ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 3

Ενότητα 16: Θεώρημα Αντιστροφής.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Θεώρημα αντιστροφής.
2. Παραδείγματα.

Σκοποί ενότητας

- Θεώρημα Αντιστροφής μετασχηματισμών.

Αντιστροφή στη διάσταση 1 (1)

Ας ξεκινήσουμε με την διάσταση 1. Έστω I και J ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ και

$$f : I \to J$$

μία C^1συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f'(x_0) \neq 0, \text{για κάποιο } x_0 \in I.$$

Αν π.χ. $f'(x_0) > 0$, τότε $f'(x_0) > 0$ για κάθε $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ και από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

για κάποιο ξ μεταξύ του x και του x_0.

Αντιστροφή στη διάσταση 1 (2)

Συνεπώς η f είναι αυστηρώς αύξουσα στο διάστημα $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ και άρα η **αντίστροφή** της f^{-1} υπάρχει για τα y γύρω από το x_0. Λέμε ότι η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη γύρω από το x_0. Μάλιστα τα πράγματα πηγαίνουν πιο πέρα.

Η αντίστροφη συνάρτηση είναι C^1 και ξέρουμε να υπολογίζουμε και την παράγωγό της:

$$(f^{-1})'\big(f(x)\big)=\frac{1}{f'(x)},$$

για κάθε $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

Αντιστροφή σε πολλές διαστάσεις

Τι γίνεται όταν περάσουμε στις πολλές διαστάσεις; Έστω λοιπόν U και V ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$ και

$$F: U \to V$$

μία C^1 συνάρτηση. Αναρωτιόμαστε ποιες άραγε είναι οι συνθήκες που μας επιτρέπουν να αποφανθούμε αν η F είναι τοπικά αντιστρέψιμη γύρω από το $x_0 \in U$. Το κριτήριο της παραγώγου που είδαμε στη διάσταση 1 δίνει απάντηση και στις πολλές διαστάσεις; Η απάντηση είναι καταφατική και είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος της Αντιστροφής που θα μελετήσουμε.

Απλό παράδειγμα (1)

Ας δούμε όμως πρώτα ένα απλό παράδειγμα που θα ξεκαθαρίσει το τοπίο ακόμα περισσότερο. Έστω

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ένας πίνακας 2×2. Ως γνωστόν, ο A ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

από τον τύπο

$$F(x, y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (ax + by, cx + dy) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Απλό παράδειγμα (2)

Από την Γραμμική Άλγεβρα ξέρουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $F(x, y)$ είναι αντιστρέψιμη αν

$$detA = ad - cb \neq 0.$$

Ας μεταφράσουμε τώρα την ως άνω συνθήκη στην γλώσσα του Λογισμού. Η παράγωγος της F είναι ο Ιακωβιανός πίνακας

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_2 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

Άρα $detA \neq 0 \Leftrightarrow detDF(x, y) \neq 0.$

Απλό παράδειγμα (3)

Συνεπώς, για να είναι αντιστρέψιμος ένας μετασχηματισμός, πρέπει η Ιακωβιανή του ορίζουσα $\det DF(x, y)$ να είναι διάφορη του μηδενός. Θυμίζουμε ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα $\det DF$ συμβολίζεται συνήθως με J_F.
Επισημαίνουμε αμέσως, ότι η συνθήκη

$$J_F(x, y) \neq 0$$

μας εξασφαλίζει μόνο την τοπική αντιστρεψιμότητα και όχι την ολική όπως στην ειδική περίπτωση της γραμμικής απεικόνισης. Το παράδειγμα που ακολουθεί θα μας πείσει.

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2,$$

όπου

$$F(x,y) = (e^x \sigma\upsilon\nu y, e^x \eta\mu y).$$

Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός F είναι παντού τοπικά αντιστρέψιμος αλλά δεν είναι ολικά αντιστρέψιμος.

Λύση: Έχουμε

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \sigma\upsilon\nu y & -e^x \eta\mu y \\ e^x \eta\mu y & e^x \sigma\upsilon\nu y \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (2)

και

$$J_F(x, y) = e^x \neq 0$$

για κάθε (x, y) και συνεπώς η F είναι τοπικά αντιστρέψιμη γύρω από κάθε σημείο (x, y) του $\mathbb{R}^2$.

Όμως, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$F(x, y + 2k\pi) =$$

$$= (e^x \sigma\upsilon\nu(y + 2k\pi), e^x \eta\mu(y + 2k\pi))$$

$$= (e^x \sigma\upsilon\nu y, e^x \eta\mu y) = F(x, y).$$

Συνεπώς η F δεν είναι 1-1 και άρα δεν είναι ολικά αντιστρέψιμη.

Θεώρημα Αντιστροφής (1)

Έστω U ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και

$$F: U \to \mathbb{R}^n$$

μία C^1 συνάρτηση. Έστω $a \in U$ τέτοιο ώστε $detDF(a) \neq 0$. Τότε η F είναι τοπικά αντιστρέψιμη γύρω από το a, δηλαδή υπάρχει μια περιοχή V του a και μια περιοχή W του $F(a)$ έτσι ώστε η $F: V \to W$ να έχει συνεχή αντίστροφη

$$F^{-1}: W \to V.$$

Επιπλέον, η F^{-1} είναι C^1 στο W και για κάθε $y \in W$

Θεώρημα Αντιστροφής (2)

$$D(F^{-1})(y) = [DF(F^{-1}(y))]^{-1},$$

όπου

$$[DF(F^{-1}(y))]^{-1}$$

είναι ο αντίστροφος πίνακας της Ιακωβιανής DF στο σημείο $F^{-1}(y)$.

Πριν περάσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος, που είναι μεγάλη και δύσκολη, ας δώσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω ο μετασχηματισμός F του $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τον τύπο

$$F(x,y) = \left(\frac{x^4+y^4}{y}, \eta\mu y + \sigma\upsilon\nu x\right)$$
$$= \big(u(x,y), v(x,y)\big).$$

Δείξτε ότι ο F είναι αντιστρέψιμος σε μια περιοχή του $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και υπολογίστε τις μερικές παραγώγους των συνιστωσών του αντίστροφου μετασχηματισμού.

Παράδειγμα 2 (2)

Λύση: Σύμφωνα με το Θεώρημα Αντιστροφής, ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος σε περιοχή των σημείων (x, y) τα οποία ικανοποιούν

$$J_F(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{4x^3}{y} & \dfrac{3y^4 - x^4}{y^2} \\ -\eta\mu x & \sigma\upsilon\nu y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4x^3}{y}\sigma\upsilon\nu y + \frac{3y^4 - x^4}{y^2}\eta\mu x \neq 0$$

Παράδειγμα 2 (3)

Στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε

$$\mathrm{J}_F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \neq 0,$$

και συνεπώς ο F είναι αντιστρέψιμος σε μια περιοχή V του $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Τώρα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$F^{-1}: F(V) \to V$$

Παράδειγμα 2 (4)

είναι ο μετασχηματισμός

$$(u, v) \rightsquigarrow \big(x(u, v), y(u, v)\big).$$

Θεωρούμε δηλαδή τις συνιστώσες u, v της F ως τις **νέες μεταβλητές** και τις παλιές με ταβλητές x, y ως **νέες συνιστώσες**. Έτσι έχουμε σχηματικά:

$$\mathbb{R}^2_{x,y} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2_{u,v}$$

$$(x, y) \rightsquigarrow F(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$$

και

$$\mathbb{R}^2_{u,v} \xrightarrow{F^{-1}} \mathbb{R}^2_{x,y}$$

$$(u, v) \rightsquigarrow F^{-1}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v)\big)$$

Παράδειγμα 2 (5)

για τα $(u, v) \in F(V)$.

Από το Θεώρημα Αντιστροφής έχουμε

$$DF^{-1}(u, v) = [DF(x, y)]^{-1}$$

ή

$$\begin{pmatrix} \partial_u x(u, v) & \partial_v x(u, v) \\ \partial_u y(u, v) & \partial_v y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u(x, y) & \partial_y u(x, y) \\ \partial_x v(x, y) & \partial_y v(x, y) \end{pmatrix}^{-1} \quad (1)$$

Θυμίζουμε επίσης ότι ο αντίστροφος ενός πίνακα

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2 (6)

είναι ίσος με

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Έτσι, αντιστ΄ρφοντας τον πίνακα στην (1) έχουμε

$$\partial_u x(u,v) = \frac{\partial_y v(x,y)}{J_F(x,y)}, \partial_v x(u,v) = -\frac{\partial_y u(x,y)}{J_F(x,y)}$$

και

$$\partial_u y(u,v) = -\frac{\partial_x v(x,y)}{J_F(x,y)}, \partial_v y(u,v) = \frac{\partial_x u(x,y)}{J_F(x,y)}$$

Παράδειγμα 2 (7)

Π.χ. για $(u,v)=F(x,y)$ και (x,y) σε περιοχή του $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε

$$\partial_u x(u,v)=\frac{\partial_y v(x,y)}{J_F(x,y)}=\frac{1}{\frac{4x^3}{y}\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu y.$$

Ειδικά, αν $(u,v)=F\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)^3,1\right)$, τότε

$$\partial_u x\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)^3,1\right)=0.$$

Παράδειγμα 3 (1)

Αν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι C^1 και αν

$$F(x, y) = (f(x), xf(x) - y),$$

γύρω από ποια σημεία (x, y) η F είναι τοπικά αντιστρέψιμη.

Λύση: Θέτουμε

$$F(x, y) = (f(x), xf(x) - y) = (u, v)$$

και έτσι

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(x) & 0 \\ f(x) + xf'(x) & -1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 3 (2)

$$J_F(x,y) = -f'(x).$$

Συνεπώς η F είναι τοπικά αντιστρέψιμη στα σημεία (x,y) τα οποία ικανοποιούν $f'(x) \neq 0$.

Παράδειγμα 4 (1)

Προσοχή, το αντίστροφο του θεωρήματος της Αντιστροφής δεν ισχύει υπό την έννοια ότι η αμφιμονοτιμία του μετασχηματισμού F στο ανοικτό U δεν συνεπάγεται ότι $J_F(x) \neq 0$ για κάθε u στο U.

Πράγματι η συνάρτηση

$$f(x, y) = (x^3, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

είναι αμφιμονότιμη στον $\mathbb{R}^2$ αφού από την σχέση

$$(x^3, y) = (x_1^3, y_1)$$

προκύπτει ότι $y = y_1$ και

Παράδειγμα 4 (2)

$$x^3 - x_1^3 = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2) = 0$$

δηλαδή $x = x_1$.

Από την άλλη μεριά, για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε ότι

$$J_F(x, y) = \begin{vmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3x^2,$$

που μηδενίζεται σε όλα τα σημεία του άξονα των y.

Βιβλιογραφία

1. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
2. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
3. J.-M. Monier, *Analyse 4*, Dunod, Paris, 2000.
4. M. Spivak, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
5. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.

Σημείωμα Αναφοράς

«Λογισμός 3. Θεώρημα Αντιστροφής». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://eclass.auth.gr/courses/OCRS289/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης