ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 6: Μερικές παράγωγοι.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Μερικές παράγωγοι 1ης τάξης.
2. Μερικές παράγωγοι 2ης τάξης.

Σκοποί ενότητας

- Ορισμός μερικών παραγώγων.
- Παραδείγματα.

Ορισμός μερικών παραγώγων (1)

Ξεκινάμε με τον ορισμό των μερικών παραγώγων.

Ορισμός: Έστω Α ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$. Αν $a \in A$ τότε η **μερική παράγωγος** $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ της f ως προς την μεταβλητή x_j στο σημείο α ορίζεται ως το όριο

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{x_j \to a_j} \frac{f(a_1, \dots, x_j, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)}{x_j - a_j}$$

Ορισμός μερικών παραγώγων (2)

Για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Αν η f δίνεται απο ένα «παραγωγίσιμο τύπο», π.χ. αν

$$f(x, y) = x^2 y + x\eta\mu(y^2),$$

τότε, για να υπολογίσουμε την $\frac{\partial f}{\partial x}(x,)$ σε κάποιο (x, y), θεωρούμε το y σταθερό και παραγωγί-ζουμε την f ως προς x σαν να ήταν συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x.

Ορισμός μερικών παραγώγων (3)

$$\frac{df}{dx}(x,y) = 2xy + \eta\mu(y^2)$$

Ομοίως

$$\frac{df}{dy}(x,y) = x^2 + 2xy\sigma\upsilon\nu(y^2)$$

Αν

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \log(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) =$$
$$= log\|x\|^2,$$

όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_*^n$

Ορισμός μερικών παραγώγων (4)

για να υπολογίσουμε την $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ σε κάποιο x, θεωρούμε όλες τις άλλες μεταβλητές πλήν της x_j, σταθερές και παραγωγίζουμε την f ως προς x_j σαν να ήταν συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x_j. Έτσι για $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_*$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\log(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) =$$

$$= \frac{2x_j}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \frac{2x_j}{\|x\|^2}$$

Μερικές παραγώγους δεύτερης ή και ανώτερης τάξης (1)

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης ή ακόμα και ανώτερης τάξης.

Έτσι, για την

$$f(x,y) = x^2 y + x\eta\mu(y^2),$$

που είδαμε παραπάνω, έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y,$$

Μερικές παραγώγους δεύτερης ή και ανώτερης τάξης (2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x\sigma\upsilon\nu(y^2) - 4xy^2\eta\mu(xy),$$

ενώ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x + 2y\sigma\upsilon\nu(y^2)$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x + 2y\sigma\upsilon\nu(y^2)$$

Ισότητα των σταυρωτών παραγώγων δεύτερης τάξης

Θα δούμε παρακάτω, ότι η ισότητα των σταυρωτών παραγώγων δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \text{ και } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

ισχύει πάντα για τις C^2 συναρτήσεις, δηλαδή για αυτές που έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης.

Αν f δίκλαδη (1)

Αν τώρα η f *είναι δίκλαδη στο σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους ή δεν δίδεται από συγκεκριμένο τύπο, τότε για τον υπολογισμό τους ανατρέχουμε πάντα στον ορισμό. Π.χ. αν*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \sigma\tau o\ (0,0) \end{cases}$$

τότε

Αν f δίκλαδη (2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1.$$

Ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - \frac{h^3}{h^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1$$

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\eta\mu\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \sigma\tau o\ (0,0) \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι μερικοί παράγωγοι της f στο (0,0).

Λύση: αφού η f είναι δίκλαδη στο (0,0), ανατρέχουμε στον ορισμό.

Παράδειγμα 1 (2)

Έτσι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(h^2)\eta\mu\frac{1}{\sqrt{h^2}}-0}{h} = \lim_{h\to 0} h\eta\mu(\frac{1}{|\eta|}) = 0$$

και όμοια για την $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ αφού η f είναι συμμετρική.

Παράδειγμα 2 (1)

Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{r^a}$$

όπου $\alpha > 0$ και $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Για ποια α η f είναι αρμονική, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Παράδειγμα 2 (2)

Λύση: παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

και υπολογίζουμε την

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xyzr^{-a}) = yzr^{-a} - axyzr^{-a-1}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= yzr^{-a} - axyzr^{-a-1}\frac{x}{r} = yzr^{-a} - ax^2yzr^{-a-2}.$$

Παράδειγμα 2 (3)

Συνεπώς

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = yz\frac{\partial}{\partial x}(r^{-a}) - ayz\frac{\partial}{\partial x}(x^2 r^{-a-2})$$

$$= -ayzr^{-a-1}\frac{\partial r}{\partial x} - ayz2xr^{-a-2} - ayzx^2\frac{\partial}{\partial x}(r^{-a-2})$$

$$= -ayzr^{-a-1}\frac{x}{r} - 2ayzxr^{-a-2} +$$

$$+ayzx^2(a+2)r^{-a-2-1}\frac{\partial r}{\partial x} =$$

$$= -axyzr^{-a-2} - 2ayzxr^{-a-2} +$$

$$+a(a+2)yzx^2 r^{-a-2-1}\frac{x}{r} \Leftrightarrow$$

Παράδειγμα 2 (4)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{axyz}{r^{a+2}}\left\{-3a + a(a+2)\frac{x^2}{r^2}\right\}$$

Από την συμμετρία της $f(x, y, z)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{axyz}{r^{a+2}}\left\{-3a + a(a+2)\frac{y^2}{r^2}\right\}$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{axyz}{r^{a+2}}\left\{-3a + a(a+2)\frac{z^2}{r^2}\right\}$$

Παράδειγμα 2 (5)

Αθροίζοντας έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{axyz}{r^{a+2}} \left\{ -9a + a(a+2) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \right\}$$

$$= \frac{axyz}{r^{a+2}} \{ -9a + a(a+2) \} = 0,$$

αν

$$a(a+2) - 9a = 0 \Leftrightarrow a^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow a = 7$$

Μεικτές ή σταυρωτές παράγωγοι

Για τις μεικτές ή σταυρωτές παραγώγους δεύτερης τάξης ισχύει

Πρόταση: Έστω A είναι ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι C^2, τότε οι **μεικτές** ή **σταυρωτές** παράγωγοι δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ και } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

είναι ίσες.

Παρατήρηση 1

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για τις σταυρωτές παραγώγους ανώτερης τάξης.

Π.χ. αν η $f(x,y,z)$ είναι C^3, τότε έχουμε ότι

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}(x,y,z)$$

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη και μόνο των σταυρωτών παραγώγων δεν εγγυάται την ισότητά τους.

Παράδειγμα 3 (1)

Έστω

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \alpha\nu\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \sigma\tau o\ (0,0)\end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$$

Παράδειγμα 3 (2)

Λύση: έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

Όταν $(x,y) \neq (0,0)$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},$$

Παράδειγμα 3 (3)

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Συνεπώς

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\partial_y f(h,0) - \partial_y f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\dfrac{h^4}{h^4}}{h} = 1$$

Παράδειγμα 3 (4)

ενώ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\partial_x f(0,h) - \partial_x f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\dfrac{-h^4}{h^4}}{h} = -1.$$

Παρατήρηση 2 (1)

Σχετική με το ως Παράδειγμα και Πρόταση είναι εδώ η παρατήρηση ότι ούτε η $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, ούτε η $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ είναι συνεχείς στο (0,0).

Πράγματι μετά από πράξεις έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) =$$

$$= \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

Παρατήρηση 2 (2)

Οπότε, αν πάρουμε $x = y$, τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, x) = 0$$

για κάθε $x \neq 0$.

Άρα αν κινηθούμε επί της διαγωνίου, τότε το όριο των μεικτών παραγώγων στο (0,0) είναι το 0, ενώ από την άλλη μεριά έχουμε δει ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \; \kappa\alpha\iota \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

Παρατήρηση 2 (3)

Συνεπώς οι μεικτές παράγωγοι δεν είναι συνεχείς στο (0,0).

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 3. Μερικές παράγωγοι». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης