερο όρο το k^n και ως σταθερό όρο το 0.

Παράδειγμα με την άλλη σχέση



$$P_G(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k$$

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι Χρωματισμού

- Ο προσδιορισμός του χρωματικού αριθμού είναι **δυσχείριστο** (intractable) πρόβλημα. Τέτοια προβλήματα είναι εκείνα που δεν λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο
- Ο όρος **ευριστικός** χρησιμοποιείται για αλγορίθμους που βρίσκουν λύσεις σε κάποιο πρόβλημα αλλά δεν υπάρχει εγγύηση ότι αυτή η λύση είναι η καλύτερη. Μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι προσεγγιστικοί και όχι επακριβείς αλγόριθμοι

Ο Αλγόριθμος

Αλγόριθμος: Σειριακός χρωματισμός γράφου

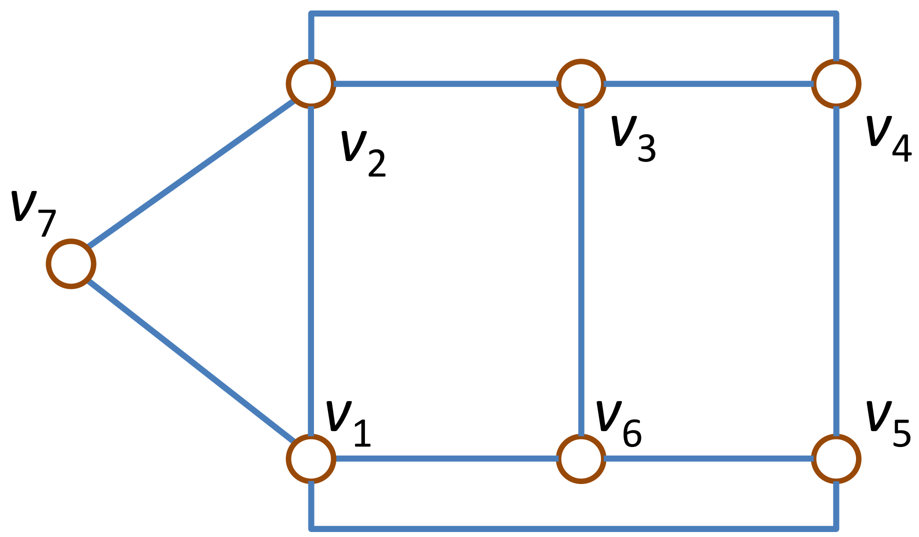
Είσοδος: Ένας γράφος *G* =(*V*, *E*), μια λίστα χρωμάτων 1,2,3,... και μια λίστα τυχαίας ταξινόμησης των κορυφών του

Έξοδος: Χρωματισμός του *G*

1. **Προσδιόρισε** την πρώτη μη-χρωματισμένη κορυφή από τη λίστα της τυχαίας ταξινόμησης των κορυφών. Χρωμάτισέ την με το πρώτο χρώμα από τη λίστα των χρωμάτων με την προϋπόθεση ότι αυτό το χρώμα δεν έχει χρησιμοποιηθεί για το χρωματισμό οποιασδήποτε γειτονικής κορυφής
2. **Επανάλαβε** Αν χρωματίσθηκαν όλες οι κορυφές STOP αλλιώς πήγαινε στο βήμα 1

Παράδειγμα

Να χρωματισθεί ο επόμενος γράφος με τη σειριακή μέθοδο αν υποτεθεί ότι η λίστα τυχαίας ταξινόμησης των κορυφών του είναι $L = \{v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_6, v_7\}$



Σειρά Χρωμάτων:

1. Κόκκινο
2. Κίτρινο
3. Μπλε
4. Πράσινο
5. X
6. Y
7. Z

Χαρακτηριστικά

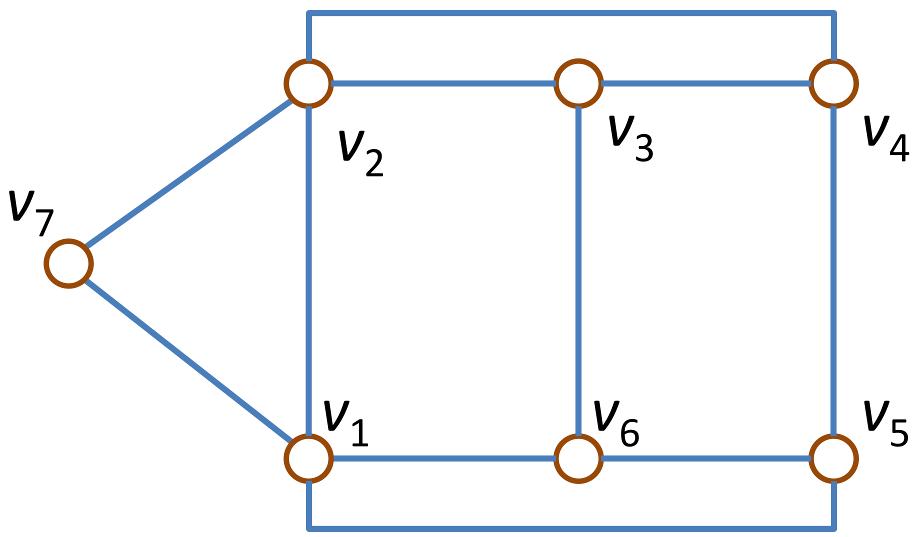
- Ο σειριακός αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα $O(nm)$
- Αν οι κορυφές εξετασθούν με διαφορετική σειρά μπορεί να προκύψουν διαφορετικές χρωματικές τάξεις
- Αν προσπαθήσουμε να χρωματίσουμε ένα διμερή γράφο n κορυφών λαμβάνοντας τις κορυφές εναλλάξ από τα 2 σύνολα κορυφών, τότε θα χρειασθούμε $n/2$ χρώματα αντί για 2 που αυτό θα μπορούσε να χρωματισθεί

Επιπλέον Ευρετικές Μέθοδοι – Πρώτα η Μεγαλύτερη

Πρώτα η μεγαλύτερη (largest first): οι κορυφές ταξινομούνται κατά φθίνουσα τάξη ανάλογα με το βαθμό τους. Σε περίπτωση ισοπαλίας σε σχέση με τους βαθμούς των κορυφών επιλέγεται τυχαία μια υποψήφια κορυφή. Κατόπιν ακολουθείται η σειριακή μέθοδος.

Εφαρμογή

Να χρωματιστεί τον επόμενο γράφο με τη μέθοδο “**πρώτα η μεγαλύτερη**”

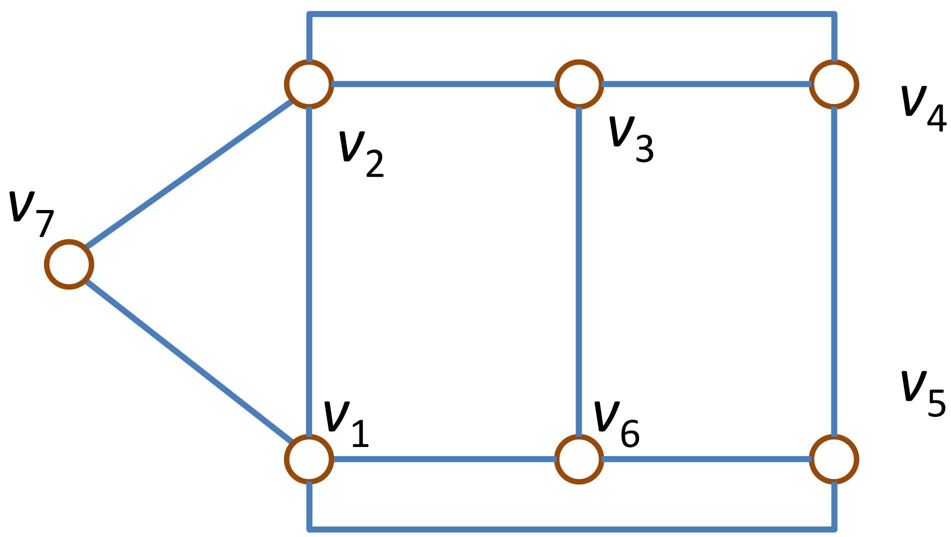


Σειρά Χρωμάτων:
1. Κόκκινο
2. Κίτρινο
3. Μπλε
4. Πράσινο
5. Χ
6. Υ
7. Ζ

Επιπλέον Ευρετικές Μέθοδοι – Τελευταία η Μικρότερη

- **Τελευταία η μικρότερη** (smallest last): αρχικά οι κορυφές ταξινομούνται κατά φθίνουσα σειρά των βαθμών τους. Σε περίπτωση ισοπαλίας ως προς τους βαθμούς των κορυφών επιλέγεται τυχαία μια υποψήφια κορυφή. Στη συνέχεια η κορυφή με το μικρότερο βαθμό διαγράφεται από το γράφο μαζί με τις προσπίπτουσες ακμές της με σκοπό να χρωματισθεί τελευταία. Επίσης ενημερώνονται οι βαθμοί των υπόλοιπων κορυφών και διαγράφεται πάλι η κορυφή με το μικρότερο βαθμό η οποία χρωματίζεται προτελευταία κοκ. Έτσι γίνεται μια ταξινόμηση των κορυφών και ακολουθεί ο σειριακός χρωματισμός του γράφου.

Εφαρμογή



Σειρά Χρωμάτων:
1.Κόκκινο, 2. Κίτρινο,
3. Μπλε, 4.Πράσινο,
5. X, 6. Y, 7. Z

Να χρωματιστεί ο επόμενος γράφος με τη μέθοδο "τελευταία η μικρότερη". Οι κορυφές κατατάσσονται αρχικά κατά φθίνουσα τάξη βαθμών ως εξής: {v1,v2,v3, v4, v5,v6,v7}. Μια κατάταξη των κορυφών είναι {v1,v5, v6,v4,v3,v2,v7}. Εφαρμόζο-ντας το σειριακό χρωμα-τισμό στην προηγούμενη σειρά παίρνουμε:

Επιπλέον Ευρετικές Μέθοδοι – Βαθμός Χρώματος

Η μέθοδος του βαθμού χρώματος (Brelaz): *Βαθμός χρώματος* (color degree) μιας κορυφής *v* ορίζεται ως ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για το χρωματισμό των γειτονικών κορυφών της *v.* (Επιλύει καλύτερα περιπτώσεις ισοπαλίας ως προς βαθμούς κορυφών)

Αλγόριθμος Βαθμού Χρώματος

Αλγόριθμος: Brelaz με χρήση βαθμού χρώματος των κορυφών

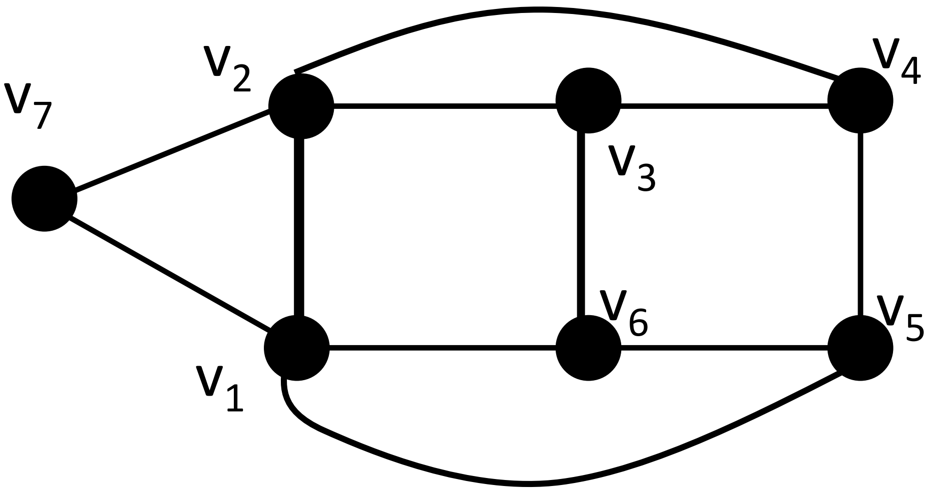
Είσοδος: Ένας γράφος $G = (V, E)$

Έξοδος: Χρωματισμός του G

1. Οι κορυφές ταξινομούνται κατά φθίνουσα σειρά βαθμών
2. Η κορυφή με το μεγαλύτερο βαθμό χρωματίζεται με το χρώμα 1
3. Επιλέγεται η κορυφή με το μέγιστο βαθμό χρώματος. Αν υπάρχει ισοπαλία τότε επιλέγεται η μη χρωματισμένη κορυφή με το μεγαλύτερο βαθμό στο μη χρωματισμένο γράφο. Η επιλεχθείσα κορυφή χρωματίζεται με το μικρότερο επιτρεπτό χρώμα
4. Αν δεν χρωματίστηκαν όλες οι κορυφές πηγαίνουμε στο βήμα 3

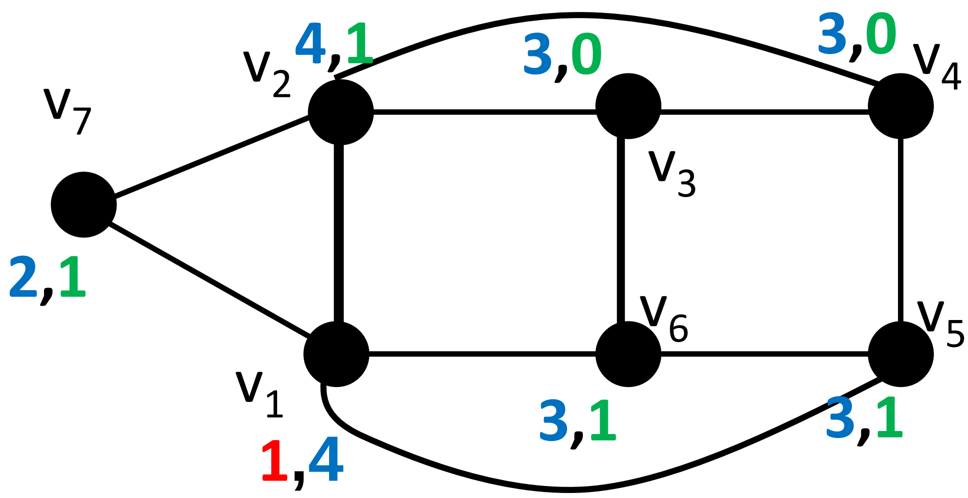
Παράδειγμα Ι

Να χρωματιστεί ο επόμενος γράφος με τη μέθοδο Brelaz



Παράδειγμα ΙΙ

Οι κορυφές κατατάσσονται αρχικά κατά φθίνουσα τάξη βαθμών (μπλε χρώμα) ως εξής: {v_1(4), v_2(4), v_3(3), v_4(3), v_5(3), v_6(3), v_7(2)}.

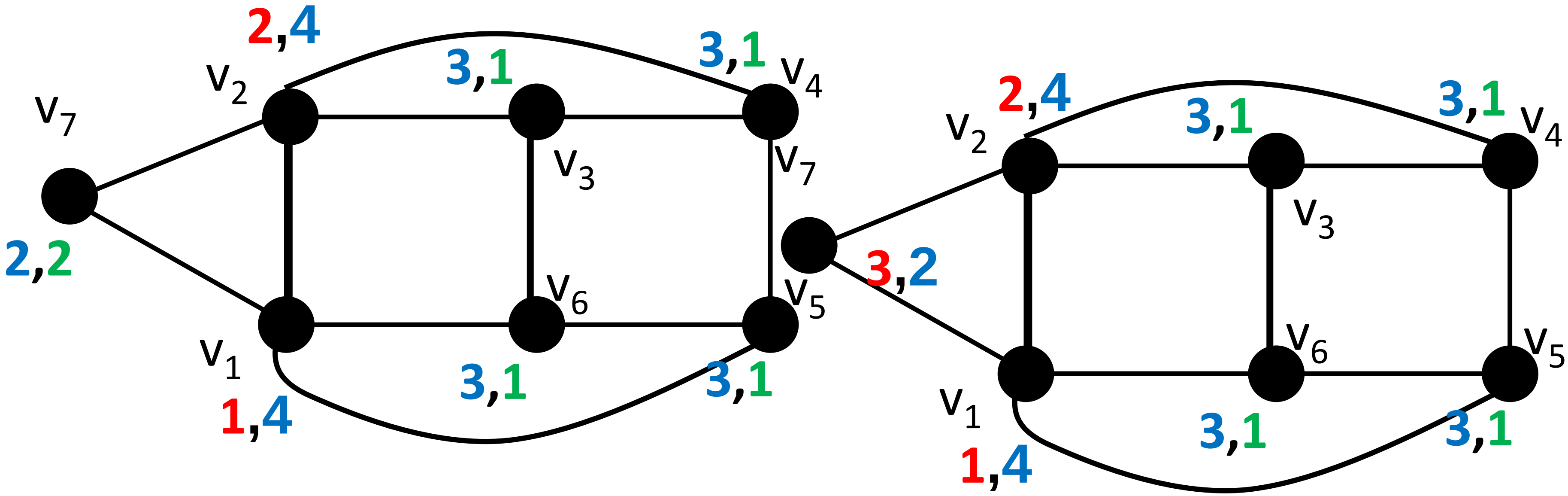


Η v_1 χρωματίζεται με το χρώμα 1 (κόκκινο χρώμα). Οι γειτονικές κορυφές της v_1 δηλαδή οι v_2,v_5, v_6, v_7 αποκτούν όλες βαθμό χρώματος 1 (πράσινο χρώμα).

Παράδειγμα III

- Μεταξύ αυτών επιλέγεται προς χρωματισμό η κορυφή v_2 επειδή έχει το μέγιστο βαθμό (4) και χρωματίζεται με το χρώμα 2. Παράλληλα ενημερώνονται οι βαθμοί χρώματος των μη χρωματισμένων γειτονικών κορυφών. Στη συνέχεια χρωματίζεται η v_7 (διότι έχει μέγιστο βαθμό χρώματος) με το χρώμα 3.

Παράδειγμα IV



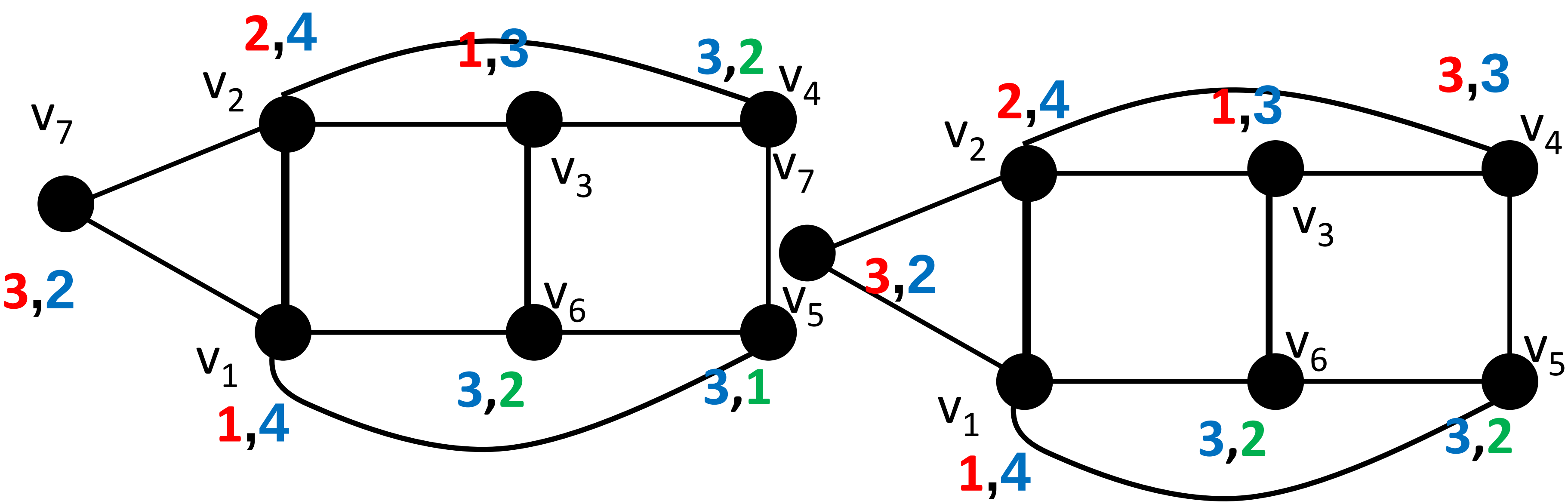
#2

#3

Παράδειγμα VI

- Στη συνέχεια υποψήφιες είναι όλες οι κορυφές αφού έχουν ίδιο βαθμό χρώματος (1) καθώς και ίδιο βαθμό (3), οπότε επιλέγεται τυχαία η v_3 η οποία χρωματίζεται με το χρώμα 1. Στη συνέχεια η v_4 χρωματίζεται με το χρώμα 3.

Παράδειγμα VII



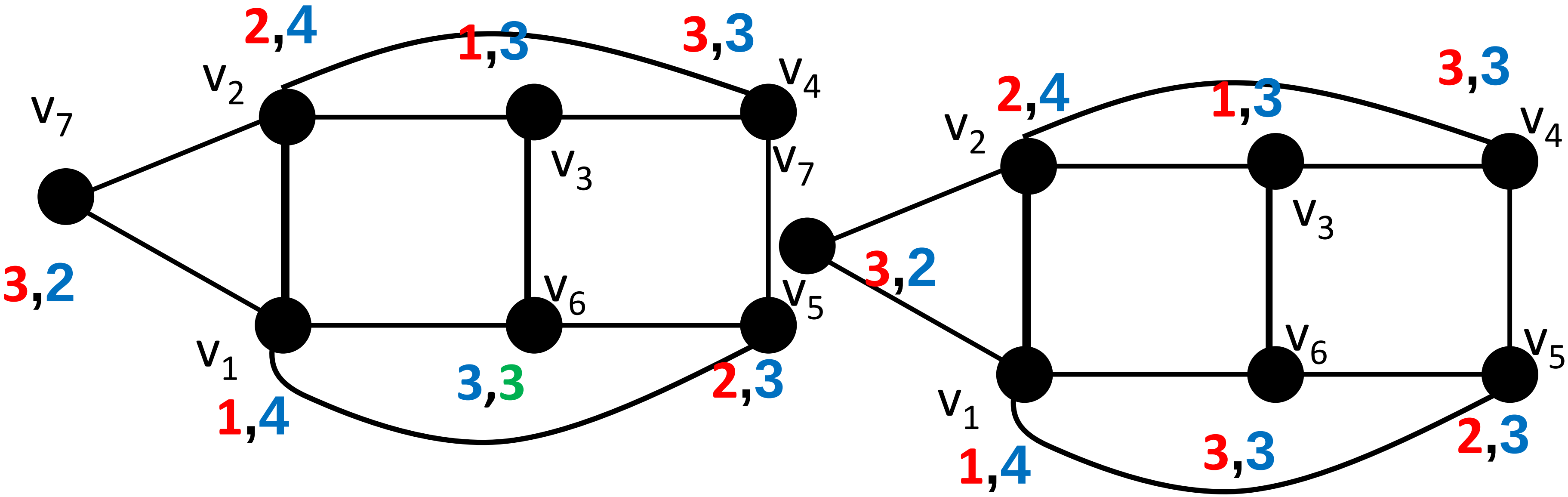
#4

#5

Παράδειγμα VIII

- Στη συνέχεια χρωματίζεται η v_5 με το χρώμα 2 και τέλος η v_6 χρωματίζεται με το χρώμα 3

Παράδειγμα IX



#4

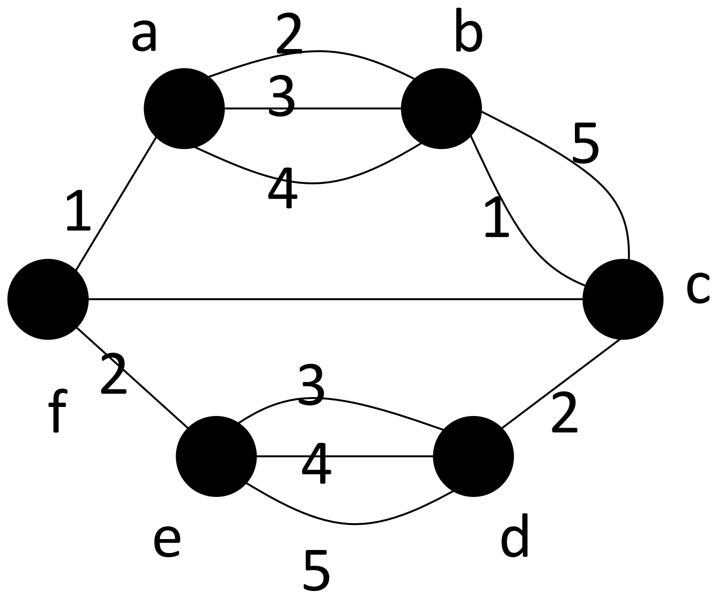
#5

Ταιριάσματα

- Ένα **ταίριασμα** (matching) ενός γράφου *G* είναι ένα σύνολο ακμών του όπου δεν υπάρχουν 2 ακμές που να προσπίπτουν στην ίδια κορυφή.
- Κάθε γράφος μπορεί να διασπασθεί σε ταιριάσματα διότι στην απλή περίπτωση αν υπάρχουν *m* ακμές μπορούν να σχηματισθούν *m* ταιριάσματα με μία ακμή το καθένα.
- Σε μια διάσπαση ακμών ενός γράφου, κάθε ακμή του ανήκει σε ένα μόνο ταίριασμα
- Το πρόβλημα του προσδιορισμού του ελάχιστου αριθμού ταιριασμάτων για τη διάσπαση ενός γράφου είναι δισεπίλυτο.

Παράδειγμα

- Σύμφωνα με τον επόμενο χρωματισμό ακμών οι ακμές του διασπώνται σε 5 σύνολα ξένα μεταξύ τους. Οι ακμές του ίδιου συνόλου χρωματίζονται με το ίδιο χρώμα και αποτελούν ένα ταίριασμα.
- {af, bc}, {ab, cd, ef}, {ab, de}, {ab, cf, de}, {bc, de}



Το πρόβλημα των εξετάσεων Ι

- Στο τέλος του ακαδημαϊκού έτους όλοι οι φοιτητές πρέπει να δώσουν εξετάσεις μιας ώρας με κάποιους από τους καθηγητές τους. Πόσες εξεταστικές περίοδοι χρειάζονται;
- Ας θεωρήσουμε το απλό παράδειγμα που υπάρχουν 4 φοιτητές a, b, c, d και 3 καθηγητές A, B, C.
- Αναπαριστούμε τους φοιτητές και τους καθηγητές με τις κορυφές ενός διμερούς γράφου και ενώνουμε μια κορυφή-φοιτητή με μια κορυφή-καθηγητή όταν ο συγκεκριμένος φοιτητής πρέπει να εξετασθεί από το συγκεκριμένο καθηγητή.

Το πρόβλημα των εξετάσεων ΙΙ

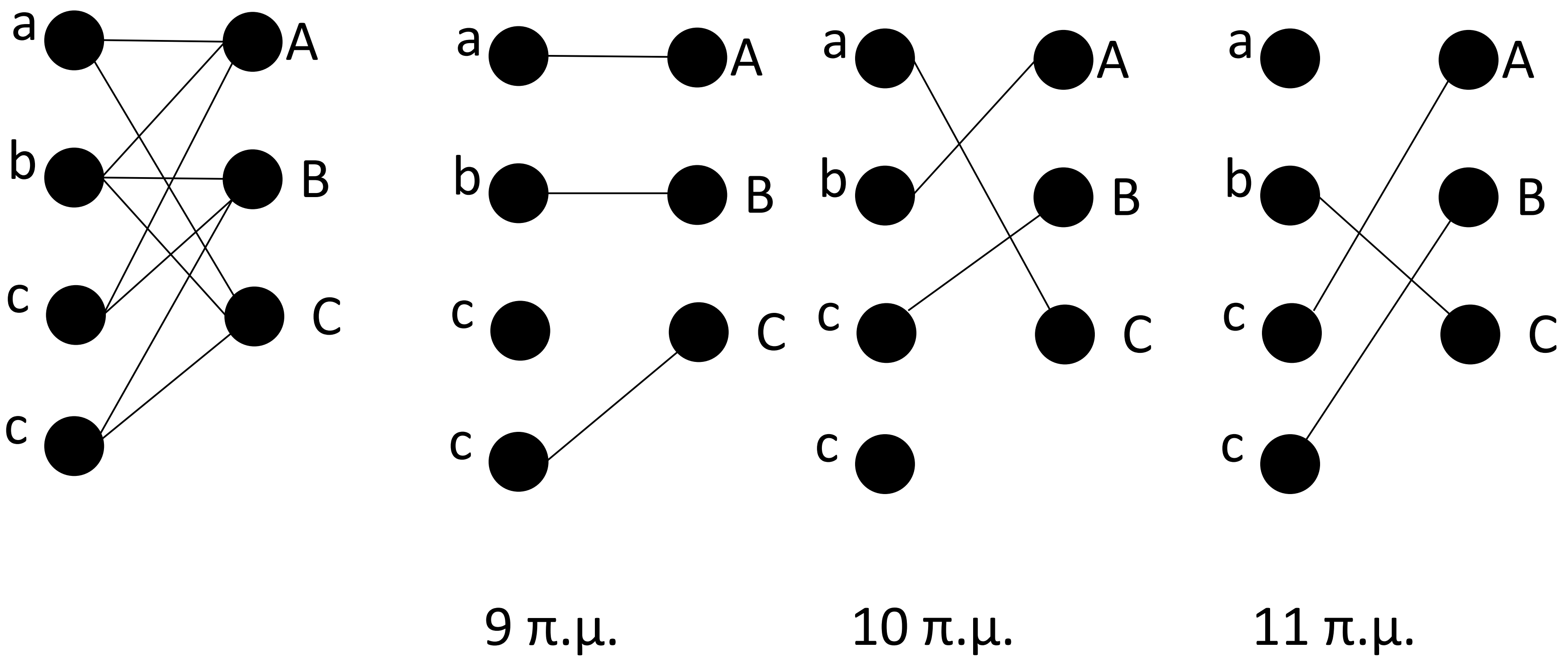
- Αν 2 ακμές προσπίπτουν στην ίδια κορυφή, τότε οι αντίστοιχες εξετάσεις δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα. Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα διάσπασης σε σύνολα ακμών, στα οποία να μην υπάρχει ζεύγος ακμών που να συναντώνται στην ίδια κορυφή. Δηλαδή θέλουμε διάσπαση σε ταιριάσματα.

Το πρόβλημα των εξετάσεων ΙΙΙ

- Στην προκειμένη περίπτωση ο ελάχιστος αριθμός ταιριασμάτων είναι 3 και ένα κατάλληλο χρονο-διάγραμμα των εξετάσεων φαίνεται στη συνέχεια.
- Τα σύνολα ακμών είναι: {aA, bB, dC}, {aC, bA, cB}, {bC, cA, dB}

Το πρόβλημα των εξετάσεων IV

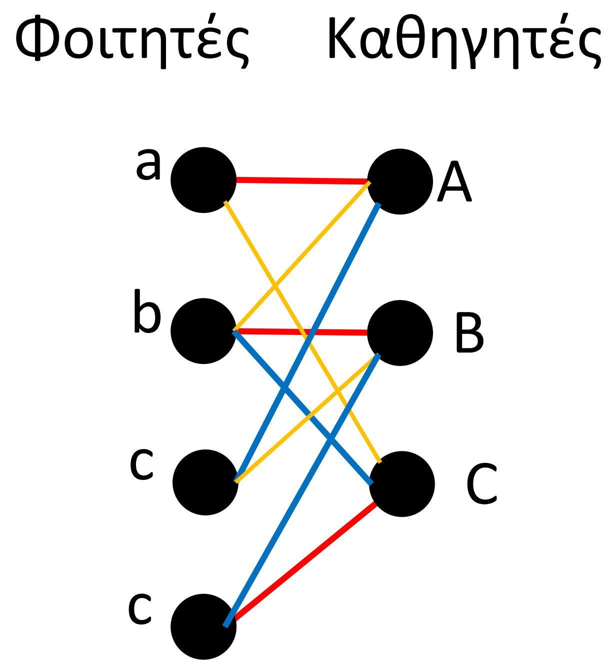
Φοιτητές Καθηγητές



Το πρόβλημα των εξετάσεων V

- Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί και πρόβλημα χρωματισμού ακμών. Αν χρωματίσουμε τις ακμές του πρώτου συνόλου κόκκινες, του δευτέρου κίτρινες και του τρίτου συνόλου μπλε τότε τα χρώματα σε κάθε κορυφή του γράφου (είτε φοιτητή είτε καθηγητή) είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Οι ακμές με το ίδιο χρώμα αποτελούν ένα ταίριασμα. Για τον επόμενο γράφο $\chi'(G)=3$.

Το πρόβλημα των εξετάσεων VI



Άλλο πρόβλημα εξετάσεων Ι

Έστω ότι πρέπει να εκδοθεί πρόγραμμα εξετάσεων για τα μαθήματα με τους εξής κωδικούς:

1007, 3137, 3157, 3203, 3261, 4115, 4118, 4156

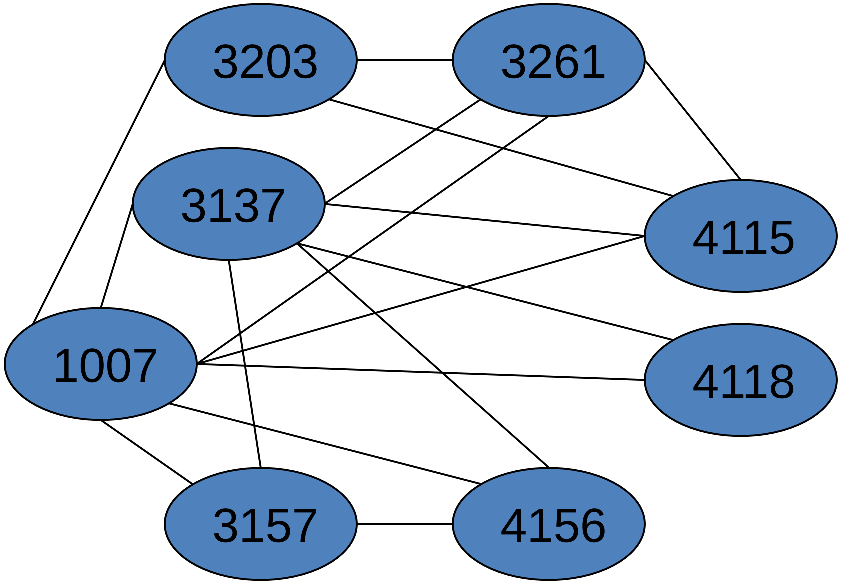
Σε κάποια ζεύγη μαθημάτων δεν υπάρχουν κοινοί φοιτητές:

1007-3137, 1007-3157, 3137-3157, 1007-3203, 1007-3261, 3137-3261, 3203-3261, 1007-4115, 3137-4115, 3203-4115, 3261-4115, 1007-4118, 3137-4118, 1007-4156, 3137-4156, 3157-4156

Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός εξεταστικών slot?

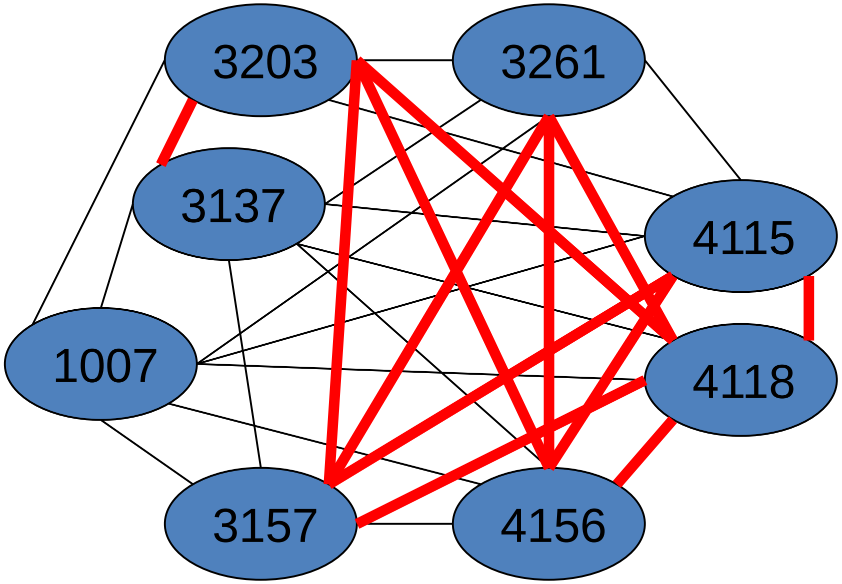
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων ΙΙ

- Το πρόβλημα θα επιλυθεί με χρωματισμό ακμών. Οι κορυφές είναι μαθήματα, οι ακμές δηλώνουν εξετάσεις που δεν μπορούν να διεξαχθούν ταυτόχρονα.



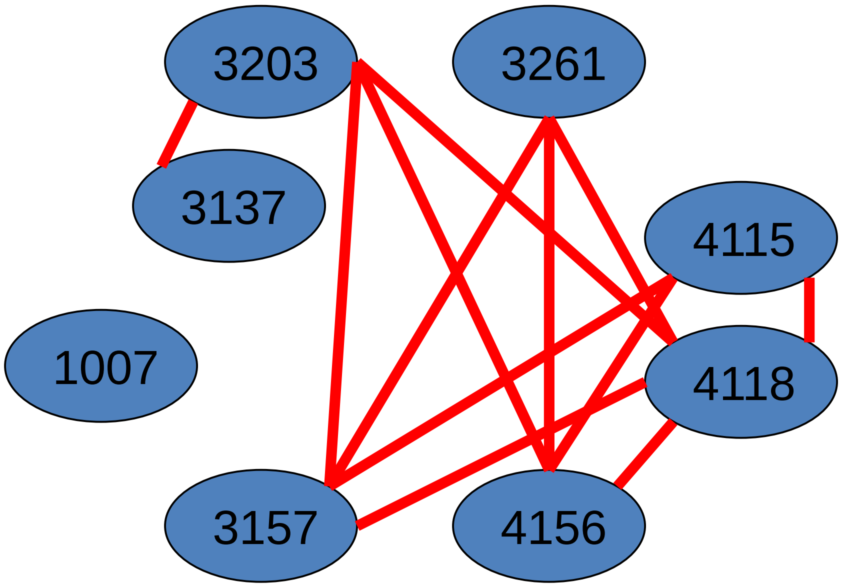
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων III

Υπολογίζουμε το συμπληρωματικό γράφο



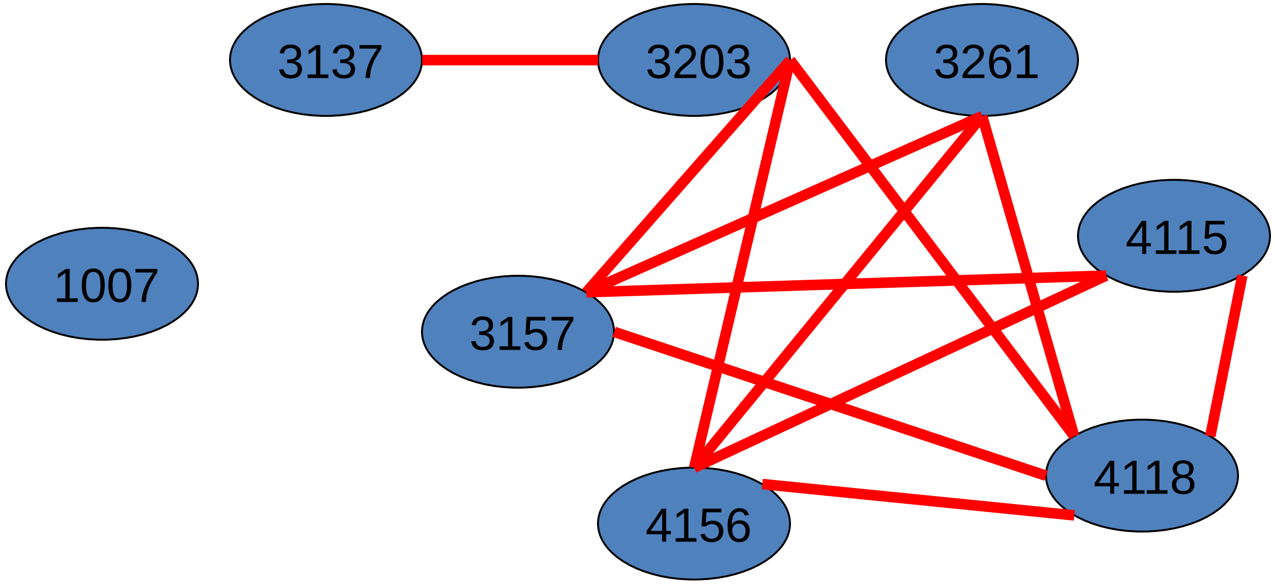
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων IV

Υπολογίζουμε το συμπληρωματικό γράφο



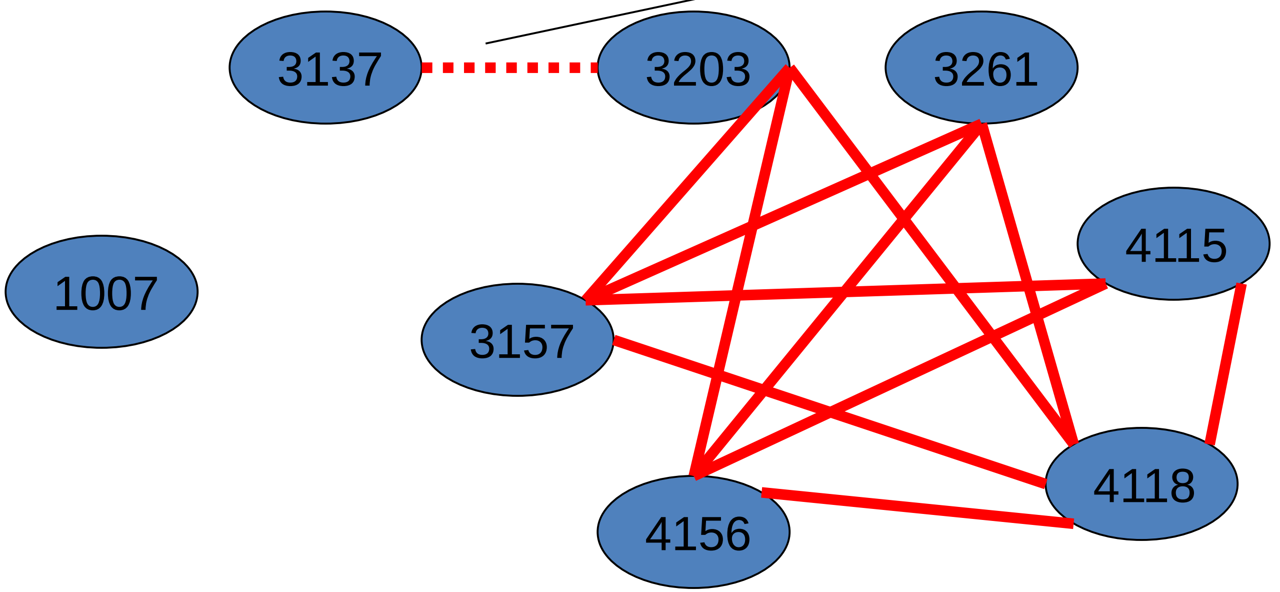
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων V

Ξανασχεδιάζουμε



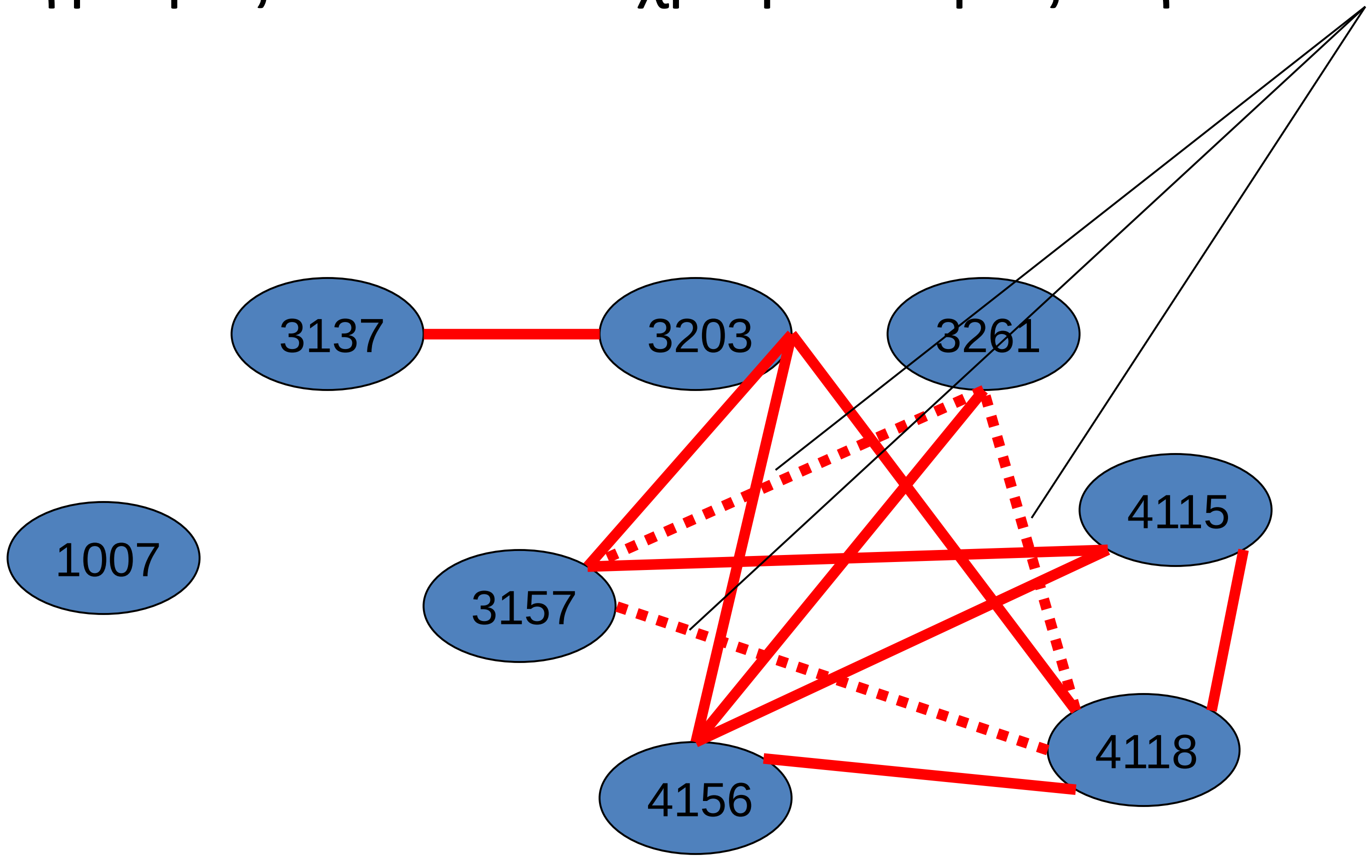
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων VI

Ο γράφος δεν είναι 1-χρωματίσιμος
λόγω μιας οποιασδήποτε ακμής (C_2)



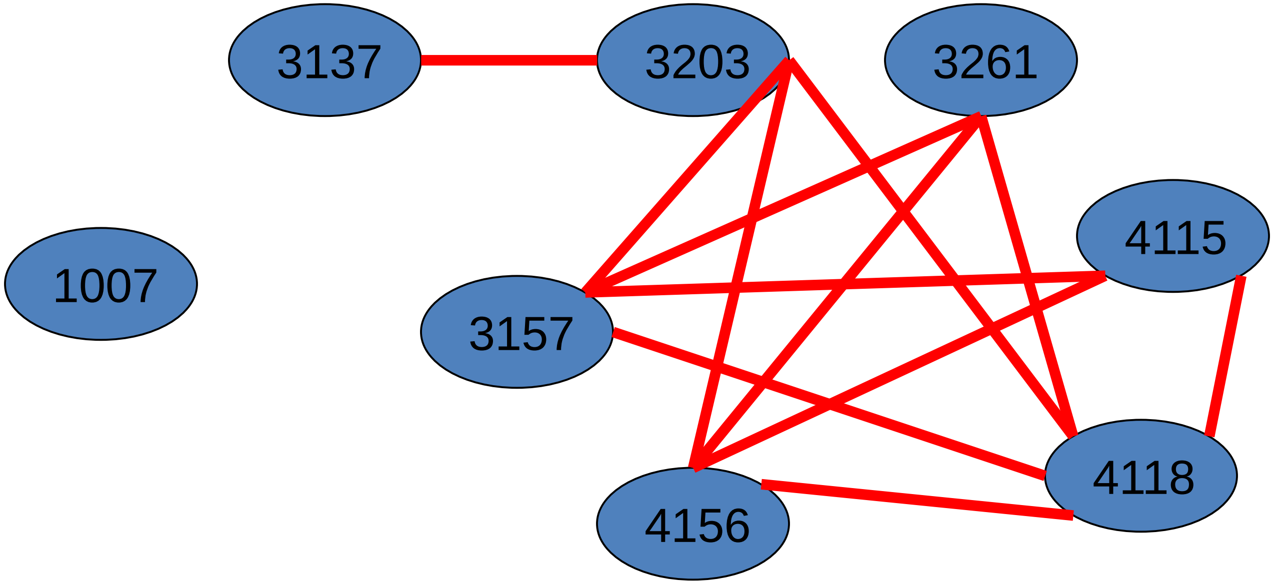
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων VII

Ο γράφος δεν είναι 2-χρωματίσιμος λόγω του C_3



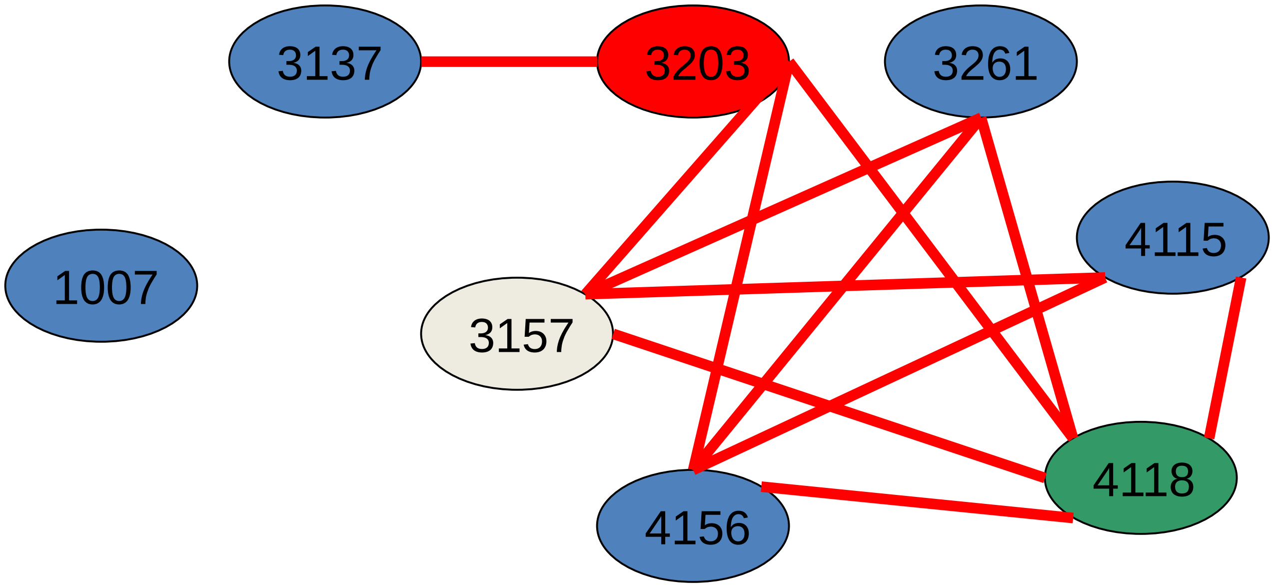
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων VIII

Χρωματίζουμε με 3 χρώματα: κόκκινο, μπλε, πράσινο



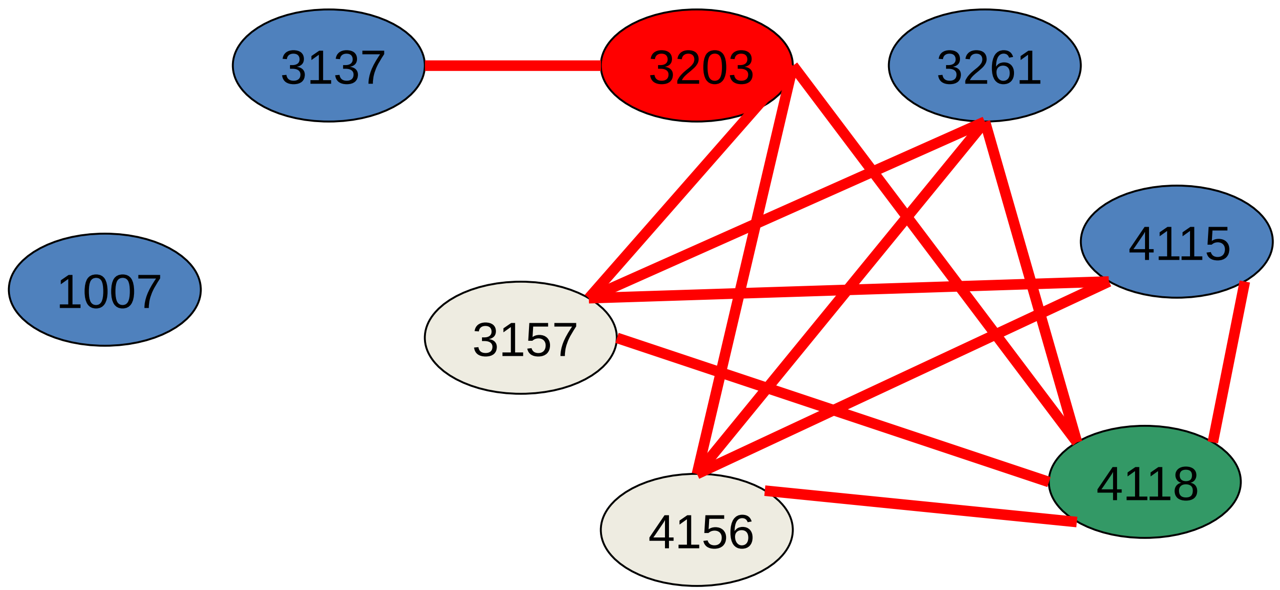
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων IX

Έστω: 3203-κόκκινο, 3157-μπλε, 4118-γκρι



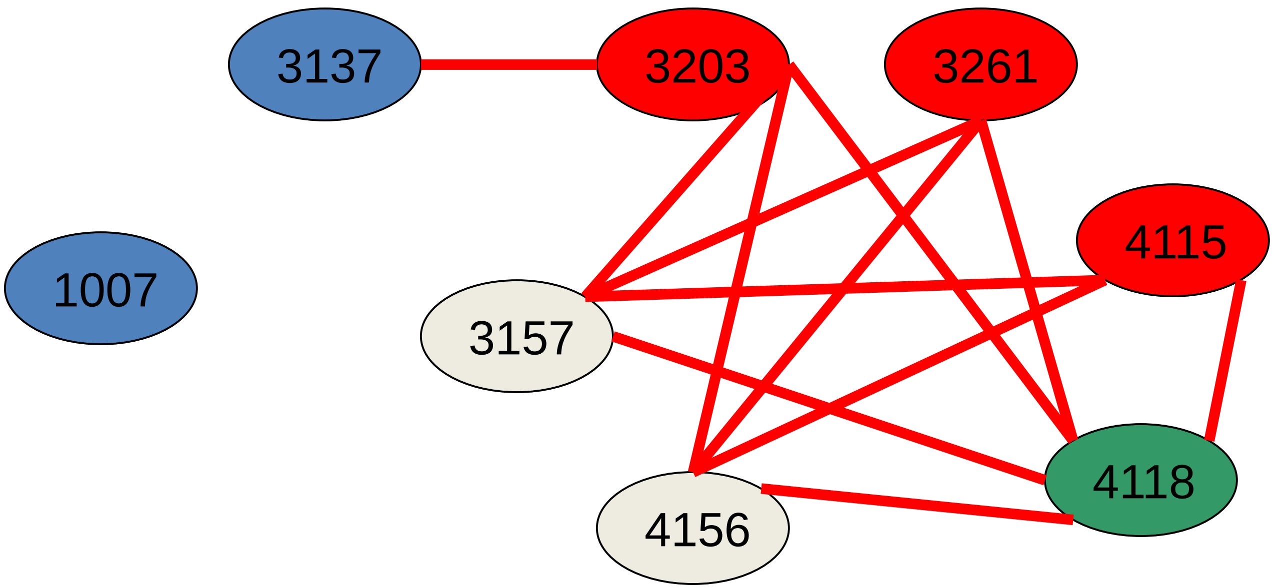
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων Χ

Άρα 4156-γκρι



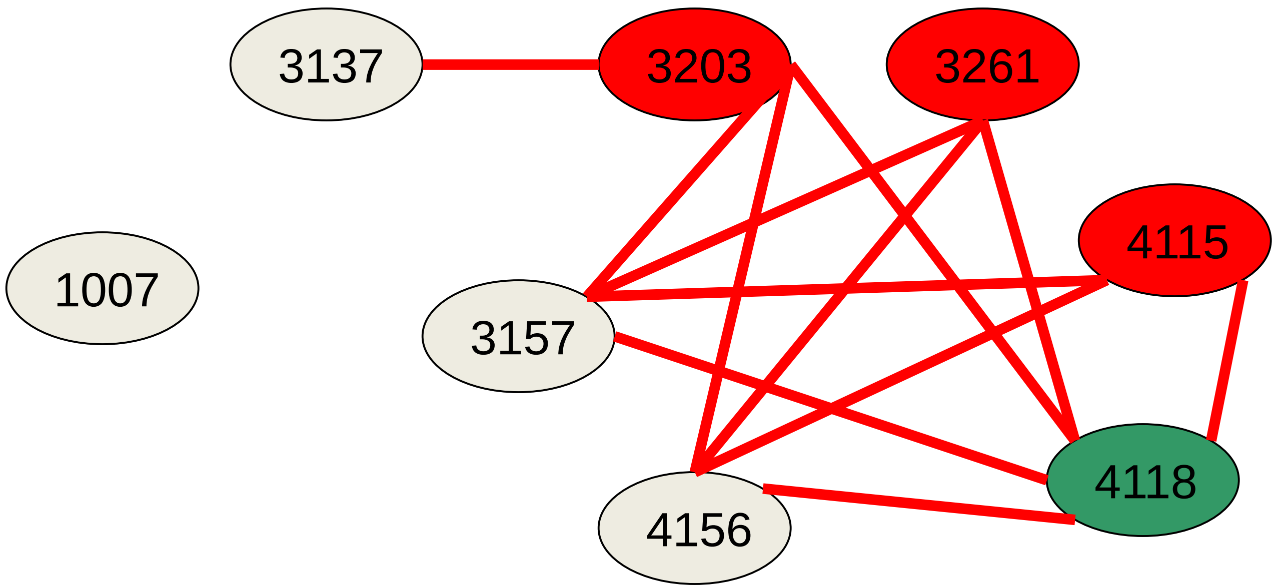
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων XI

Αρα 3261 και 4115 επίσης κόκκινα



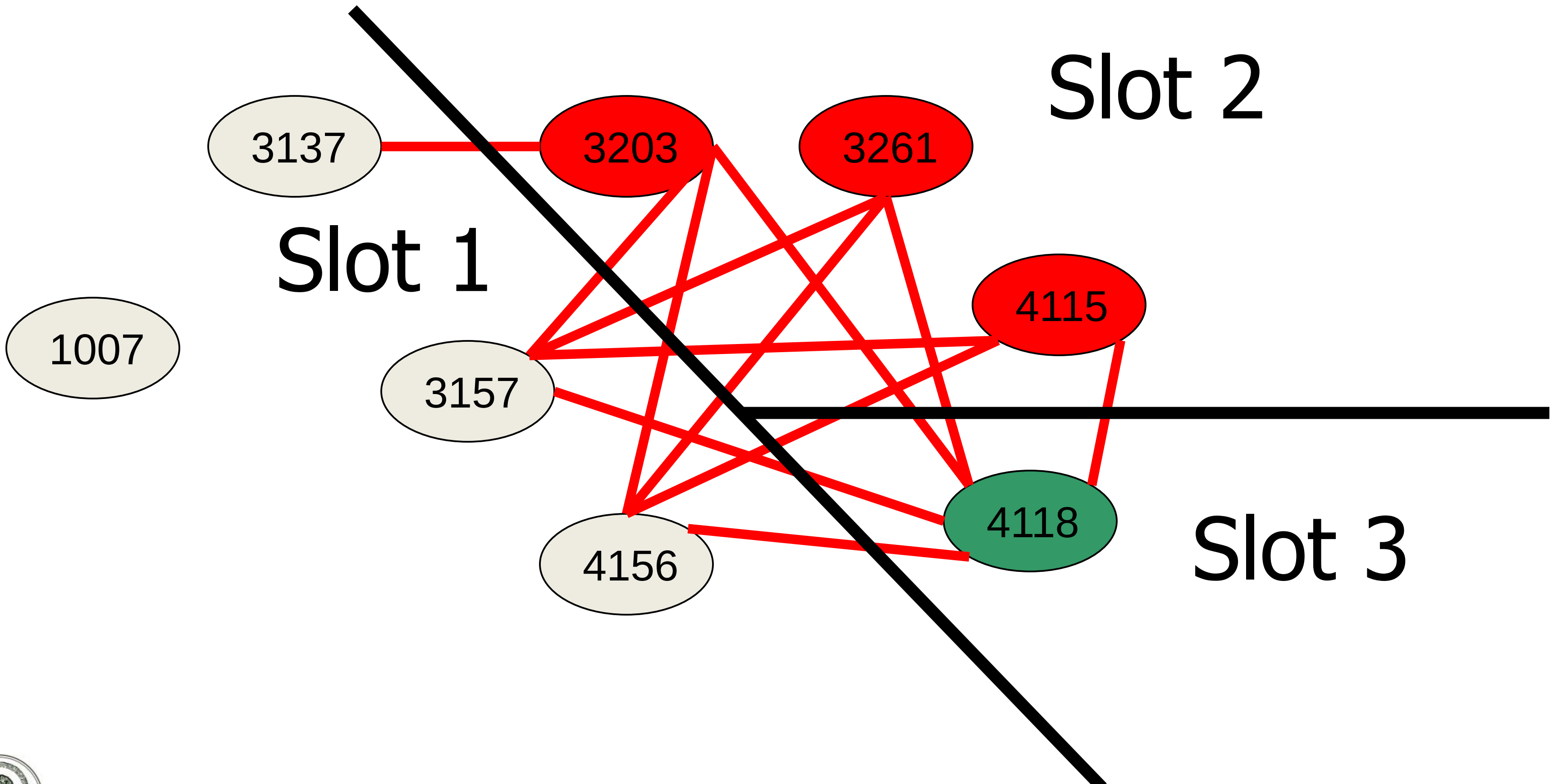
Άλλο πρόβλημα εξετάσεων XII

Τα 3137 και 1007 είναι εύκολη περίπτωση



Άλλο πρόβλημα εξετάσεων XII

Άρα απαιτούνται 3 εξεταστικά slot.



Προβλήματα Χρονοπρογραμματισμού

- Σε παρόμοια προβλήματα χρονοπρογραμματισμού οι αντίστοιχοι γράφοι είναι διμερείς. Συνεπώς τα προβλήματα αυτά ανάγονται στην εύρεση του χρωματικού αριθμού ακμών ενός διμερούς γράφου.
- Σε αυτό το πρόβλημα δίνεται απάντηση από το Θεώρημα του Koenig ($\chi'(G)=D$).
- Ο ελάχιστος αριθμός ταιριασμάτων ισούται με το χρωματικό αριθμό ακμών του διμερούς γράφου, ο οποίος με τη σειρά του ισούται με το μέγιστο βαθμό κορυφών του γράφου.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.