ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Λογισμός 3

## **Ενότητα 11**: Κανόνας της αλυσίδας.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα ενότητας

1. Κανόνας της αλυσίδας.
2. Παραδείγματα.

# Σκοποί ενότητας

- Απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας για διανυσματικές συναρτήσεις.

# Πρόταση (Κανόνας της αλυσίδας) (1)

Παρουσιάζουμε τον υπολογισμό της παραγώγου της σύνθετης συνάρτησης που είναι γνωστός και ως κανόνας της αλυσίδας.

**Πρόταση**: Έστω A ανοικτό του $\mathbb{R}^n$, B ανοικτό του $\mathbb{R}^m$και

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{g} \underbrace{B}_{\subset \mathbb{R}^m} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l,$$

διαφορίσιμες. Τότε και η σύνθετη συνάρτηση $h = gof$ είναι διαφορίσιμη και ισχύει

# Πρόταση (Κανόνας της αλυσίδας) (2)

$$D(h)(x) = Df(y)Dg(x), (1)$$

όπου $y = g(x)$.

Η σχέση (1) λέγεται «κανόνας της αλύσιδας».

Προσοχή, στο δεύτερο μέλος της (1) έχουμε πολλαπλασιασμό πινάκων. Πριν περάσουμε στην απόδειξη της Πρότασης θα κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις που θα βοηθήσουν στην κατανόηση της αλυσίδας.

Ας θέσουμε $y = g(x) = (y_1, \dots, y_m)$, και ας γράψουμε την (1) αναλυτικά με πίνακες.

Αν πολλαπλασιάσουμε τους πίνακες

# Πρόταση (Κανόνας της αλυσίδας) (3)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_i}{\partial x_1} & \frac{\partial h_i}{\partial x_j} & \frac{\partial h_i}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_l}{\partial x_1} & & \frac{\partial h_l}{\partial n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_i}{\partial y_1} & \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \frac{\partial f_l}{\partial y_m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_j} \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_j} \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

# Πρόταση (Κανόνας της αλυσίδας) (4)

Τότε προκύπτει ότι ο κανόνας της αλυσίδας (1) για τις συνιστώσες συναρτήσεις $h_i$ της $h$ γράφεται ως εξής:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}. \, (2)$$

Παρατηρούμε ότι στην (2) οι μεταβλητές $y_j$ σχηματίζουν τους κρίκους μιας αλυσίδας, εξ ού και η ονομασία «κανόνας της αλυσίδας».

# Πρόταση (Κανόνας της αλυσίδας) (5)

Πολλές φορές και σε πολλά εγχειρίδια, ταυτίζουμε την $h(x)$ με την $f(y)$(πράγμα που δικαιολογείται από την σχέση $h(x) = (fog)(x) = f(y)$).

Έτσι γράφουμε

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(y)\frac{\partial y_1}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}(y)\frac{\partial y_2}{\partial x_j}(x) + \\ + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m}(y)\frac{\partial y_m}{\partial x_j}(x)$$

αντί του πιο τυπικού (2).

# Παράδειγμα 1 (1)

Έστω

$$g(x_1, x_2) = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = (y_1, y_2)$$
$$= \left(e^{x_1 + x_2^2}, x_1^2 + x_2\right)$$

και

$$f(y_1, y_2) = \log(y_1^2 + y_2), y_1^2 + y_2 > 0.$$

Αν $h = fog$, δηλαδή

$$h(x_1, x_2) = \log\left(e^{2x_1 + 2x_2^2} + x_1^2 + x_2\right)$$

βρείτε την $\frac{\partial h}{\partial x_1}(0,1)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

# Παράδειγμα 1 (2)

Κατόπιν επαληθεύστε το αποτέλεσμα κάνοντας κατευθείαν τον υπολογισμό.

Λύση: Έχουμε από την αλυσίδα

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} =$$

$$= \frac{2y_1}{y_1^2 + y_2} e^{x_1 + x_2^2} + \frac{1}{y_1^2 + y_2} 2x_1.$$

# Παράδειγμα 1 (3)

Τώρα αν $(x_1, x_2) = (0,1)$, τότε

$$(y_1, y_2) = \left(e^{0+1^2}, 0+1\right) = (e, 1)$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(0,1) = \frac{2e}{e^2+1}e + 0 = \frac{2e^2}{e^2+1}.$$

# Παράδειγμα 2 (1)

Έστω $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $C^2$. Αν

$$w(x, y, z) = g(xz, yz),$$

δείξτε ότι

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = z\frac{\partial w}{\partial z}, (2).$$

Λύση: Είναι

$$w(x, y, z) = g(xz, yz) = g(u_1, u_2),$$

όπου $u_1 = xz\; u_2 = yz$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

# Παραδειγμα 2 (2)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u_1} z,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u_2} z,$$

και

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u_1} x + \frac{\partial w}{\partial u_2} y,$$

και η (2) έπεται πολλαπλασιάζοντας τις τρείς παραπάνω σχέσεις με $x, y$ και $z$ αντίστοιχα.

# Πρόταση 2

Για την απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας χρειαζόμαστε την παρακάτω Πρόταση που έχει ενδιαφέρον αφ’εαυτής.

**Πρόταση**: Έστω Α ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f: A \to \mathbb{R}^m$ μία διανυσματική συνάρτηση διαφορίσιμη στο $x_0$.

Τότε η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$και επιπλέον υπάρχει θετική σταθερά Μ τέτοια ώστε:

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq M\|x - x_0\|$$

για $x$ κοντά στο $x_0$.

# Απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας (1)

Για $x_0 \in A$, πρέπει να δείξουμε ότι

$$\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big) - Df\big(g(x_0)\big)Dg(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Ξαναγράφουμε τον αριθμητή ως εξής:

$$\begin{aligned} f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big) - Df\big(g(x_0)\big)\big(g(x) - g(x_0)\big) \\ + Df\big(g(x_0)\big)\big(g(x) - g(x_0)\big) \\ - Df\big(g(x_0)\big)Dg(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \Big\{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big) - Df\big(g(x_0)\big)\big(g(x) - g(x_0)\big)\Big\} \\ + Df\big(g(x_0)\big)\Big\{\big(g(x) - g(x_0)\big) - Dg(x_0)(x - x_0)\Big\} \end{aligned}$$

# Απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας (2)

Από την διαφορισιμότητα της $f$ έχουμε

$$\left\|f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big) - Df\big(g(x_0)\big)\big(g(x) - g(x_0)\big)\right\| \leq \varepsilon\|g(x) - g(x_0)\|.$$

Κατόπιν, αφού και η g είναι διαφορίσιμη, από την προηγούμενη Πρόταση έπεται ότι

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq M\|x - x_0\|.$$

Άρα

$$\left\|f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big) - Df\big(g(x_0)\big)\big(g(x) - g(x_0)\big)\right\| \leq \varepsilon M\|x - x_0\|$$

# Απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας (3)

Τώρα, χρησιμοποιούμε πάλι την διαφορισιμότητα της f και έχουμε:

$$\left\|Df\big(g(x_0)\big)\left\{\big(g(x)-g(x_0)\big)-Dg(x_0)(x-x_0)\right\}\right\|$$
$$\leq c(n)\sup_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\big(g(x_0)\big)\right|\left\|\big(g(x)-g(x_0)\big)\right.$$
$$\left.-Dg(x_0)(x-x_0)\right\|$$
$$\leq M'\left\|\big(g(x)-g(x_0)\big)-Dg(x_0)(x-x_0)\right\|.$$

Τέλος, από την διαφορισιμότητα της g έχουμε ότι

$$\left\|\big(g(x)-g(x_0)\big)-Dg(x_0)(x-x_0)\right\|\leq \varepsilon\|x-x_0\|$$

# Απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας (4)

Βάζοντας μαζί τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$\left\|f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big) - Df\big(g(x_0)\big)Dg(x_0)(x - x_0)\right\|$$
$$\leq \varepsilon \mathrm{M}\|x - x_0\| + M'\varepsilon\|x - x_0\| = \varepsilon(\mathrm{M} + \mathrm{M}')\|x - x_0\|$$

Από την οποία συμπεραίνουμε πως η $fog$ είναι διαφορίσιμη και πως

$$D(fog)(x) = Df(y)Dg(x)$$

# Παραδείγματα (1)

Θα δώσουμε τώρα ορισμένα κλασικά παραδείγματα του κανόνα της αλυσίδας. Είδαμε ήδη την περίπτωση της σύνθετης καμπύλης και πραγματικής συνάρτησης: αν η

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ [a,b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightsquigarrow (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

Είναι $C^1$ καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ και η $f\colon \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη, τότε ο κανόνας της αλυσίδας δίνει την παράγωγο της $f o \varphi$ ως ακολούθως

# Παραδείγματα (2)

$$(fo\varphi)'(t) = \frac{d(fo\varphi)}{dt}(t) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\varphi(t)\big)\frac{\partial x_1}{\partial t}(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\varphi(t)\big)\frac{\partial x_n}{\partial t}(t)$$

Το δεύτερο ουσιαστικό παράδειγμα είναι, στην γενική του μορφή, το ακόλουθο

$$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

όπου Τ είναι ένας **μετασχηματισμός**, που συνήθως τον λέμε **αλλαγή συντεταγμένων** και $f$ είναι μια πραγματική συνάρτηση.

# Βιβλιογραφία


1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. T. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 3. Κανόνας της αλυσίδας.». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης