ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Λογισμός 3

**Ενότητα 15**: Τοπικά ακρότατα υπό συνθήκες.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

# Άδειες Χρήσης

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα ενότητας

1. Τοπικά ακρότατα υπό συνθήκες.
2. Παραδείγματα.

# Σκοποί ενότητας

- Μελέτη τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκες.

# Παράδειγμα 1 (1)

Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα που αποσαφη-νίζει τα πράγματα που θα μελετήσουμε στην παράγραφο αυτή.

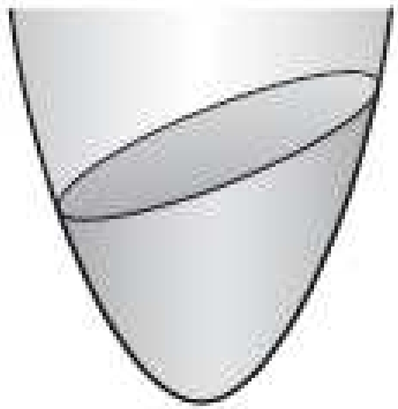
Ας είναι η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Όπως είδαμε, το μοναδικό ακρότατο της $f$ είναι το (0,0).

Αν τώρα κόψουμε την $f$ με ένα επίπεδο $\mathrm{E}$ όπως στο παρακάτω Σχήμα 1, τότε ο περιορισμός $f_{/E}$ της $f$ στο $\mathrm{E}$, έχει σαν γράφημα την λοξή έλλειψη του

# Σχήμα 1



Η $f(x, y) = x^2 + y^2$ κομμένη από λοξό επίπεδο

# Παράδειγμα 1 (2)

σχήματος και συνεπώς έχει δύο ακρότατα, το Α και το Β, τα οποία είναι και διάφορα του (0,0).

Συμπερασματικά βλέπουμε πως ο περιορισμός μιας συνάρτησης πάνω σε μία επιφάνεια έχει διαφορετικά ακρότατα από την ίδια την συνάρτηση.

Ας κάνουμε ακόμα ένα μικρό βήμα για να ξεκαθαρίσουμε τα πράγματα καλύτερα.

Το επίπεδο Ε ικανοποιεί την εξίσωση

$$g(x, y) = z = ax + by + c = 0$$

# Παράδειγμα 1 (3)

Έτσι, τα σημεία της έλλειψης, δηλαδή του γραφήματος της $f_{/E}$, ως σημεία τομής του γραφήματος της $f$ και του επιπέδου Ε, ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2,$$

αφού ανήκουν στο γράφημα της $f$, και

$$z = g(x, y) = ax + by + c = 0$$

αφού ανήκουν στο επίπεδο.

Συνοπτικά, λέμε πως έχουμε να μελετήσουμε

# Παράδειγμα 1 (4)

τα τοπικά ακρότατα της

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

υπό την συνθήκη

$$g(x, y) = 0$$

Η μέθοδος που ακολουθούμε για τον προσδιορισμό των ακροτάτων υπό συνθήκες, λέγεται μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange.

# Πρόταση

Έστω $U$ ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και $f, g: U \to \mathbb{R}, C^1$ συναρτήσεις.

Αν το $x_0$ είναι τοπικό ακρότατο της $f$ υπό την συνθήκη $g(x) = K$ και $\nabla g(x_0) \neq 0$, τότε υπάρχει $\lambda_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0).$$

# Παράδειγμα 2 (1)

Να βρεθούν τα ακρότατα της

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

επί του μοναδιαίου κύκλου.

**Λύση**: ο μοναδιαίος κύκλος δίνεται από την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1$$

άρα έχουμε να ψάξουμε τα ακρότατα της

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

υπο την συνθήκη

# Παράδειγμα 2 (2)

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq 0,$$

για όλα τα $(x, y)$ επί του κύκλου. Έτσι, από τους πολλαπλασιαστές Lagrange έχουμε ότι αν το $(x_0, y_0)$ είναι ακρότατο της $f$ υπό την συνθήκη $g(x, y) = 0$ τότε υπάρχει $\lambda_0 \neq 0$ τ.ω.

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0),$$

δηλαδή

# Παράδειγμα 2 (3)

$$(2x_0, -2y_0) = \lambda_0(2x_0, 2y_0).$$

Τώρα για να προσδιορίσουμε το $(x_0, y_0)$, χρησιμοποιούμε και την συνθήκη

$$g(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0.$$

Έτσι, για να βρούμε τα $\lambda_0, x_0$ και $y_0$, λύνουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = 2\lambda_0 x_0 \\ -2y_0 = 2\lambda_0 y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

# Παράδειγμα 2 (4)

Λύνοντας τις τρείς αυτές εξισώσεις βρίσκουμε ότι το $\lambda_0 = \pm 1$.

Στην συνέχεια, βρίσκουμε ότι στο $\lambda_0 = 1$ αντιστοιχούν τα πιθανά ακρότατα $(1,0)$ και $(-1,0)$, ενώ στο $\lambda_0 = -1$ τα $(0,1)$ και $(0,-1)$.

Για $\lambda_0 = 1$, έχουμε την βοηθητική συνάρτηση

$$F(x,y) = f(x,y) - g(x,y) = -2y^2 + 1$$

της οποίας η Εσσιανή είναι ίση με

$$HF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

# Παράδειγμα 2 (5)

Αφού το $a_{11} = 0$, το κριτήριο του Sylvester δεν μας βοηθά. Έτσι κοιτάζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle HF(x,y)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, (h_1, h_2) \right\rangle = \langle (0, -4h_2), (h_1, h_2) \rangle$$
$$= -4h_2^2.$$

Και πάλι δεν μπορούμε να αποφανθούμε αφού για τα διανύσματα $h = (h_1, 0)$ ισχύει ότι

$$\left\langle HF(x,y)\begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}, (h_1, 0\ ) \right\rangle = 0.$$

Εδώ όμως να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα:

# Παράδειγμα 2 (6)

Επειδή η συμπεριφορά της $F(x,y)$ μας ενδιαφέρει μόνο πάνω στην ισότιμη επιφάνεια

$$S = \{g(x,y) = 0\},$$

για την μελέτη της Εσσιανής $HF(x,y)$, αρκούμεθα μόνον στα διανύσματα $h = (h_1, h_2)$ που βρίσκονται στο εφαπτόμενο επίπεδο της $S$ που περνά από το $(x_0, y_0)$, δηλαδή αυτά που είναι κάθετα στην κλίση $\nabla g(x_0, y_0)$:

$$(h_1, h_2) \perp \nabla g(x_0, y_0) = 2(x_0, y_0).$$

# Παράδειγμα 2 (7)

Άρα για $(x_0, y_0) = (1,0)$, έχουμε

$$(h_1, h_2) \perp (2,0)$$

ή

$$h_1 = 0 \text{ και } h_2 \text{ οποιοδήποτε.}$$

Έτσι, για τα διανύσματα που είναι εφαπτόμενα στην $S$, δηλαδή τα διανύσματα $(0, h_2)$, έχουμε

$$\left\langle HF(x,y)\begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix}, (0, h_2)\right\rangle = -4h_2^2 < 0$$

Συνεπώς η $HF$ είναι αρνητικά ορισμένη και το (1,0) τοπικό μέγιστο της $f$ επί της μοναδιαίας περιφέρειας.

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αφήνονται σαν άσκηση.

# Παράδειγμα 3 (1)

Έστω μια ορθογώνια κορνίζα με μήκος πλευρών $x$ και $y$ και εμβαδόν ίσον με 1. Αν το ένα μέτρο του $x$ κοστίζει $a$ και του $y$ κοστίζει $b$, ποιες οι διαστάσεις $x, y$ ώστε το κόστος της κορνίζας να είναι ελάχιστο.

**Λύση**: έχουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος

$$f(x,y) = 2ax + 2by$$

της κορνίζας, υπό την συνθήκη ότι το εμβαδόν

$$E(x,y) = xy$$

είναι ίσο με 1. Έχουμε λοιπόν να βρούμε $\lambda \neq 0$ τ.ω.

# Παράδειγμα 3 (2)

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla E(x,y)$$

ή

$$(2a, 2b) = \lambda(y, x).$$

Έχουμε

$$x = \frac{2b}{\lambda}, y = \frac{2a}{\lambda},$$

και συνεπώς

$$E(x,y) = xy = \frac{4ab}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{ab}.$$

# Παράδειγμα 3 (3)

Επειδή $x = \frac{2b}{\lambda}, y = \frac{2a}{\lambda}$, έχουμε ότι στο $\lambda_1 = 2\sqrt{ab}$ αντιστοιχεί το

$$(x_1, y_1) = \left(\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{a}{b}}\right),$$

ενώ στο $\lambda_2 = -2\sqrt{ab}$, το

$$(x_2, y_2) = -\left(\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

# Παράδειγμα 3 (4)

Το $(x_2, y_2)$ απορρίπτεται αφού δεν γίνεται να έχουμε αρνητικές διαστάσεις.

Θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda_1 E(x,y) =$$
$$= 2ax + 2by - 2\sqrt{ab}xy.$$

Η Εσσιανή της είναι ίση με

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{ab} \\ -2\sqrt{ab} & 0 \end{pmatrix}$$

κι έτσι το Λήμμα του Sylvester δεν μας βοηθά.

# Παράδειγμα 3 (5)

Κοιτάζουμε λοιπόν για τα εφαπτόμενα διανύσματα στην επιφάνεια

$$S = \{(x, y) : xy = 1\},$$

τα οποία ικανοποιούν

$$(h_1, h_2) \perp \nabla g(x_1, y_1)$$

ή

$$\langle (h_1, h_2), (y_1, x_1) \rangle = \left\langle (h_1, h_2), \left( \sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right\rangle = 0$$

# Παράδειγμα 3 (6)

Άρα

$$h_1\sqrt{\frac{a}{b}} + h_2\sqrt{\frac{b}{a}} = 0 \Rightarrow h_1 = -h_2\frac{b}{a}.$$

Για αυτά τα διανύσματα έχουμε

$$\left\langle HF(x,y)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{ab} \\ -2\sqrt{ab} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

# Παράδειγμα 3 (7)

$$= -2\sqrt{ab}\langle (h_2, h_1), (h_1, h_2)\rangle$$
$$= -4\sqrt{ab}h_1 h_2$$
$$= 4\sqrt{ab}h_2^2 \frac{b}{a} > 0,$$

για $h_2 \neq 0$. Συνεπώς το

$$(x_1, y_1) = \left(\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

είναι τοπικό ελάχιστο.

# Παράδειγμα 4 (1)

Έστω $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$ ένας συμμετρικός πίνακας $n \times n$. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή

$$f(x) = \langle Ax, y \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \,.$$

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f$ επί της μοναδιαίας σφαίρας

$$\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

**Λύση**: Θέτουμε

$$g(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

# Παράδειγμα 4 (2)

και κοιτάζουμε για τα $\lambda \in \mathbb{R}_*$ και τα $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \text{ και } g(x) = 1.$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι οι ως άνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} (a_{11}+\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}+\lambda)x_n = 0 \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \end{cases}$$

# Παράδειγμα 4 (3)

ή

$$\begin{cases} Ax = -\lambda x \\ g(x) = 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα $\lambda$ που ικανοποιούν τον πίνακα είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathrm{A}$ και τα $x$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του που έχουν νόρμα 1.

Επισημαίνουμε ότι, επειδή ο πίνακας είναι συμμετρικός, όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές. Επίσης, αν $x \neq 0$ είναι ιδιοδιάνυσμα

# Παράδειγμα 4 (4)

του A με ιδιοτιμή λ, τότε

$$\mathrm{A}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}Ax = \frac{1}{\|x\|}\lambda x = \lambda\frac{x}{\|x\|},$$

δηλαδή το $\frac{x}{\|x\|}$ είναι και αυτό ιδιοδιάνυσμα με την ίδια ιδιοτιμή και επιπλέον νόρμα 1.

Έστω λοιπόν $x$, με $\|x\| = 1$ ένα ιδιοδιάνυσμα του $A$ με ιδιοτιμή το $\lambda$. Τότε το ζεύγος $(x, \lambda)$ ικανοποιεί το σύστημα. Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με $x_1$,..., και την n-οστή με $x_n$, έχουμε το

# Παράδειγμα 4 (5)

σύστημα:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n = -\lambda x_1^2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1x_2 + a_{12}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = -\lambda x_n^2 \end{cases}$$

Προσθέτοντας βρίσκουμε

$$f(x) = -\lambda(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = -\lambda.$$

Άρα το μέγιστο και το ελάχιστο της $f$ υπό την δοθείσα συνθήκη δίνεται από την μέγιστη και την ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα $\mathrm{A}$.

# Βιβλιογραφία


1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνα 1: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 2: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 3: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 4: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 5: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 6: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 7: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος>< πηγή><κ.τ.λ>

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Πίνακες
- Πίνακας 1: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Πίνακας 2: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Πίνακας 3: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>

# Σημείωμα Αναφοράς

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης