ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

## **Ενότητα 6**: Ακρότατα συναρτησιακών διανυσματικών συναρτήσεων

**Νίκος Καραμπετάκης**
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα

- Διατύπωση **ικανών** (Legendre - Jacobi) **και αναγκαίων** (Euler - Lagrange) **συνθηκών** για την εύρεση τοπικού ακρότατου ενός συναρτησιακού το οποίο εξαρτάται από μια **διανυσματική συνάρτηση** μιας μεταβλητής και την παράγωγο της π.χ. J(t,x(t),x'(t)).
- **Συνθήκες εγκαρσιότητας** που πρέπει να πληρούνται από τις αρχικές και τις τελικές συνθήκες της συνάρτησης x(t) ώστε να έχει ακρότατο το συναρτησιακό J(t,x(t),x'(t)).
- Επίλυση του **βραχυστόχρονου προβλήματος** (brachistochrone problem) και του **προβλήματος της αλυσίδας** (hanging chain or catenary problem).

# Σκοποί Ενότητας

- Διατύπωση ***αναγκαίων συνθηκών*** Euler-Lagrance για την ύπαρξη τοπικού ακρότατου ενός συναρτησιακού.
- Διατύπωση ***ικανών συνθηκών*** Legendre-Jacobi για την ύπαρξη τοπικού ακρότατου ενός συναρτησιακού.
- Τερματική συνθήκη/ες ή **συνθήκη/ες εγκαρσιότητας** και μελέτη ειδικών περιπτώσεων.

# Αναγκαία συνθήκη (1)

Έστω

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

όπου

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}, x(t_0) = x_0, x\left(t_f\right) = x_f.$$

# Αναγκαία συνθήκη (2)

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \Bigg\{ \overbrace{F\big(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t\big)}^{Taylor} - F\big(x(t), \dot{x}(t), t\big) \Bigg\} dt +$$

$$\boxed{+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial F}{\partial x}\big(x(t), \dot{x}(t), t\big) \right]^T \delta x(t) + \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\big(x(t), \dot{x}(t), t\big) \right]^T \delta \dot{x}(t) \right\} dt}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \{ όροι\ υψηλότερης\ ταξης\ \delta x(t), \delta \dot{x}(t) \}\, dt$$

# Αναγκαία συνθήκη (3)

$$0 = \delta J(x, \delta x) =$$

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right)\right]^T \delta x(t_f) - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right)\right]^T \delta x(t_0)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\right]\right\}^T \delta x(t) dt$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\right] = 0}$$

# Παράδειγμα 1 (1)

$$J(x) = \int_0^{\pi/4} \Big[\underbrace{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t)}_{F(x,\dot{x})}\Big] dt$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} x_1(\frac{\pi}{4}) \\ x_2(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \end{bmatrix} - \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

# Παράδειγμα 1 (2)

$$\begin{bmatrix} 2x_1(t) \\ 2x_2(t) \end{bmatrix} - \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2(t) = 2x_1(t) \\ \ddot{x}_1(t) = 2x_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{\ddot{x}_2(t)}{2} \\ x_2^{(4)} - 4x_2(t) = 0 \end{cases} \xRightarrow{p^4-4=0}$$

$$x_2(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + c_3 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + c_4 \sin(\sqrt{2}t)$$

$$x_1(t) = \frac{\ddot{x}_2(t)}{2} = \cdots.$$

Τα $c_1, c_2, c_3, c_4$ υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

# Παράδειγμα 1 (3)

1. **<u>Συνθήκη Legendre</u>**

- Σχετικό Ελάχιστο:

$$R=\begin{bmatrix} \overbrace{\dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1^{*2}}}^{D_1} & \overbrace{\dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1^{*}\partial \dot{x}_2^{*}}}^{D_2} & \overbrace{\cdots}^{..} & \overbrace{\dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1^{*}\partial \dot{x}_n^{*}}}^{D_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_n^{*}\partial \dot{x}_1^{*}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_n^{*}\partial \dot{x}_2^{*}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_n^{*2}} \end{bmatrix} > 0$$

ή $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$

- Σχετικό Μέγιστο: $R < 0 \; \eta \; D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n < 0.$

# Παράδειγμα 1 (4)

2. **Συνθήκη Jacobi**

$$S_{ji}(x^*) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_i}\right], \mathrm{i,j} = 1, \dots, \mathrm{n}$$

$$R_{ij}(x^*) = R_{ji} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_i}, i, j = 1, \dots, n$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(S_{ji} + S_{ij})u_j - \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} R_{ji}\dot{u}_j\right) = 0, i = 1, \dots, n$$

Έστω $u_{k1}(t), u_{k2}(t),\dots, u_{kn}(t)\ k = 1,2, . . , n$ οι λύσεις $u_{ks}(t_0) = 0\ \forall k, s\ and\ \dot{u}_{kk}(t_0) = 1, \dot{u}_{ks}(t_0) = 0, k \neq s$

**Αυστηρή Συνθήκη Jacobi** $\Delta(t) = [u_{ks}(t)] \neq 0\ \forall t \in \left(t_0, t_f\right]$

# Παράδειγμα 2 (1)

$$J(x) = \int_0^{\pi/4} \Bigg[\underbrace{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t)}_{F(x,\dot{x})}\Bigg] dt$$

- **<u>Συνθήκη Legendre</u>**

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = \dot{x}_2(t) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial {\dot{x}_1}^2} = 0 = R_{11} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} = 1 = R_{21} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = \dot{x}_1(t) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial {\dot{x}_2}^2} = 0 = R_{22} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} = 1 = R_{12} \end{cases}$$

# Παράδειγμα 2 (2)

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ούτε $>0$ ούτε $<0$ Ιδιοτιμές -1, +1.

- **<u>Συνθήκη Jacobi</u>**

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial {x_1}^2} = 2 & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1 \partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_2 \partial x_1} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial {x_2}^2} = 2 & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_2 \partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1 \partial x_2} = 0 \end{cases}$$

# Παράδειγμα 2 (3)

$$S_{11} = 2, S_{12} = 0, S_{21} = 0, S_{22} = 2$$

$$R_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial {\dot{x}_1}^2} = 0$$

$$R_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} = 1 = R_{21}$$

$$R_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial {\dot{x}_2}^2} = 0$$

$$i = 1 \quad \frac{1}{2}(4u_1 + 0u_2) - \frac{d}{dt}[\dot{u}_2] = 0 \Rightarrow 2u_1 - \ddot{u}_2 = 0$$

$$i = 2 \quad \frac{1}{2}(0u_1 + 4u_2) - \frac{d}{dt}[\dot{u}_1] = 0 \Rightarrow 2u_2 - \ddot{u}_1 = 0$$

# Παράδειγμα 2 (4)

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}\ddot{u}_2 \\ 2u_2 - \frac{1}{2}u_2^{(4)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}\ddot{u}_2 \\ u_2^{(4)} - 4u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$u_2 = c_1 e^{\sqrt{2t}} + c_2 e^{-\sqrt{2t}} + c_3 \cos\left(\sqrt{2t}\right) + c_4 \sin(\sqrt{2t})$$

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 \quad u'_1(0) = 1 \\ u_2(0) = 0 \quad u'_2(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{11}(t) = u_1(t) \\ u_{12}(t) = u_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 \quad u'_1(0) = 0 \\ u_2(0) = 0 \quad u'_2(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{21}(t) = u_1(t) \\ u_{22}(t) = u_2(t) \end{cases}$$

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{bmatrix} \neq 0 \; \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$$

# Παράδειγμα 2 (5)

Όμοια με πρόβλημα 4:

$$\delta J(x,\delta x)=0=\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)\right]^T \delta x_f +$$

$$+\left[F\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)-\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f\right)\right]^T \dot{x}^*(t_f)\right]\delta t_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^*(t),\dot{x}^*(t),t\right)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t),\dot{x}^*(t),t\right)\right]\right\}^T \delta x(t)dt$$

**Παρατήρηση:** Για την κάθε κατάσταση $x_i(t)$ μπορεί να έχω ένα από τα προβλήματα 1-4 και συνεπώς θα εφαρμόζω τις ανάλογες συνθήκες!!

# Παράδειγμα 2 (6)

Π.χ. για τις πρώτες $r$ καταστάσεις ξέρω τις τελικές τιμές στο $t_f$ (Πρόβλημα 1)

$$x(t_f) = x_f$$

αλλά για τις επόμενες $n - r$ ξέρω μόνο τον χρόνο $t_f$ (Πρόβλημα 2)

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) = 0 \; i = r + 1, \dots, n$$

# Πρόβλημα με ελεύθερα άκρα (1)

$$J(x) = \int_0^{\pi/4} [x_1^2(t) + \dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) + \dot{x}_2^2(t)]dt$$

$$x_1(0) = 1 \qquad x_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \qquad \leftarrow (\text{Πρόβλημα } 1)$$

$$x_2(0) = \frac{3}{2} \quad x_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\ \varepsilon\lambda\varepsilon\acute{\upsilon}\theta\varepsilon\rho o \qquad \leftarrow (\text{Πρόβλημα } 2)$$

Δ.Ε. Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) + 2\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

# Πρόβλημα με ελεύθερα άκρα (2)

$$\begin{cases} \ddot{x}_2(t) = 2x_1(t) \\ 2\ddot{x}_2(t) + \ddot{x}_1(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_2(t) = 2x_1(t) \\ 4x_1(t) + \ddot{x}_1(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2(t) = 2c_1 cos2t + 2c_2 sin2t \\ x_1(t) = c_1 cos2t + c_2 sin2t \end{cases}$$

Άρα

$$x_1(t) = c_1 cos2t + c_2 sin2t$$

και

$$x_2(t) = \frac{-c_1}{2} cos2t - \frac{c_2}{2} sin2t + c_3 t + c_4$$

# Πρόβλημα με ελεύθερα άκρα (3)

$$\left\{\begin{matrix} x_1(0) = 1 = c_1 * 1 + c_2 * 0 \\ x_2(0) = \frac{3}{2} = \frac{-c_1}{2} * 1 - \frac{c_2}{2} * 0 + c_3 * 0 + c_4 \\ x_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 = c_1 * 0 + c_2 * 1 \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\left(x^*\left(\frac{\pi}{4}\right), \dot{x}^*\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 = \dot{x}_1^*\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\dot{x}_2^*\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 = 2c_3 \end{matrix}\right\}$$

$$c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 0, c_4 = 2$$

# Βιβλιογραφία


- Νικόλαος Καραμπετάκης, 2009, Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων, Εκδόσεις Ζήτη.
- D.E. Kirk, 1970, Optimal Control Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- D. S. Naidu, 2002, Optimal Control Systems, CRC Press LLC.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου. **Ενότητα 6**: Ακρότατα συναρτησιακών διανυσματικών συναρτήσεων ». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS288/

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης