ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 3: Όρια και συνέχεια συναρτήσεων.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Όριο συνάρτησης.
2. Συνέχεια Συνάρτησης.
3. Παραδείγματα, Ασκήσεις.
4. Συνέχεια με ακολουθίες.

Σκοποί ενότητας

- Ορισμός του ορίου συναρτήσεων και της συνέχειας συναρτήσεων.

Ορισμός ορίου

- Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ και

$$A - \{x_0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Λέμε ότι η $\boldsymbol{f}$ **έχει όριο το** $\boldsymbol{\alpha}$ καθώς το x τείνει στο x_0, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\eta(\varepsilon) > 0$ τ.ω.

$$\text{αν } \|x - x_0\| \leq \eta, \text{ τότε } |f(x) - a| \leq \varepsilon.$$

Γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ ή } f(x) \xrightarrow{x \to x_0} a$$

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0)$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Λύση: Θα προσπαθήσουμε να κάνουμε όσο μικρή θέλουμε την διαφορά

$$|f(x,y) - 0|.$$

Παράδειγμα 1 (2)

Έχουμε

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2|x|+y^2|y|}{x^2+y^2}$$

Όμως

$$|x| \text{ και } |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Άρα

Παράδειγμα 1 (3)

$$|f(x,y)-0| \leq \frac{x^2\sqrt{x^2+y^2}+y^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2} \leq \varepsilon$$

Αν λοιπόν για δοθέν ε, διαλέξουμε $\eta=\varepsilon$, τότε για τα (x,y) που ικανοποιούν

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \eta$$

ισχύει

$$|f(x,y)-0| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \eta = \varepsilon$$

Ορισμός συνέχειας

Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

1. Λέμε ότι η f είναι **συνεχής** στο σημείο $x_0 \in A$, αν
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\eta(\varepsilon, x_0) > 0$ τ.ω. αν
$$\|x - x_0\| \leq \eta \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

2. Η f είναι συνεχής σε όλο το A αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - \eta\mu^3 y}{x^2 + y^2}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0) \\ a, & \sigma\tau o\ (0,0) \end{cases}$$

Για ποιες τιμές του α η f είναι συνεχής στο $(0,0)$?

Λύση: Για να έχουμε την συνέχεια της f στο $(0,0)$ πρέπει να έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = a$$

Παράδειγμα 2 (2)

- Ας μαντέψουμε πρώτα το ως άνω όριο δίνοντας ειδικές τιμές στο (x, y).
- Π.χ. για τα σημεία $(x, 0)$ έχουμε
$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2} = x \xrightarrow{x \to 0} 0.$$
- Άρα υποψήφια τιμή για το α είναι η $\alpha = 0$. Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι η διαφορά
$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^3 - \eta\mu^3 y}{x^2 + y^2} \right|$$

Παράδειγμα 2 (3)

μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$|\eta\mu y| \leq |y|, \forall y \in [-1,1]$$

έχουμε

$$\left|\frac{x^3 - \eta\mu^3 y}{x^2 + y^2}\right| \leq \frac{|x|^3 + |\eta\mu^3 y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{|x|x^2 + |y|y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2\sqrt{x^2 + y^2} + y^2\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varepsilon$$

Παράδειγμα 2 (4)

για κάθε (x, y) που ικανοποιεί

$$\|(x, y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \eta = \varepsilon.$$

Από τα παραπάνω παραδείγματα διαπιστώνουμε ότι δεν είναι πάντα εύκολο να αποδείξουμε την συνέχεια μιας συνάρτησης σ'ένα σημείο ή ισοδύναμα να υπολογίσουμε το όριο της σε ένα σημείο.

Ας κοιτάξουμε τα πράγματα λίγο πιο γεωμετρικά για να καταλήξουμε σε μια τεχνική που μας επιτρέπει:

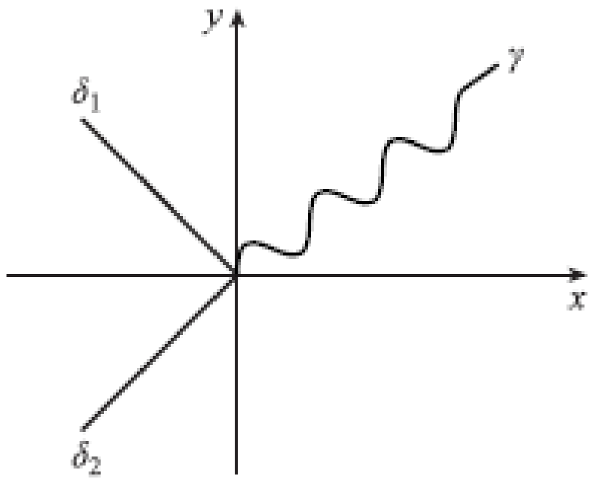
Τεχνική (1)

- Να μαντεύουμε με σχετική ευκολία το όριο μιας συνάρτησης.
- Να δείχνουμε ότι μια συνάρτηση δεν έχει όριο σε ένα σημείο.

Όπως βλέπουμε στο σχήμα που ακολουθεί, στις δύο διαστάσεις έχουμε πολλούς τρόπους για να πλησιάσουμε το σημείο (x_0, y_0).

Μπορούμε να το φτάσουμε διαλέγοντας ως δρόμο τις ευθείες δ_1, δ_2 ή την καμπύλη γ ή οτιδήποτε άλλο μας βολεύει.

Σχήμα 1



Ευθείες και καμπύλες που συγκλίνουν στο 0.

Τεχνική (2)

Προφανώς, αν η $f(x,y)$ έχει όριο στο (x_0, y_0), τότε το όριο αυτό θα είναι ανεξάρτητο του δρόμου που θα ακολουθήσουμε για να φτάσουμε στο (x_0, y_0). Έτσι λοιπόν

- Για να μαντέψουμε το όριο της $f(x,y)$ στο (x_0, y_0), κινούμεθα συνήθως πάνω σε μία ευθεία που περνά από το (x_0, y_0). Π.χ. έστω

$$f(x,y) = \frac{\eta\mu^3(x+y)}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0).$$

Τεχνική (3)

Θέλουμε να βρούμε το όριο της στο (0,0).

Κινούμεθα πάνω στην ευθεία $y = \lambda x$ για να φτάσουμε στο (0,0).

Επί της ευθείας έχουμε:

$$f(x,y) = f(x,\lambda x) = \frac{\eta\mu^3(1+\lambda)x}{x^2 + (\lambda x)^2}$$

$$\xrightarrow{x \to 0} \frac{(1+\lambda)^3 x^3}{(1+\lambda)x^2} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

Τεχνική (4)

και συνεπώς το πιθανό όριο της $f(x, y)$ στο (0,0) είναι το 0.

Για να δείξουμε ότι το όριο της $f(x, y)$ στο (0,0) είναι πράγματι το 0, πρέπει να κάνουμε χρήση του ορισμού με τα ε και δ, (άσκηση).

Τεχνική (5)

- Ας δούμε τώρα ότι η ίδια τεχνική μας επιτρέπει να δείξουμε ότι μια f δεν έχει όριο σε ένα σημείο. Π.χ. έστω

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0).$$

Θέλουμε να δούμε αν η f έχει όριο στο (0,0).

Αν κινηθούμε πάνω στην ευθεία $y = \lambda x$ για να φτάσουμε στο (0,0), έχουμε

Τεχνική (6)

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0}\frac{\lambda x^2}{(1+\lambda)x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

Άρα για κάθε τιμή του λ βρίσκουμε και διαφορετικό όριο.

Άρα η δεν έχει όριο στο (0,0).

Παράδειγμα 3 (1)

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x^2}{y^4}e^{-x^2/y^4}, y\neq 0$$

δεν έχει όριο στο (0,0).

Λύση: Αν κινηθούμε επί των ευθειών $y=\lambda x$, έχουμε

$$f(x,\lambda x)=\frac{x^2}{(\lambda x)^4}e^{-x^2/(\lambda x)^4}=\frac{1}{\lambda^4x^2}e^{-1/\lambda^4x^2}.$$

Παράδειγμα 3 (2)

Θέτοντας

$$w = \frac{1}{\lambda^4 x^2},$$

έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \lim_{w\to\infty} w e^{-w} = 0.$$

Άρα πάνω σε όλες τις ευθείες $y = \lambda x, \lambda \neq 0,$ το όριο της f είναι το 0.

Όμως, αν κινηθούμε επί της καμπύλης $y^2 = x$, τότε

Παράδειγμα 3 (3)

$$f(y^2, y) = \frac{\left(y^2\right)^2}{y^4} e^{-\left(y^2\right)^2/y^4} = \frac{1}{e}, \forall y \neq 0,$$

άρα

$$\lim_{y \to 0} f(y^2, y) = \frac{1}{e},$$

και συνεπώς η f δεν έχει όριο στο 0.

Παράδειγμα 4 (1)

Να εξεταστεί η οριακή συμπεριφορά της

$$f(x,y) = \frac{4xy^2}{(x+y^2)^2}, x+y^2 \neq 0,$$

στο σημείο (0,0).

Λύση: Θα δείξουμε ότι η f δεν έχει όριο στο (0,0) διαλέγοντας να κινηθούμε σε δύο καμπύλες που περνούν από το (0,0). Διαλέγουμε πρώτα την διαγώνιο $x = y$ και έχουμε

Παράδειγμα 4 (2)

$$f(x,x) = \frac{4x^3}{(x+x^2)^2} = \frac{4x^3}{x^2(1+x)^2}$$
$$= \frac{4x}{(1+x)^2} \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

Κατόπιν θεωρούμε την καμπύλη $x = y^2$ και έχουμε

$$f(y^2,y) = \frac{4y^2y^2}{(y^2+y^2)^2} = \frac{4y^4}{4y^4} = 1$$

Παράδειγμα 4 (3)

για κάθε y άρα και για $y = 0$.

Άρα οι δύο καμπύλες δίνουν διαφορετικά όρια στο (0,0) και συνεπώς η f δεν έχει όριο.

Η συνέχεια με ακολουθίες (1)

Όπως και στην διάσταση 1, ο ορισμός των ορίων και της συνέχειας έχει τον ισοδύναμο του με τις ακολουθίες.

Ορισμός: Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ και

$$A - \{x_0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

1. Η f έχει όριο το α καθώς το x τείνει στο x_0, αν για κάθε ακολουθία $A \ni x_k \xrightarrow{k\to\infty} x_0$, τότε $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} a$.

Η συνέχεια με ακολουθίες (2)

2. Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, αν για κάθε ακολουθία $A \ni x_k \xrightarrow{k\to\infty} x_0$, τότε $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} f(x_0)$.

Γράφουμε

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = f(x_0).$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο ως άνω ακουληθιακός ορισμός του ορίου και της συνέχειας είναι ισοδύναμος με τον ορισμό με τα ε και τα η που ήδη ξέρουμε.

Παράδειγμα 5 (1)

Έστω

$$f(x,y,z) = \frac{\varepsilon\varphi^2 x + \varepsilon\varphi^2 y + \varepsilon\varphi^2 z}{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$(x,y,z) \neq (0,0,0)$$

Πώς πρέπει να οριστεί η f στο (0,0,0) ώστε να είναι συνεχής στην κλειστή μπάλλα $\overline{B(0,1)}$;

Λύση: Για να έχουμε συνέχεια στο (0,0,0), πρέπει να δώσουμε στην f στο (0,0,0) την τιμή που ικανοποιεί

Παράδειγμα 5 (2)

$$f(0,0,0) = \lim_{k \to \infty} f(x_k, y_k, z_k),$$

για κάθε ακολουθία (x_k, y_k, z_k) που τείνει στο (0,0,0).

Αν λοιπόν η ακολουθία (x_k, y_k, z_k) τείνει στο (0,0,0), τότε και οι συνιστώσες της τείνουν στο 0:

$$x_k \to 0, y_k \to 0, και\ z_k \to 0 \text{ καθώς } k \to \infty$$

Άρα

Παράδειγμα 5 (3)

$$\frac{\varepsilon\varphi x_k}{x_k} \to 1,\ \frac{\varepsilon\varphi y_k}{y_k} \to 1,\text{ και } \frac{\varepsilon\varphi z_k}{z_k} \to 1 (1)$$

Συνεπώς

$$f(x_k, y_k, z_k) = \frac{\varepsilon\varphi^2 x_k + \varepsilon\varphi^2 y_k + \varepsilon\varphi^2 z_k}{{x_k}^2 + {y_k}^2 + {z_k}^2}$$

$$= \frac{\frac{\varepsilon\varphi^2 x_k}{{x_k}^2}{x_k}^2 + \frac{\varepsilon\varphi^2 y_k}{{y_k}^2}{y_k}^2 + \frac{\varepsilon\varphi^2 z_k}{{z_k}^2}{z_k}^2}{{x_k}^2 + {y_k}^2 + {z_k}^2} \to 1$$

Παράδειγμα 5 (4)

Άρα το πιθανό όριο της f στο (0,0,0) είναι το 1.

Γράφουμε,

$$f(x_k, y_k, z_k) - 1 = \frac{\varepsilon\varphi^2 x_k + \varepsilon\varphi^2 y_k + \varepsilon\varphi^2 z_k}{{x_k}^2 + {y_k}^2 + {z_k}^2} - 1$$

$$= \frac{\dfrac{\varepsilon\varphi^2 x_k}{{x_k}^2}{x_k}^2 + \dfrac{\varepsilon\varphi^2 y_k}{{y_k}^2}{y_k}^2 + \dfrac{\varepsilon\varphi^2 z_k}{{z_k}^2}{z_k}^2}{{x_k}^2 + {y_k}^2 + {z_k}^2} - 1 =$$

Παράδειγμα 5 (5)

$$= \frac{\left(\frac{\varepsilon\varphi^2 x_k}{{x_k}^2} - 1\right){x_k}^2 + \left(\frac{\varepsilon\varphi^2 y_k}{{y_k}^2} - 1\right){y_k}^2 + \left(\frac{\varepsilon\varphi^2 z_k}{{z_k}^2} - 1\right){z_k}^2}{{x_k}^2 + {y_k}^2 + {z_k}^2} - 1$$

Από την (1) για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε δείκτη $N \in \mathbb{N}$ τ.ω. για $k \geq N$,

$$\left|\frac{\varepsilon\varphi^2 x_k}{{x_k}^2} - 1\right| \leq \varepsilon, \left|\frac{\varepsilon\varphi^2 y_k}{{y_k}^2} - 1\right| \leq \varepsilon \; \kappa\alpha\iota \left|\frac{\varepsilon\varphi^2 z_k}{{z_k}^2} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Άρα για $k \geq N$,

$$|f(x_k, y_k, z_k) - 1| \leq \varepsilon \frac{{x_k}^2 + {y_k}^2 + {z_k}^2}{{x_k}^2 + {y_k}^2 + {z_k}^2} = \varepsilon$$

Παράδειγμα 5 (6)

δηλαδή,

$$\lim_{\kappa\to\infty} f(x_k, y_k, z_k) = 1$$

για κάθε ακολουθία (x_k, y_k, z_k) που τείνει στο (0,0,0).

Όπως η κατάλληλη επιλογή δρόμων στα προηγούμενα παραδείγματα έτσι και η κατάλληλη επιλογή ακολουθιών μας επιτρέπει ή να μαντέψουμε το όριο μιας συνάρτησης ή να δείξουμε ότι δεν είναι συνεχής.

Παράδειγμα 6 (1)

Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι τυπικό του είδους.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι η

$$f(x,y) = \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0),$$

δεν έχει όριο στο (0,0).

Παράδειγμα 6 (2)

Λύση: Η συνάρτηση του παραδείγματος είναι μια παραλλαγή της γνωστής συνάρτησης

$$g(x) = \eta\mu\frac{1}{x}, x \neq 0,$$

που ως γνωστόν δεν είναι συνεχής στο 0. Πράγματι θέτοντας

$$x_k = \frac{2}{k\pi}, k \in \mathbb{N},$$

έχουμε

Παράδειγμα 6 (3)

$$g(x_k) = \eta\mu\frac{k\pi}{2} = 0, \pm 1.$$

Τώρα στις δύο διαστάσεις, διαλέγουμε την ακολουθία

$$x_k = y_k = \frac{\sqrt{2}}{k\pi}.$$

Τότε

$$\sqrt{x_k^2 + y_k^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\right)^2} = \sqrt{2\frac{2}{(k\pi)^2}}$$

Παράδειγμα 6 (4)

Συνεπώς

$$f(x_k, y_k) = \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} = \eta\mu\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0, \pm 1.$$

Άρα η f πάλλεται συνεχώς μεταξύ του -1, 0 και του +1, και συνεπώς δεν έχει όριο στο (0,0).

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

«Λογισμός 3. Όρια και συνέχεια συναρτήσεων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης