



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Λογισμός 3

Ενότητα 2: Τοπολογικές ιδιότητες των συνόλων του \mathbb{R}^n .

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα ενότητας

1. Ανοικτά και κλειστά σύνολα.
2. Συμπάγεια.
3. Κυρτά και συνεκτικά σύνολα.

Σκοποί ενότητας

- Περιγραφή των τοπολογικών ιδιοτήτων των υποσυνόλων του \mathbb{R}^n .



Ανοικτή μπάλλα

- Θα μελετήσουμε ορισμένες τοπολογικές ιδιότητες των συνόλων του \mathbb{R}^n που παίζουν σημαντικό ρόλο στην συμπεριφορά των συνεχών συναρτήσεων.
- Ας ξεκινήσουμε με έναν συμβολισμό. Αν $x \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$, η ανοικτή μπάλλα με κέντρο το x και ακτίνα r είναι το σύνολο

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

και η κλειστή το σύνολο

Κλειστή μπάλλα

και η κλειστή το σύνολο

$$\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$$

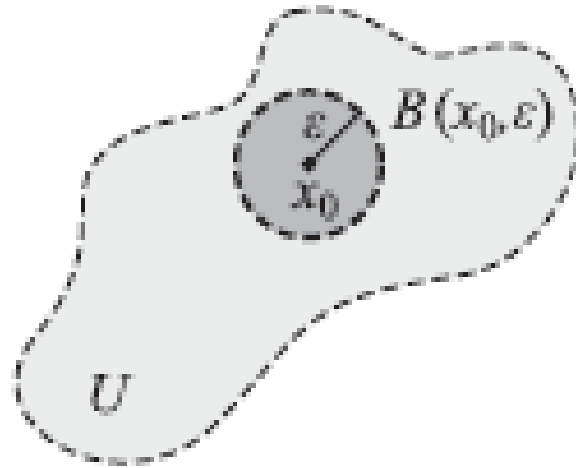
Θα ξεκαθαρίσουμε αμέσως τις έννοιες ανοικτό και κλειστό σύνολο.

Ορισμός: Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται **ανοικτό** αν για κάθε $x \in A$, $\exists \varepsilon(x) > 0$ τ.ω.

$$B(x, \varepsilon(x)) \subset A$$

Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται **κλειστό** αν είναι το συμπλήρωμα ενός ανοικτού.

Ένα ανοικτό σύνολο



Σχήμα 1

Πρόταση 1

- Η παρακάτω πρόταση δικαιολογεί πλήρως τον όρο «κλειστό σύνολο».
- **Πρόταση:** Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό και (x_k) ακολουθία στοιχείων του K που συγκλίνει στο x , τότε το $x \in K$.
 - Η παραπάνω ιδιότητα είναι χαρακτηριστική των κλειστών συνόλων.
 - Δεν ισχύει στα ανοικτά.

Παράδειγμα

- Πάρτε για παράδειγμα την ανοικτή μπάλλα $B(0,1)$ και την ακολουθία

$$\left(1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (1,0) \notin B(0,1)$$



Φραγμένο σύνολο

Ορισμός: Ένα σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$ είναι **φραγμένο** αν υπάρχει $R > 0$ τ.ω.

$$F \subset B(0, R)$$

Ορισμός: Ένα σύνολο $C \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται **συμπαγές** αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Η Πρόταση που ακολουθεί είναι χαρακτηριστική των συμπαγών.



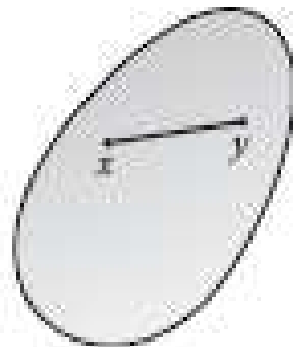
Πρόταση 2

Πρόταση: Αν $(x_k)_k$ είναι ακολουθία στοιχείων του συμπαγούς C , τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_m})_m$ της (x_k) που συγκλίνει και μάλιστα μέσα στο C .

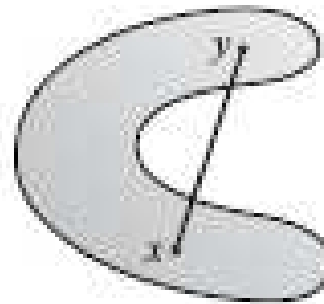


Κυρτό σύνολο (1)

Ορισμός: Ένα σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται **κυρτό** αν περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει κάθε ζεύγος των στοιχείων του.



κυρτό



όχι κυρτό

Σχήμα 2

Κυρτό σύνολο (2)

Η παραμετροποίηση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το x με το y είναι ως γνωστόν η ακόλουθη:

$$(1 - t)x + ty, t \in [0,1]$$

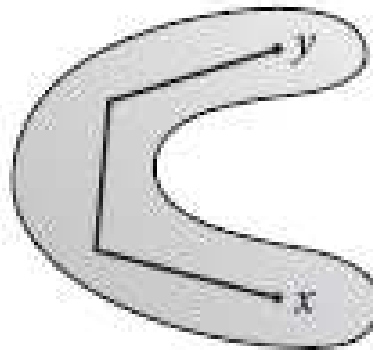
Συνεπώς το B είναι κυρτό αν για κάθε $x, y \in B$, τότε το

$$(1 - t)x + ty \in B, \text{ για κάθε } t \in [0,1].$$

Συνεκτικό κατά τόξα σύνολο (1)

- Ας έχουμε κατά νου ότι το αρχέτυπο ενός κυρτού συνόλου είναι ένα αυγό ή ένα πεπόνι.
- Μια άλλη έννοια, πιο ασθενής από αυτήν του κυρτού συνόλου είναι η ακόλουθη
- **Ορισμός:** Ένα σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται **συνεκτικό κατά τόξα**, αν για κάθε ζεύγος στοιχείων του, υπάρχει μια συνεχής καμπύλη γ που τα ενώνει και που βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο B .

Συνεκτικό κατά τόξα σύνολο (2)



Ένα σύνολο συνεκτικό κατά τόξα.

Σχήμα 3

Συνεκτικό κατά τόξα σύνολο (3)

- Ένα σύνολο συνεκτικό κατά τόξα, είναι υποχρεωτικά ένα μόνο κομμάτι. Επισημαίνουμε ότι η ημισέληνος είναι συνεκτικό κατά τόξα αλλά όχι και κυρτό. Όμως, κάθε κυρτό είναι και συνεκτικό κατά τόξα. Άρα η έννοια του κυρτού είναι ισχυρότερη του συνεκτικού κατά τόξα.

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς.
«Λογισμός 3. Τοπολογικές ιδιότητες των συνόλων του \mathbb{R}^n ». Έκδοση: 1.0.
Θεσσαλονίκη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λπ., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ