ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου

Ενότητα 8: Συναρτησιακά καμπύλων οι οποίες υπόκεινται σε δεσμούς

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Συναρτησιακή εξάρτηση.
- Εύρεση τοπικού ακρότατου συναρτησιακού διανυσματικής συνάρτησης η οποία υπόκειται σε δεσμούς - Λύση με την χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange.
- Ισοπεριμετρικό πρόβλημα.

Σκοποί Ενότητας

- Ο μετασχηματισμός της επίλυσης ενός προβλήματος υπολογισμού τοπικού ακρότατου συναρτησιακού διανυσματικής συνάρτησης **η οποία υπόκειται σε δεσμούς**, σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα στο οποίο δεν έχουμε δεσμούς πλέον να ικανοποιούνται.
- Ο μετασχηματισμός αυτός επιτυγχάνεται με χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Συναρτησιακή εξάρτηση (1)

Το σύνολο $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ λέγεται συναρτησιακώς εξαρτημένο στο $J \subset \mathbb{R}^q$ αν-ν οι συναρτήσεις $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_q)$σε κάθε σημείο $(x_1, x_2, \dots, x_q) \in J \subseteq \mathbb{R}^q$ επαληθεύουν μια ή περισσότερες σχέσεις της μορφής $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0$

οι οποίες δεν περιέχουν καμία από τις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_q$.

Πρόταση Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_q), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_q), .., \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_q)$$

να είναι συναρτησιακώς εξαρτημένες είναι η Ιακωβιανή:

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \ \forall (x_1, x_2, \dots, x_q) \in J$$

<u>**Σημείωση**</u>: Για συναρτησιακή ανεξαρτησία παρόμοια.

Παράδειγμα 1

$$\varphi_1(x,y,z) = 2x - y + 3z,$$
$$\varphi_2(x,y,z) = 6x + 8y - 2z - 1,$$
$$\varphi_3(x,y,z) = 3x + 4y - z$$

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\ )}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & 8 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Π.χ. $\varphi_2 = 2\varphi_3 - 1$

Παράδειγμα 2

$\varphi_1(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3, \varphi_2(x,y,z) = xyz,$
$\varphi_3(x,y,z) = x + y + z$

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)$$

Γραμ. **ανεξ**. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x \neq y \;\&\; x \neq z \;\&\; y \neq z \;\&\; x \neq -y, -z$

Άσκηση: Ελέγξτε τις συναρτήσεις

$$\varphi_1(x,y) = x^2 - y^2, \varphi_2(x,y) = 2xy$$

Συναρτησιακή εξάρτηση (2)

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(\dot{\omega}_1, \dots, \dot{\omega}_n)} \neq 0$$

$$f_i\big(\omega_1(t), \dots, \omega_{n+\mu}(t), \dot{\omega}_1(t), \dots, \dot{\omega}_{n+\mu}(t), t\big) = 0, i = 1, . . , n.$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \dot{\omega}_1 = \Phi_1\left(t, \omega_1(t), \dots, \omega_{n+\mu}(t), \dot{\omega}_1(t), \dots, \dot{\omega}_{n+\mu}(t)\right) \\ \dot{\omega}_2 = \Phi_2\left(t, \omega_1(t), \dots, \omega_{n+\mu}(t), \dot{\omega}_1(t), \dots, \dot{\omega}_{n+\mu}(t)\right) \\ \vdots \\ \dot{\omega}_n = \Phi_n\left(t, \omega_1(t), \dots, \omega_{n+\mu}(t), \dot{\omega}_1(t), \dots, \dot{\omega}_{n+\mu}(t)\right) \end{array}\right\} (1)$$

Έστω $\omega_{n+1}, . . , \omega_{n+\mu}$ ανεξάρτητες. Τότε από την (1) παίρνω:

$$\begin{array}{c} \omega_1 = g_1\big(\omega_{n+1}, . . , \omega_{n+\mu}, \dot{\omega}_{n+1}, . . , \dot{\omega}_{n+\mu}\big) \\ \omega_2 = g_2\big(\omega_{n+1}, . . , \omega_{n+\mu}, \dot{\omega}_{n+1}, . . , \dot{\omega}_{n+\mu}\big) \\ \vdots \\ \omega_n = g_1\big(\omega_{n+1}, . . , \omega_{n+\mu}, \dot{\omega}_{n+1}, . . , \dot{\omega}_{n+\mu}\big) \end{array}$$

Ακρότατα συναρτησιακών διανυσματικών συναρτήσεων με περιορισμούς

Πρόβλημα: Να βρεθούν αναγκαίες συνθήκες ώστε το $x^* \in \left(C^2\left[t_0, t_f\right]\right)^{n+m}$ να αποτελεί σχετικό ακρότατο του συναρτησιακού

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) dt$$

όπου το $x^* \in \left(C^2\left[t_0, t_f\right]\right)^{n+m}$, ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$q\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = 0 \text{ ή } q_i\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = 0, i = 1,2, .., n$$

Εδώ επιπλέον κάνουμε την υπόθεση

$$\frac{\partial(q_1, \ldots, q_n)}{\partial(\dot{x}_{1, \ldots,} \dot{x}_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial q_1}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial \dot{x}_n} \\ \frac{\partial q_2}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial q_2}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial q_2}{\partial \dot{x}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial q_n}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial \dot{x}_n} \end{bmatrix} \neq 0 \;\rightarrow$$

Α’ τρόπος : Επίλυση και αντικατάσταση στο συναρτησιακό

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = \Phi_1\left(t, x_1, \dots, x_{n+\mu}, \dot{x}_{n+1}, \dots, \dot{x}_{n+\mu}\right) \\
\dot{x}_2 = \Phi_2\left(t, x_1, \dots, x_{n+\mu}, \dot{x}_{n+1}, \dots, \dot{x}_{n+\mu}\right) \\
\vdots \\
\dot{x}_n = \Phi_n\left(t, x_1, \dots, x_{n+\mu}, \dot{x}_{n+1}, \dots, \dot{x}_{n+\mu}\right) \\
\downarrow \\
x_1 = g_1\left(x_{n+1}, \dots, x_{n+\mu}, \dot{x}_{n+1}, \dots, \dot{x}_{n+\mu}\right) \\
x_2 = g_2\left(x_{n+1}, \dots, x_{n+\mu}, \dot{x}_{n+1}, \dots, \dot{x}_{n+\mu}\right) \\
\vdots \\
x_n = g_n\left(x_{n+1}, \dots, x_{n+\mu}, \dot{x}_{n+1}, \dots, \dot{x}_{n+\mu}\right)
\end{gathered}$$

όπου οι συναρτήσεις $x_{n+1}, \dots, x_{n+\mu}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

$$\left.\begin{array}{r} n + m\ αγνωστες\ συναρτησεις \\ n\ εξισώσεις \end{array}\right\} \Rightarrow m \text{ γρ.ανεξ. συν. (είσοδοι)}$$

<u>Α’ Τρόπος</u>: Επίλυση των εξισώσεων και αντικατάσταση στο συναρτησιακό.

Β’ τρόπος – Πολλαπλασιαστές Lagrange (1)

Θεωρούμε λοιπόν τις συναρτήσεις (και όχι σταθερές) $p_i(t)$ και σχηματίζουμε το νέο συναρτησιακό

$$J_a(x,p) = \int_{t_0}^{t_f} \{F(t,x(t),\dot{x}(t)) + p_1(t)\big[q_1\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)\big]$$

Β’ τρόπος – Πολλαπλασιαστές Lagrange (2)

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$F_a(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)) = F(t, x(t), \dot{x}(t)) + p^T(t) q(t, x(t), \dot{x}(t))$$

$$\Delta J_a(x, p) = J_a(x + \delta x, p + \delta p) - J_a(x, p) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \{F_a\big(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \dot{\delta} x(t), p(t) + \delta p(t)\big)$$

Β' τρόπος – Πολλαπλασιαστές Lagrange (3)

$$F_a\big(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)\big) \triangleq F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) + p^T(t) q\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)$$

$$\frac{\partial F_a^T}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t), p(t))$$

$$= \frac{\partial F^T}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) + p^T(t) \frac{\partial q}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))$$

$$\frac{\partial F_a^T}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t), p(t))$$

$$= \frac{\partial F^T}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) + p^T(t) \frac{\partial q}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$$

$$\frac{\partial F_a^T}{\partial p}(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)) = q^T(t, x(t), \dot{x}(t))$$

B’ τρόπος – Πολλαπλασιαστές Lagrange (4)

$$\delta J_a(x,p) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial F^T}{\partial x}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) + p^T(t) \frac{\partial q}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right] \delta x(t) \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial F^T}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) + p^T(t) \frac{\partial q}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right] \delta \dot{x}(t) \right.$$

Β’ τρόπος – Πολλαπλασιαστές Lagrange (5)

$$= \left[\left[\frac{\partial F^T}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) + p^T(t)\frac{\partial q}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\right]\delta x(t)\right]_{t_0}^{t_f}$$

$$- \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F^T}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) + p^T(t)\frac{\partial q}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\right]\delta x(t)dt =$$

$$= - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F^T}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) + p^T(t)\frac{\partial q}{\partial \dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\right]\delta x(t)dt$$

Β’ τρόπος – Πολλαπλασιαστές Lagrange (6)

$$\delta J_a(x,p) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial F^T}{\partial x}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) + p^T(t) \frac{\partial q}{\partial x}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) \right.\right.$$

Β’ τρόπος – Πολλαπλασιαστές Lagrange (7)

που προκύπτουν από τους n συντελεστές των $\delta x_1(t), \delta x_2(t), \dots, \delta x_n(t)$

δηλαδή

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1(t)\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + p_2(t)\frac{\partial q_2}{\partial x_1} + \cdots - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} + p_1(t)\frac{\partial q_1}{\partial \dot{x}_1} + p_2(t)\frac{\partial q_2}{\partial \dot{x}_1} + \cdots\right] = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_1(t)\frac{\partial q_1}{\partial x_2} + p_2(t)\frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \cdots - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} + p_1(t)\frac{\partial q_1}{\partial \dot{x}_2} + p_2(t)\frac{\partial q_2}{\partial \dot{x}_2} + \cdots\right] = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_1(t)\frac{\partial q_1}{\partial x_n} + p_2(t)\frac{\partial q_2}{\partial x_n} + \cdots - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n} + p_1(t)\frac{\partial q_1}{\partial \dot{x}_n} + p_2(t)\frac{\partial q_2}{\partial \dot{x}_n} + \cdots\right] = 0$$

B’ τρόπος – Πολλαπλασιαστές Lagrange (8)

$$\delta \mathrm{J}_a(x,p) = \left\{ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} + p_1(t)\frac{\partial q_1}{\partial x_{n+1}} + p_2(t)\frac{\partial q_2}{\partial x_{n+1}} + \cdots \right.\right.$$

Θεώρημα (1)

Θεώρημα: Έστω το συναρτησιακό $J: \left(C^2\left[t_0, t_f\right], \|\cdot\|_\infty\right)^{n+m} \to \mathbb{R}$,

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) dt,$$

όπου $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$, $x\left(t_f\right) = x_f \in \mathbb{R}^{n+m}$ και έστω ότι η συνάρτηση F είναι κλάσης C^2 ως προς $t, x, \dot{x}$ (έχει δηλαδή συνεχείς πρώτες και δεύτερες παραγώγους ως προς $t, x, \dot{x}$). Έστω επίσης ότι το διάνυσμα $x(t)$ ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων $q\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = 0$ όπου q είναι ένα διάνυσμα $n \times 1$ κλάσης C^2,

Θεώρημα (2)

ενώ επιπλέον ισχύει η συνθήκη $\frac{\partial(q_1,\ldots,q_n)}{\partial(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)} \neq 0.$

Εάν το συναρτησιακό J δέχεται ακρότατο στη συνάρτηση

$x^* \in \left(C^2\left[t_0, t_f\right], \|\cdot\|_\infty\right)^{n+m}$ τότε θα ικανοποιείται η διαφορική

εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(t, x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t)\right) = 0,$$
$$\forall t \in \left[t_0, t_f\right]$$

Θεώρημα (3)

όπου

$$F_a(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)) \triangleq F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) + p^T(t) q(t, x(t), \dot{x}(t))$$

καθώς και η συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial F_a}{\partial p}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t)) - \frac{d}{dt}\frac{F_a}{\partial p}\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t)\big)$$
$$= 0, \forall t \in \big[t_0, t_f\big]$$

ή ισοδύναμα $q\big(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)\big) = 0.$

Παραδείγματα (1)

Να βρεθούν οι συναρτήσεις $\omega_1(t), \omega_2(t)$ που ελαχιστοποιούν το συναρτησιακό

$$J(\omega) = \int_0^{t_f} \frac{1}{2}[\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)]dt$$

όταν $\dot{\omega}_1(t) = \omega_2(t)$.

Συνθήκη: $q(\omega, \dot{\omega}) = \omega_2(t) - \dot{\omega}_1(t) = 0$

Ορισμός: $F_a(\omega, \dot{\omega}, p, t) = \frac{1}{2}[\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)] + p_1(t)[\omega_2(t) -$

Παραδείγματα (2)

$$\left.\begin{array}{c} \omega_1(t) + \dot{p}_1(t) = 0 \\ \omega_2(t) + p_1(t) = 0 \\ \text{Περιορισμοί } \dot{\omega}_1(t) = \omega_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\omega_1(t) = \left(\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}\right) c_1 + \left(\frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{t}}{2}\right) c_2$$

$$\omega_2(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \left(-c_1 + e^{2t} c_1 - c_2 - e^{2t} c_2\right)$$

$$p_1(t) = \left(\frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{t}}{2}\right) c_1 + \left(\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}\right) c_2$$

Παράδειγμα 2.27 (1)

Να βρεθούν οι αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχει σχετικό ακρότατο το συναρτησιακό

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} [x_1^2(t) + x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)]dt$$

Όταν τα $x_i(t), i = 1,2,3$ ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + [1 - x_1^2(t)]x_2(t) + x_3(t)$

Παράδειγμα 2.27 (2)

$$F_a\big(x(t),\dot{x}(t),p(t)\big)$$
$$= x_1(t)^2 + x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + p_1(t)\{\dot{x}_1(t) - x_2(t)\}$$
$$+ p_2(t)\{\dot{x}_2(t) + x_1(t) - x_2(t) + x_1(t)^2 x_2(t) - x_3(t)\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\big(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t)\big)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$2x_1^*(t) + x_2^*(t) + 2x_1^*(t)x_2^*(t)p_2^*(t) + p_2^*(t) - \frac{d}{dt}[p_1^*(t)] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{p}_1^*(t) = 2x_1^*(t) + x_2^*(t) + p_2^*(t) + 2x_1^*(t)x_2^*(t)p_2^*(t)$$

Παράδειγμα 2.27 (3)

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t))-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\left(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t)\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$x_1^*(t)+2x_2^*(t)-p_1^*(t)-p_2^*(t)+x_1^*(t)\ ^2p_2^*(t)-\frac{d}{dt}[p_2^*(t)]=0\Rightarrow$$

$$\dot{p}_2^*(t)=x_1^*(t)+2x_2^*(t)-p_1^*(t)-p_2^*(t)+x_1^*(t)^2p_2^*(t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t))-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\left(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t)\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$2x_3^*(t)-p_2^*(t)-\frac{d}{dt}[0]=0\Rightarrow$$

$$2x_3^*(t)-p_2^*(t)=0$$

Παράδειγμα 2.27 (4)

$$\frac{\partial F_a}{\partial p_1}(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial p_1}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t)\right)\right] = 0$$

$$\dot{x}_1^*(t) - x_2^*(t) - \frac{d}{dt}[0] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_1^*(t) - x_2^*(t) = 0$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial p_2}(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F_a}{\partial p_2}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t)\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_2^*(t) + x_1^*(t) - [1 - x_1^*(t)^2]x_2^*(t) - x_3^*(t) - \frac{d}{dt}[0] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_2^*(t) + x_1^*(t) - [1 - x_1^*(t)^2]x_2^*(t) - x_3^*(t) = 0$$

Παράδειγμα 2.28 (1)

Να βρεθούν οι αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχει σχετικό ακρότατο το συναρτησιακό

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} x(t)^T Q x(t) + \frac{1}{2} u(t)^T R u(t) \right\} dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = [1]$$

$x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, u(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

$$F_a(x(t), \dot{x}(t), p(t), u(t)) = \frac{1}{2}\{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u^2(t)\} +$$

$$+p_1(t)\{\dot{x}_1(t) - x_2(t)\} + p_2(t)\{\dot{x}_2(t) - x_1(t) - u(t)\}$$

Παράδειγμα 2.28 (2)

$$F_a(x(t),\dot{x}(t),p(t),u(t)) = \frac{1}{2}\{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u^2(t)\} + p_1(t)\{\dot{x}_1(t) - x_2(t)\} + p_2(t)\{\dot{x}_2(t) - x_1(t) - u(t)\}$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial x_1}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),u^*(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),u^*(t))\right] = 0 \Rightarrow$$

$$x_1^*(t) - p_2^*(t) - \frac{d}{dt}[p_1^*(t)] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{p}_1^*(t) = x_1^*(t) - p_2^*(t)$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial x_2}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),u^*(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),u^*(t))\right] = 0 \Rightarrow$$

$$x_2^*(t) - p_1^*(t) - \frac{d}{dt}[p_2^*(t)] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{p}_2^*(t) = x_2^*(t) - p_1^*(t)$$

Παράδειγμα 2.28 (3)

$$\frac{\partial F_a}{\partial u}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),u^*(t))-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),u^*(t))\right]=0\Rightarrow$$

$$u^*(t)-p_2^*(t)-\frac{d}{dt}[0]=0\Rightarrow$$

$$u^*(t)=p_2^*(t)$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial p_1}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),u^*(t))-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial p_1}(x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),u^*(t))\right]=0$$
$\Rightarrow$

$$\dot{x}_1(t)-x_2(t)-\frac{d}{dt}[0]=0\Rightarrow$$

$$\dot{x}_1^*(t)=x_2^*(t)$$

Παράδειγμα 2.28 (4)

$$\frac{\partial F_a}{\partial p_2}(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t), u^*(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial p_2}(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t), u^*(t))\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_2^*(t) * x_1^*(t) - u^*(t) - \frac{d}{dt}[0] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_2^*(t) = x_1^*(t) + u^*(t)$$

- $\dot{p}_1^*(t) = x_1^*(t) - p_2^*(t)$
- $\dot{p}_2^*(t) = x_2^*(t) - p_1^*(t)$
- $u^*(t) = p_2^*(t)$
- $\dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t)$
- $\dot{x}_2^*(t) = x_1^*(t) + u^*(t)$

Παράδειγμα 2.28 (5)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^*(t) \\ \dot{x}_2^*(t) \\ \dot{p}_1^*(t) \\ \dot{p}_2^*(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ p_1^*(t) \\ p_2^*(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1^*(t_f) \\ x_2^*(t_f) \\ p_1^*(t_f) \\ p_2^*(t_f) \end{bmatrix} = e^{At_f} \begin{bmatrix} x_1^*(0) \\ x_2^*(0) \\ p_1^*(0) \\ p_2^*(0) \end{bmatrix} = e^{A(t_f-t)} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ p_1^*(t) \\ p_2^*(t) \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2.28 (6)

$$e^{At} = L^{-1}\{[sI_4 - A]^{-1}\} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t}) & -e^{-t}+e^{t}-t & \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{t}+2t) & \frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{t})^2 \\ \frac{1}{2}(-e^{-t}+e^{t}) & -1+e^{-t}+e^{t} & -\frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{t})^2 & \frac{1}{2}(-e^{-t}+e^{t}) \\ \frac{1}{2}(-e^{-t}+e^{t}) & e^{-t}(-1+e^{t})^2 & 2-\frac{e^{-t}}{2}-\frac{e^{t}}{2} & \frac{1}{2}(-e^{-t}+e^{t}) \\ 0 & t & -t & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2.28 (7)

Επειδή τα $t_f, x(t_f)$ είναι άγνωστα και ανεξάρτητα

$$\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{\tilde{x}}}\left(t_f, x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), p^*(t_f)\right)\right]^T \delta\tilde{x}_f +$$

$$+\left[F_a\left(t_f, x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), p^*(t_f)\right)\right.$$

Παράδειγμα 2.28 (8)

$$\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow p^*(t_f) = \begin{bmatrix} p_1^*(t_f) \\ p_2^*(t_f) \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial \dot{u}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial \dot{p}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), p^*(t_f), t_f\right) = 0$$

Παράδειγμα 2.28 (9)

Επειδή τα $t_f, x(t_f)$ είναι άγνωστα και ανεξάρτητα

$$\left[\frac{\partial F_a}{\partial \dot{\tilde{x}}}\left(t_f, x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), p^*(t_f)\right)\right]^T \delta\tilde{x}_f$$
$$+\left[F_a\left(t_f, x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), p^*(t_f)\right)\right.$$

Παράδειγμα 2.28 (10)

$$F_a\left(t_f, x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), p^*(t_f)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left\{x_1^*\,(t_f)^2 + x_2^*\,(t_f)^2 + u^*(t_f)^2\right\} + p_1^*(t_f)\left\{\dot{x}_1(t_f) - x_2(t_f)\right\}$$
$$+\, p_2^*(t_f)\left\{\dot{x}_2^*(t_f) - x_1^*(t_f) - u^*(t_f)\right\} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}\left\{x_1^*\,(t_f)^2 + x_2^*\,(t_f)^2 + u^*(t_f)^2\right\} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left\{x_1^*\,(t_f)^2 + x_2^*\,(t_f)^2 + p_2^*\,(t_f)^2\right\} = 0$$
$$x_1^*\,(t_f)^2 + x_2^*\,(t_f)^2 + p_2^*\,(t_f)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^*\,(t_f)^2 + x_2^*\,(t_f)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_1^*\left(t_f\right) = x_2^*\left(t_f\right) = 0$$

Παράδειγμα 2.28 (11)

$$\begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ p^*(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t_f,t) & \varphi_{12}(t_f,t) \\ \varphi_{21}(t_f,t) & \varphi_{22}(t_f,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x^*(t_f) = \varphi_{11}(t_f,t)x^*(t) + \varphi_{12}(t_f,t)p^*(t) \\ p^*(t_f) = 0 = \varphi_{21}(t_f,t)x^*(t) + \varphi_{22}(t_f,t)p^*(t) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x^*(t_f) = \left[\varphi_{11}(t_f,t) - \varphi_{12}(t_f,t)\varphi_{22}(t_f,t)^{-1}\varphi_{21}(t_f,t\right] x^*(t) \\ p^*(t) = \underbrace{-\varphi_{22}(t_f,t)^{-1}\varphi_{21}(t_f,t)}_{K(t)} x^*(t) \end{array} \right\}$$

Παράδειγμα 2.28 (12)

$$p^*(t) = \underbrace{-\varphi_{22}(t_f,t)^{-1}\varphi_{21}(t_f,t)}_{K(t)}x^*(t) =$$

$$= \underbrace{-\begin{bmatrix} 2-\dfrac{e^{-(t_f-t)}}{2}-\dfrac{e^{(t_f-t)}}{2} & \dfrac{1}{2}\left(-e^{-(t_f-t)}+e^{(t_f-t)}\right) \\ -(t_f-t) & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\left(-e^{-(t_f-t)}+e^{(t_f-t)}\right) & e^{-(t_f-t)}\left(-1+e^{(t_f-t)}\right)^2 \\ 0 & t \end{bmatrix}}_{K(t)} x^*(t)$$

Παράδειγμα 2.28 (13)

$$u^*(t) = p_2^*(t) = [0 \quad 1]p^*(t) = [0 \quad 1]K(t)x^*(t)$$

$$= \frac{(t - t_f)Sinh[t - t_f]}{-2 + Cosh[t - t_f] - (t - t_f)Sinh[t - t_f]} x_1^*(t)$$

$$- \frac{(t - t_f)Cosh[t - t_f]}{-2 + Cosh[t - t_f] - (t - t_f)Sinh[t - t_f]} x_2^*(t)$$

Mathematica (1)

Με τη βοήθεια του , ορίζουμε αρχικά τον πίνακα A

```
In[1]:= a □ {{0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 1}, {0, 1, □1, 0}}

Out[1]= {{0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 1}, {0, 1, □1, 0}}
```

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα μετάβασης

```
In[2]:= f □ InverseLaplaceTransform[Inverse[s □ IdentityMatrix[4] □ a], s, t]

Out[2]= {{1/2 □□t (□□2t ...), ..., 1/2 □□t ..., ...}, ..., {0, □t, □t, 1}}
```

Ορίζουμε τους πίνακες φ_{21} και φ_{22}

```
In[3]:= f21 □ Part[f, {3, 4}, {1, 2}]

Out[3]= {{1/2 □□t (□1 □ □2t), □□t (□1 □ □t)^2}, {0, t}}

In[4]:= f22 □ Part[f, {3, 4}, {3, 4}]

Out[4]= {{2 □ □□t/2 □ □t/2, 1/2 □□t (□1 □ □2t)}, {□t, 1}}
```

Mathematica (2)

Υπολογίζουμε τον πίνακα $-\varphi_{22}{}^{-1}\varphi_{21}$

```
In[5]:= FullSimplify Inverse f22 .f21 MatrixForm
```

```
Out[5]//MatrixForm=
      1                  1        Cosh
 Coth    2 Csch                2 Cosh     t Sinh
      t Sinh                   t Cosh
 2 Cosh    t Sinh          2 Cosh    t Sinh
```

Αντικαθιστούμε όπου t το $t_f - t$

```
In[5]:= FullSimplify Inverse f22 .f21 . t  tff  t  MatrixForm
```

```
Out[5]//MatrixForm=
          1                       1        Cosh t tff
 t Coth t tff  2 Csch  t tff  t tff     2 Cosh t tff  Sinh t tff  t tff  t tff
      Sinh t tff   t tff                Cosh t tff  t tff
 2 Cosh t tff  Sinh t tff  t tff     2 Cosh t tff  Sinh t tff  t tff
```

Άσκηση για το σπίτι

Άσκηση 2.27 Να βρεθούν οι αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχει σχετικό ακρότατο το συναρτησιακό

$$J(x_1, x_2, u) = \frac{1}{2}\int_0^1 [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)]dt$$

όταν τα $x_i(t), i = 1,2$ ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

και επιπλέον $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1.$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα (1)

Έστω J ένα συναρτησιακό της μορφής

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

όπου $x \in \left(C^2[t_0, t_f]\right)^{n+m}$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$ και

$x(t_f) = x_f \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Έστω επίσης ότι ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη (ες)

$$\int_{t_0}^{t_f} q(t, x(t), \dot{x}(t))dt = c$$

όπου q, c είναι διανύσματα $n \times 1$ δηλαδή έχουμε τις συνθήκες

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα (2)

$$\int_{t_0}^{t_f} q_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt = c_i$$

με $i = 1,2, \dots, n$.

Ορίζουμε ως **ισοπεριμετρικό πρόβλημα (isoperimetric problem)**, το πρόβλημα εύρεσης σχετικού ακρότατου του παραπάνω συναρτησιακού, δεδομένων των περιορισμών που αναφέραμε.

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα (3)

Θέτουμε

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} q(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

$$\downarrow$$

$$z(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} q(t, x(t), \dot{x}(t))dt = 0$$

$$z(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} q(t, x(t), \dot{x}(t))dt = c$$

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t} q(t, x(t), \dot{x}(t))dt\right] = q(t, x(t), \dot{x}(t))$$

$$F_a(t, x(t), \dot{x}(t), p(t), \dot{z}(t))$$
$$= F(t, x(t), \dot{x}(t)) + p^T(t)\{q(t, x(t), \dot{x}(t)) - \dot{z}(t))\}$$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα – Συνθήκες Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F_a}{\partial x}(t,x^*,\dot{x}^*,p^*,\dot{z}^*)-\frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}(t,x^*,\dot{x}^*,p^*,\dot{z}^*)=0,\forall t\in\left[t_0,t_f\right]$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial p}(t,x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),\dot{z}^*(t))-\frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{p}}(t,x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),\dot{z}^*(t))=0,\forall t \in\left[t_0,t_f\right]$$

ή ισοδύναμα $z^*(t)=\int_{t_0}^{t_f}q\big(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\big)dt,\ z^*(t_0)=0, z^*\left(t_f\right)=$c

ή ισοδύναμα $\int_{t_0}^{t_f}q\big(t,x^*(t),\dot{x}^*(t)\big)dt=c$

$$\frac{\partial F_a}{\partial z}(t,x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),\dot{z}^*(t))-\frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{z}}\big(t,x^*(t),\dot{x}^*(t),p^*(t),\dot{z}^*(t)\big)=0\Leftrightarrow$$

$$0-\frac{d}{dt}[-p^*(t)]=0\Leftrightarrow\dot{p}^*(t)=0\Leftrightarrow p^*(t)=p\in\mathbb{R}^n$$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα – Παράδειγμα 1 (1)

Να ελαχιστοποιηθεί το εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη $x \in \left(C^2\left[t_0, t_f\right], \|\cdot\|_w\right)$, τον άξονα των xx' και τις ευθείες $t = x_0, t = x_f$ και η οποία έχει συγκεκριμένο μήκος l.

$J\big(x(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} x(t)dt,$ $\qquad \int_{t_0}^{t_f}(1 + \dot{x}(t)^2)^{1/2}dt = l$

Το μήκος της καμπύλης l θα πρέπει να ξεπερνάει την διαφορά $t_f - t_0$ δηλ. $l > t_f - t_0$.

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t}(1 + \dot{x}(t)^2)^{1/2}dt\right] = (1 + \dot{x}(t)^2)^{1/2}$$

$$z(t) = \int_{t_0}^{t}(1 + \dot{x}(t)^2)^{1/2}dt \ \nearrow$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$z(t_0) = \int_{t_0}^{t_0}(1 + \dot{x}(t)^2)^{1/2}dt = 0, z\big(t_f\big) = \int_{t_0}^{t_f}(1 + \dot{x}(t)^2)^{1/2}dt = l$$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα – Παράδειγμα 1 (2)

$$F_a(t, x(t), \dot{x}(t), p(t), \dot{z}(t)) = x(t) + p(t)\left\{(1 + \dot{x}(t)^2)^{1/2} - \dot{z}(t)\right\}$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t), \dot{z}^*(t)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t), \dot{z}^*(t)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{2\dot{x}^*(t)}{(1 + \dot{x}^*(t)^2)^{\frac{1}{2}}}p^*(t)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}^*(t)}{(1 + \dot{x}^*(t)^2)^{\frac{1}{2}}}p^*(t)\right] = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{x}^*(t)}{(1 + \dot{x}^*(t)^2)^{\frac{1}{2}}}p^*(t) = t + c_1$$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα – Παράδειγμα 1 (3)

$$F_a(t, x(t), \dot{x}(t), p(t), \dot{z}(t)) = x(t) + p(t)\left\{(1+\dot{x}(t)^2)^{1/2} - \dot{z}(t)\right\}$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial z}(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t), \dot{z}^*(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{z}}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t), \dot{z}^*(t)\right) = 0$$
$\Rightarrow$

$$0 - \frac{d}{dt}[-p^*(t)] = 0 \Rightarrow \dot{p}^*(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{p^*(t) = p \in \mathbb{R}}$$

$$\frac{\partial F_a}{\partial p}(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t), \dot{z}^*(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{p}}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t), \dot{z}^*(t)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$(1+\dot{x}(t)^2)^{1/2} - \dot{z}^*(t) - \frac{d}{dt}[0] = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{z}^*(t) = (1+\dot{x}(t)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα – Παράδειγμα 1 (4)

$$\frac{\dot{x}^*(t)}{(1+\dot{x}^*(t)^2)^{\frac{1}{2}}}p^*(t) = t + c_1$$

$$\downarrow \quad \dot{x}^*(t) = \tan(z)$$

$$\frac{\tan(z)}{(1+\tan(z)^2)^{\frac{1}{2}}}p = t(z) + c_1 \Rightarrow \frac{\tan(z)}{\frac{1}{\cos(z)}}p = t(z) + c_1 \Rightarrow$$

$$\sin(z)\, p = t(z) + c_1$$

$$t(z) = psin(z) - c_1 \ \Rightarrow \frac{dt}{dz} = pcos(z) \text{ (1)}$$

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\frac{dx}{dz}}{\frac{dt}{dz}} = \frac{\frac{dx}{dz}}{pcos(z)} = \tan(z) \Rightarrow \frac{dx}{dz} = pcos(z)\tan(z) = psin(z) \Rightarrow$$

$$x(z) = \int psin(z)dz = -pcos(z) - c_2 \text{ (2)}$$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα – Παράδειγμα 1 (5)

(1)+(2)

$$(x(z)+c_2)^2+(t(z)+c_1)^2=[-pcos(z)]^2+[psin(z)]^2=p^2$$

Ας υποθέσουμε οτι

$$x(-1)=0, x(1)=0, l\in\mathbb{R}\to l>1-(-1)=2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{Bmatrix}(0+c_2)^2+(-1+c_1)^2=p^2\\ (0+c_2)^2+(1+c_1)^2=p^2\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}c_1=0\\ c_2=\pm\sqrt{p^2-1}\end{Bmatrix}$$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα – Παράδειγμα 2 (1)

Να γράψετε τις αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συναρτησιακό

$$J(x_1, x_2) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}\{x_1(t)^2 + x_2(t)^2\}dt$$

αν τα $x_1(t), x_2(t)$ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

και ισχύει επιπλέον η παρακάτω ισοπεριμετρική συνθήκη

$$\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)dt = c \in \mathbb{R}.$$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα – Παράδειγμα 2 (2)

Η ερμηνεία από την πλευρά της Θεωρίας Ελέγχου, είναι να υπολογίσουμε την είσοδο $u(t)$ που πρέπει να εφαρμόσουμε στο σύστημα Σ, ώστε να πλησιάσουν τα $x_1(t), x_2(t)$ στο μηδέν, δεδομένου ότι η ενέργεια που θα χρησιμοποιήσουμε θέλουμε να είναι περιορισμένη.

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα – Ασκήσεις για σπίτι (1)

Άσκηση 2.28 (Πρόβλημα αλυσίδας) Να υπολογίσετε καμπύλη $x \in \left(C^2\left[t_0, t_f\right], \|\cdot\|_w\right)$ δοθέντος μήκους l, η οποία να περνά από τα σημεία $\left(t_0, x(t_0)\right), \left(t_f, x\left(t_f\right)\right)$ και της οποίας το κέντρο βάρους να βρίσκεται στην κατώτερη δυνατή θέση ή ισοδύναμα να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του συναρτησιακού

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x(t)(1 + \dot{x}(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

δεδομένου ότι $x(t_0) = x_0, x\left(t_f\right) = x_f$ και το μήκος της καμπύλης δίνεται από τη συνθήκη

$$\int_{t_0}^{t_f} (1 + \dot{x}(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt = l.$$

Ισοπεριμετρικό πρόβλημα – Ασκήσεις για σπίτι (2)

<u>Πρόβλημα</u>: Δίνεται το σύστημα που περιγράφεται από το σύστημα δ.ε.

$$\Big[\underbrace{A_0 + A_1\rho + \cdots + A_q\rho^q}_{A(\rho)}\Big] b(t) = \Big[\underbrace{B_0 + B_1\rho + \cdots + B_q\rho^q}_{B(\rho)}\Big] u(t)$$

$$\rho \coloneqq \frac{d}{dt}, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Να βρεθούν τα σχετικά ακρότατα του συναρτησιακού

$$J(\beta, u) = \int_0^t \frac{1}{2}(\beta^T Q\beta + u^T Ru)dt$$

όπου $Q \geq 0, R > 0.$

Σημείωση: Κυβεντίδης (σελ.84)

Επίσης για $J(\omega, v) = \int_0^t \frac{1}{2}(\omega^T Q\omega + v^T Rv)dt$

$$\omega^T(t) = [\beta(t) \quad \beta^{(1)}(t) \quad \ldots \quad \beta^{(n-1)}(t)]$$
$$v^T(t) = [u(t) \quad u^{(1)}(t) \quad \ldots \quad u^{(n-1)}(t)]$$

Βιβλιογραφία

- Νικόλαος Καραμπετάκης, 2009, Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων, Εκδόσεις Ζήτη.
- D.E. Kirk, 1970, Optimal Control Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- D. S. Naidu, 2002, Optimal Control Systems, CRC Press LLC.

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS288/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης