ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 5: Θεώρημα ακραίων τιμών και θεώρημα ενδιάμεσων τιμών- Ομοιόμορφη συνέχεια.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Θεώρημα ακραίων τιμών.
2. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
3. Ομοιόμορφη συνέχεια.
4. Ασκήσεις.

Σκοποί ενότητας

- Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε δύο ουσιαστικά θεωρήματα της συνέχειας πραγματικών συναρτήσεων. Το θεώρημα ακραίων τιμών και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
- Επίσης θα οριστεί η ομοιόμορφη συνέχεια.

Θεώρημα των ακραίων τιμών

Έστω $C \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και

$$f : C \to \mathbb{R}$$

συνεχής. Τότε υπάρχουν $x_0, x_0' \in C$, τέτοια ώστε

$$f(x_0) = \inf_{x \in C} f(x) \ \ \kappa\alpha\iota \ f(x_0') = \sup_{x \in C} f(x)\,.$$

Το θεώρημα των ακραίων τιμών μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση επί ενός συμπαγούς, παίρνει τις ακραίες τιμές της σε σημεία εντός του συμπαγούς.

Λήμμα

Το θεώρημα δεν ισχύει για μη συμπαγή σύνολα.

Η $\varepsilon\varphi x$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι ένα καλό αντιπαράδειγμα.

Λήμμα: Αν η $f: C \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής και το $C \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές, τότε και η εικόνα του $f(C)$ είναι συμπαγής.

Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ συνεκτικό κατά τόξα και $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν η f παίρνει τις τιμές

$$\lambda_1 < \lambda_2,$$

τότε παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες, δηλαδή

για κάθε $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, $\exists x \in A \; \tau.\omega. \, f(x) = \lambda$.

Ομοιόμορφη συνέχεια

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε στην ομοιόμορφη συνέχεια. Είναι μια έννοια πιο ισχυρή από την συνέχεια και πολύ χρήσιμη στην Ανάλυση.

Ας θυμηθούμε μόνο ότι στην διάσταση 1, για να δείξουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, χρησιμοποιήσαμε ουσιαστικά την ομοιόμορφη συνέχεια.

Ορισμός ομοιόμορφης συνέχειας (1)

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k$. Λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του Α, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\eta(\varepsilon) > 0$ τ.ω. για κάθε ζεύγος $x, y \in A$ που ικανοποιεί

$$\|x - y\| \leq \eta(\varepsilon), \text{ ισχύει } \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Ας σχολιάσουμε λίγο τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας:

1. Είναι προφανές όταν η f είναι ομοιόμορφα

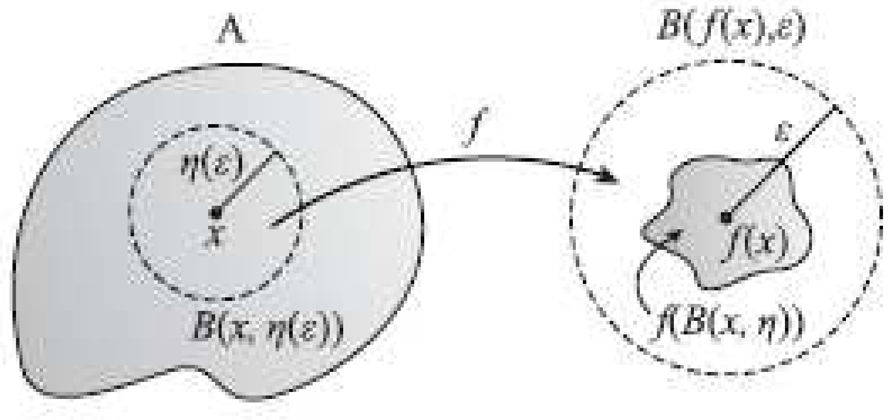
Ορισμός ομοιόμορφης συνέχειας (2)

συνεχής επί του A, τότε είναι και συνεχής επί του A.

2. Η διαφορά της ομοιόμορφης συνέχειας με την (απλή) συνέχεια είναι η εξής:

Στην ομοιόμορφη συνέχεια, για δοθέν $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε ένα $\eta(\varepsilon) > 0$ που εξαρτάται μόνο από το ε τ.ω. κάθε μπάλλα $\mathrm{B}(x, \eta(\varepsilon))$ με κέντρο x και ακτίνα $\eta(\varepsilon)$ να έχει εικόνα μέσα στην μπάλλα $\mathrm{B}(f(x), \varepsilon)$.

Σχήμα 1



Η $f(B(x,\eta))$ περιέχεται στην $B(f(x),\varepsilon)$.

Ορισμός ομοιόμορφης συνέχειας (3)

Στην απλή συνέχεια αυτό δεν ισχύει αφού για δοθέν $\varepsilon > 0$, η επιλογή του η εξαρτάται και από τα x.

Το κλασσικό παράδειγμα αυτού του γεγονότος είναι η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad x, y > 0.$$

Η f είναι συνεχής αλλά όχι και ομοιόμορφα συνεχής. Θα το δείξουμε με άτοπο.

Ορισμός ομοιόμορφης συνέχειας (4)

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και ας πάρουμε $\varepsilon = 1$ στην (2,13). Τότε μπορούμε να βρούμε $\eta > 0$, τ.ω.

$$\|(x, y) - (x', y')\| \leq \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| \leq 1$$

Αν πάρουμε

$$x, y = \frac{1}{\eta} \ \kappa\alpha\iota \ x', y' = \frac{\eta}{2} + \frac{1}{\eta},$$

τότε

$$|x - x'| = \frac{\eta}{2} \ \kappa\alpha\iota \ |y - y'| = \frac{\eta}{2}$$

Ορισμός ομοιόμορφης συνέχειας (5)

άρα

$$\|(x,y)-(x',y')\| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} = \frac{\eta}{\sqrt{2}} < \eta,$$

ενώ

$$|f(x,y)-f(x',y')| = 2+\frac{\eta^2}{2} > 1.$$

Θα τελειώσουμε με τη σχέση συνέχειας και συμπάγειας.

Θεώρημα

Θεώρημα: Αν $C \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές και η $f: C \to \mathbb{R}^m$ συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-(x^2+y^2)}, & \alpha\nu\ (x,y)\in\overline{D(0,1)}\\ e^{-\frac{1}{\left((x^2+y^2)-1\right)}}, & \alpha\nu\ (x,y)\in\overline{D(0,1)}^c\end{cases}$$

Να δειχθεί ότι

1. Η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^2$.
2. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Παράδειγμα 1 (2)

Λύση: 1) Η f είναι συνεχής και εντός και εκτός του ανοικτού δίσκου $D(0,1)$. Μένει να δείξουμε ότι είναι συνεχής σε κάθε σημείο (x, y) του κύκλου $S(0,1)$.

Αν θέσουμε $r^2 = x^2 + y^2$, τότε έχουμε

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-r^2}, & \alpha\nu\ r \leq 1 \\ e^{-\frac{1}{(r^2-1)}}, & \alpha\nu\ r > 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 1 (3)

Η f λοιπόν είναι ακτινική, και αν $(x_0, y_0) \in S(0,1)$ τότε

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

Άρα για την συνέχεια στα $(x_0, y_0) \in S(0,1)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{D(0,1) \ni (x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{D(0,1)^c \ni (x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{r \to 1^-} f(x,y) = \lim_{r \to 1^+} f(x,y) .$$

Παράδειγμα 1 (4)

Η παραπάνω σχέση ισχύει αφού

$$\lim_{r\to 1^-} f(x,y) = \lim_{r\to 1^-} \sqrt{1-r^2} = 0.$$

και

$$\lim_{r\to 1^+} f(x,y) = \lim_{r\to 1^+} e^{-\frac{1}{(r^2-1)}} = e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$$

2) Για οποιοδήποτε $R > 0$, η f είναι συνεχής επί του κλειστού δίσκου $\overline{D(0,R)}$, άρα και ομοιόμορφα συνεχής αφού ο $\overline{D(0,R)}$είναι συμπαγής.

Παράδειγμα 1 (5)

Ας διαλέξουμε λοιπόν το R αρκετά μεγάλο.
Τότε για $(x, y) \in \overline{D(0, R)}^c$ ισχύει ο δεύτερος κλάδος της f.
Έτσι, αν $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \overline{D(0, R)}^c$, τότε από το θεώρημα μέσης τιμής

$$
\begin{aligned}
|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| &= |f(r_1) - f(r_2)| \\
&= |r_1 - r_2||f'(r)| = \\
&= |r_1 - r_2| \frac{2r}{(r^2 - 1)^2} e^{-\frac{1}{(r^2 - 1)}}
\end{aligned}
$$

όπου $r \in [r_1, r_2]$.

Παράδειγμα 1 (6)

Όμως με de l’Hopital, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{2r}{(r^2-1)^2}e^{-\frac{1}{(r^2-1)}}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,$$

Και συνεπώς

$$\frac{2r}{(r^2-1)^2}e^{-\frac{1}{(r^2-1)}} \leq M, r \geq R$$

Από τις (2,17) και 2,18 συμπεραίνουμε ότι

Παράδειγμα 1 (7)

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M|r_1 - r_2|,$$

και έχουμε την ομοιόμορφη συνέχεια στο συμπλήρωμα του δίσκου $D(0,1)$ αν πάρουμε $\eta = \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$.

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονικης, Μιχάκης Μαριάς. «Λογισμός 3, Θεώρημα ακραίων τιμών και θεώρημα ενδιάμεσων τιμών- Ομοιόμορφη συνέχεια». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης