



Πληροφορική

Ενότητα 9: Προσομοιώσεις, Τυχαίοι Αριθμοί και Monte Carlo

Κωνσταντίνος Καρατζάς
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



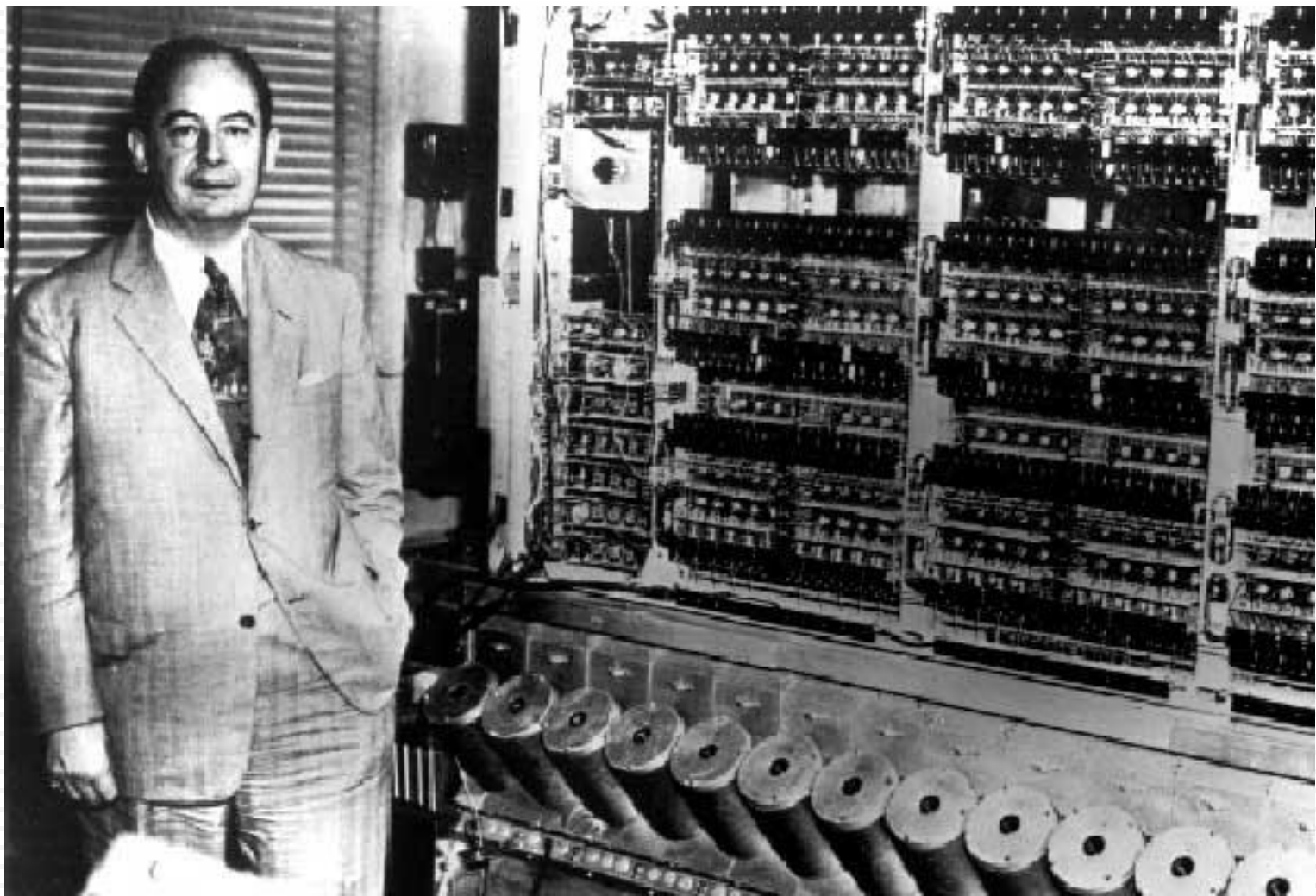


ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ, ΤΥΧΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ & MONTE CARLO

Κώστας Καρατζάς

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, ΑΠΘ



Anyone who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin.

▣ John Von Neumann (1951)

Μελέτη (μηχανολογικών) συστημάτων

- ❑ **Ανελκυστήρες**
 - ❑ Σε πολυόροφα κτίρια, να βάλουμε ξεχωριστούς για άρτιους και περιττούς ορόφους?
 - ❑ Σε ουρανοξύστη, να προσθέσουμε ανελκυστήρα express?
- ❑ Σε δρόμους:
 - ❑ Ποιοί δρόμοι να μονοδρομηθούν
 - ❑ Που χρειάζονται φανάρια?
- ❑ Σε Μηχανολογικά Προβλήματα
 - ❑ **Πόσο** είναι το μέγιστο πλάτος μετατόπισης άξονα τροχού μοτοσυκλέτας με μονόμπρατσο ψαλίδι, σε εγκάρσια φόρτηση?
 - ❑ **Πώς** πρέπει να ρυθμιστεί το σύστημα έγχυσης καυσίμων σε ΜΕΚ για βελτίωση απόδοσης;
 - ❑ **Πότε** θα υπάρξει υπέρβαση ρύπανσης στο κέντρο της Θεσσαλονίκης;
 - ❑ **Ποιο** ρουλεμάν (ανάμεσα σε πολλά “χαλασμένα”) εμφανίζει πρόβλημα στο σώμα κύλισης;
 - ❑ **Ποια** θα είναι η κατανάλωση ενέργειας σε ένα βιομηχανικό κτίριο βάσει παρελθοντικών μετρήσεων;
 - ❑ **Ποια** η πτώση πίεσης από αεροτομή;

Μελέτη μέσω πειραματικής προσέγγισης:

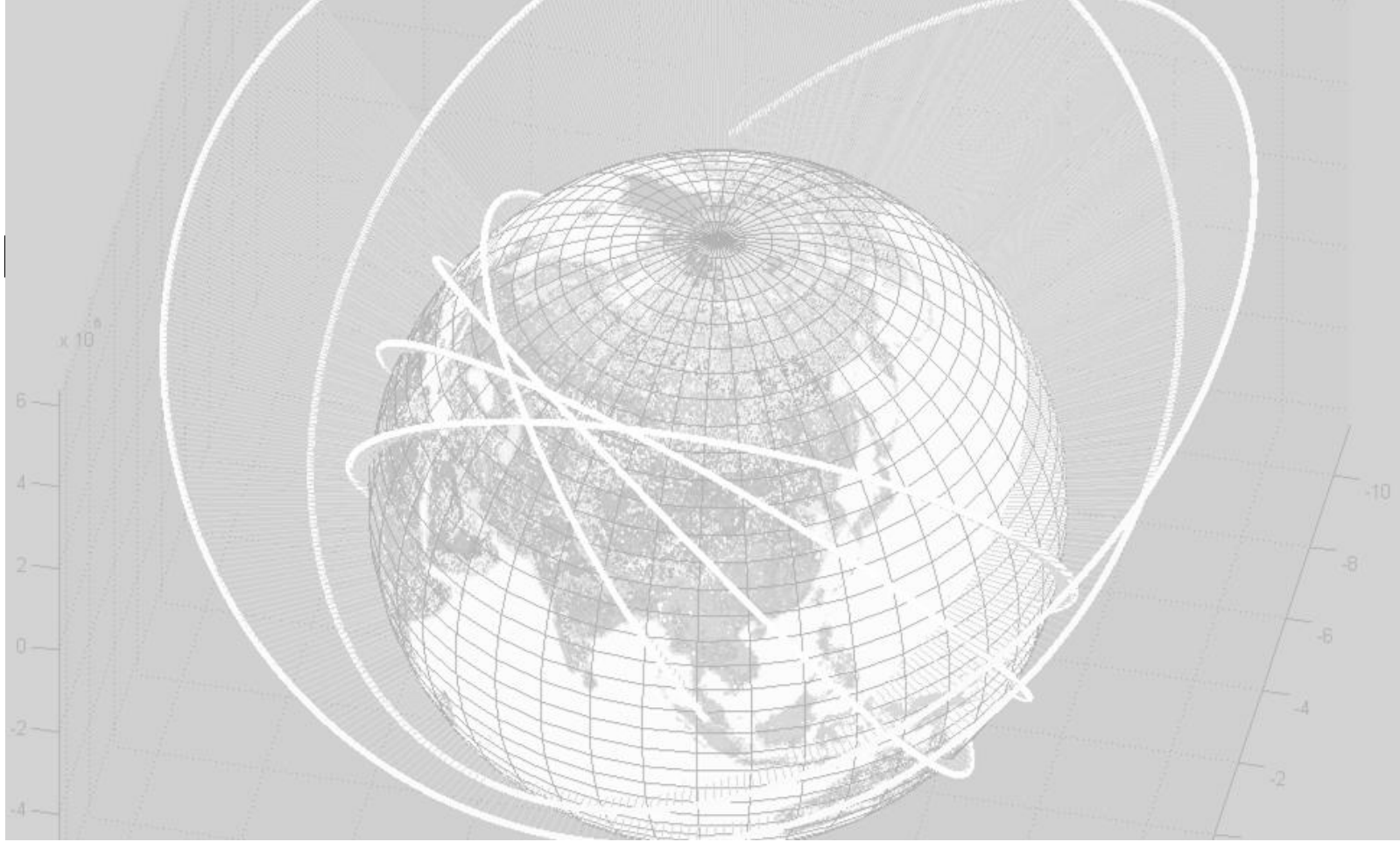
- ❑ Να βάλουμε χρήστες να ανεβοκατεβαίνουν με τις σκάλες και να τους παρατηρούμε;
- ❑ Να οδηγήσουμε οδηγούς σε κατάσταση υστερίας αλλάζοντας μονοδρομήσεις και θέσεις φαναριών;
- ❑ Να “σπάσουμε” επαρκή αριθμό αξόνων;
- ❑ Να “καταστέψουμε” αρκετές ΜΕΚ (και πόσες είναι αρκετές;)
- ❑ Να “χαλάσουμε” αρκετά ρουλεμάν;

Προσομοίωση - μοντελοποίηση

- Διότι θέλουμε:
 - ▣ Να προσομοιώνουμε-μοντελοποιούμε-διερευνούμε τη συμπεριφορά ενός (Μηχανολογικού) Συστήματος
 - ▣ Να προβλέπουμε την κατάσταση ενός (Μηχανολογικού) Συστήματος

Μοντελοποίηση - προσομοίωση

- Γίνεται με βοήθεια φυσικών μοντέλων (αεροσύρραγμα)
- Γίνεται υπολογιστικά (με χρήση Η/Υ): μαθηματικά μοντέλα
- Μαθηματικά μοντέλα:
 - ▣ Αναλυτικά-ντετερμινιστικά
 - ▣ Προσεγγιστικά-στοχαστικά
- Υπολογισμοί
 - ▣ Αναλυτικοί: παράγουν ακριβή αποτελέσματα, αλλά δεν είναι εφικτοί σε πληθώρα περιπτώσεων
 - ▣ Προσεγγιστικοί
 - Στοχαστικοί
 - Υπολογιστική Νοημοσύνη
 - Άλλοι...



Τυχαίοι αριθμοί – μέθοδος Monte Carlo

Τυχαίοι αριθμοί

Πρόβλημα: Υπολογίστε τον όγκο στερεού που δημιουργείται από την τομή σφαίρας ακτίνας 1 και κύβου πλευράς 2 με κέντρο ίδιο με αυτό της σφαίρας

- Όγκος κύβου: 8
- Όγκος σφαίρας = $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4.188$
- Ο όγκος που αναζητούμε είναι $V=3.8112$

Ο ίδιος όγκος μπορεί να βρεθεί εάν υπολογίσουμε το κλάσμα μεγάλου αριθμού τυχαίων σημείων που βρίσκονται εντός του κύβου και εκτός της σφαίρας

□ Έστω κέντρο κύβου στο (0,0,0)

□ Μεγάλος αριθμός σημείων

`N=100000`

□ Αρχικός μετρητής

`count=0`

□ Σημεία εντός κύβου

`xyz=rand(N, 3) % για το 1/8 κύβου (γιατί;)`

□ Απόσταση κάθε σημείου από (0,0,0)

`radii= sqrt(xyz(:,1).^2 + xyz(:,2).^2 + xyz(:,3).^2);`

□ Πόσα απο τα σημεία είναι εντός της σφαίρας (1/8);


`count = sum(radii < 1);` `length(radii(radii<1))`

`fract=count/N;`

□ Όγκος : `8 * (1-fract)`

Για `N=100000`, όγκος = 3,8291

Για `N=1000000`, όγκος = 3,8107



```
N = 10000000;  
count = 0;  
xyz = rand(N, 3);  
radii = sqrt(xyz(:,1).^2 + xyz(:,2).^2 + xyz(:,3).^2);  
count = sum(radii < 1);  
fract = count/N;  
vol=8*(1-fract)
```

1. Προσομοίωση ρουλέτας



Θέλω να προσομοιώσω η “ρίψεις” σε μία ρουλέτα.

```
>>n=100;
```

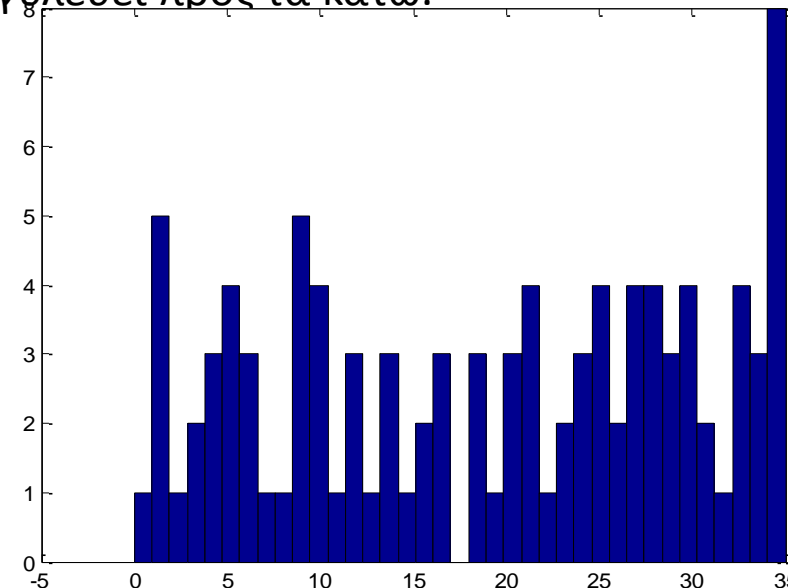
Το αποτέλεσμα πρέπει να είναι **τυχαίο**, και **μεταξύ 1 και 36**

```
>>x=floor(37*rand(1,n));
```

Η **rand** παράγει **τυχαίους** $\in (0,1)$, η **floor** στρογγυλεύει προς τα κάτω.

Πόσες φορές ήρθε το κάθε αποτέλεσμα;

```
>>hist(x,37)
```



1. Προσομοίωση ρουλέτας

Εύρεση συγκεκριμένων αποτελεσμάτων...

```
>>x (x==0) ;
```

```
>>x (x>30) ;
```

```
>>x (isprime (x) )
```

1. Προσομοίωση ρουλέτας

Πόσες φορές προέκυψε “κόκκινο” (περιττός;)

```
x(mod(x,2)==1); % κόκκινα περιττοί
```

αντί του

```
red=1
```

```
for i=1:n
```

```
    if(mod(x(i),2)==1) % κόκκινα περιττοί
```

```
        red=red+1
```

```
    end
```

```
end
```

```
length(x(mod(x,2)==1))
```

```
find(mod(x,2)==1)
```

Monte Carlo

- Μέθοδος προσομοίωσης που βασίζεται στη χρήση τυχαίων αριθμών για τη δημιουργία “πληθυσμού” δειγμάτων (γεγονότων) προς μελέτη
- Έστω η συνολική τιμή γεγονότος $I = \int_0^1 g(x)dx$
- Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η εκτιμήτρια $E[g(U)]$, όπου U μία τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $(0,1)$, δηλ. $U \sim (0,1)$
- Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή την εκτιμήτρια βάσει μίας εμπειρικής μέσης τιμής

Monte Carlo

- Θέλουμε να δημιουργήσουμε μία σειρά από τυχαία δείγματα $\{U_i\}$, τα οποία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους (iid)

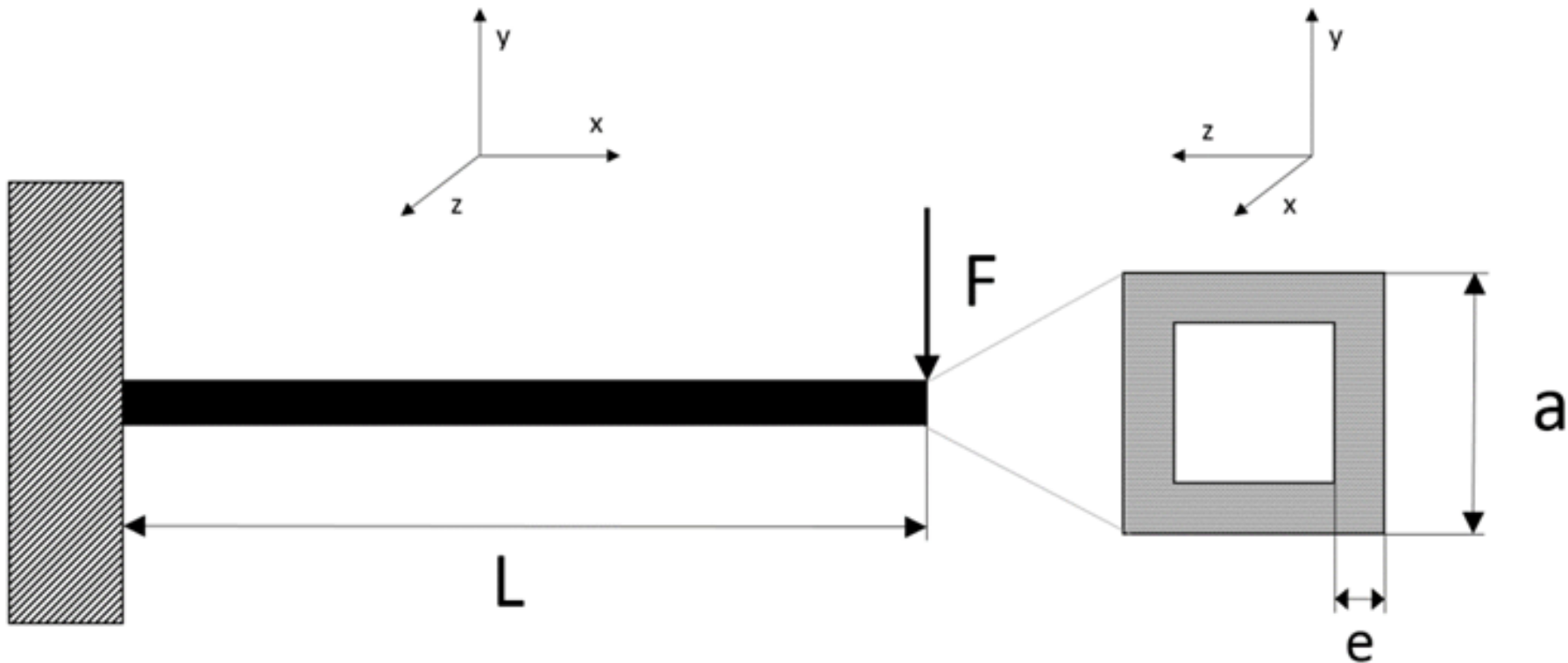
- Μετά υπολογίζουμε την (εμπειρική) μέση τιμή: $\hat{I}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(U_i)$

- Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών προκύπτει ότι: $\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{I}_m = I$

- ▣ Μεταβλητότητα:
$$Var(\hat{I}_m) = \frac{Var(g(U_i))}{m}$$

- ▣ Διάστημα εμπιστοσύνης: βάσει Γκαουσιανής προσέγγισης

Δοκός



- Πακτωμένη δοκός με ελεύθερο άκρο

$$y = \frac{FL^3}{3EI} \quad I = \frac{a^4 - (a - e)^4}{12}$$

E : ο συντελεστής Young (μέτρο ελαστικότητας)

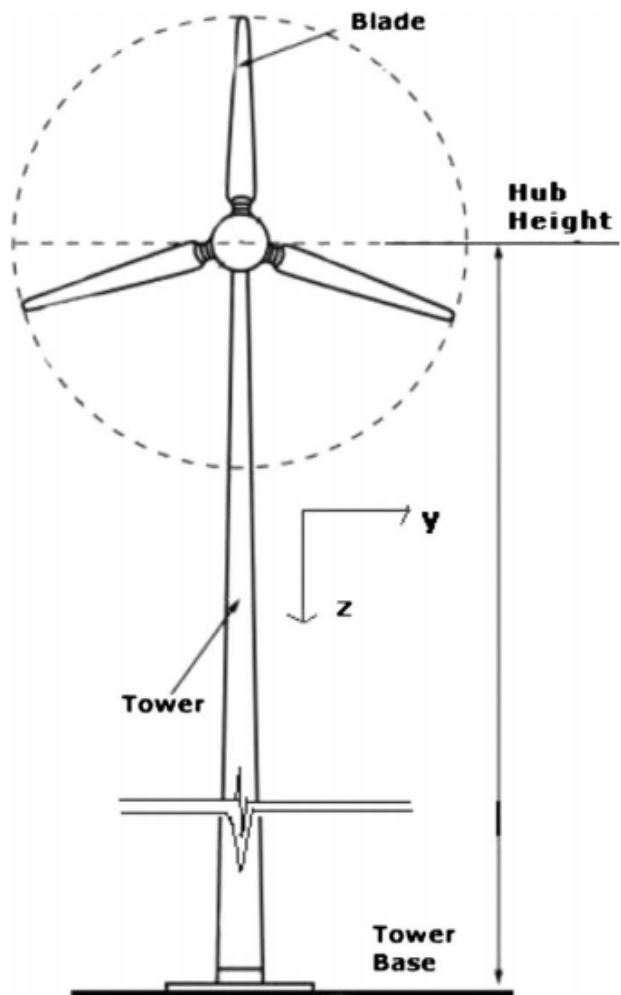


Fig. 8. Schematic figure of a wind turbine

Table 2. 1.5-MW Wind Turbine Specifications

Specifications	Values
Rotor diameter	70 m
Hub height	84 m
Maximum rotor speed	20.5 m/s
Tower base diameter	5.663 m

etc.), ductile iron (hub, teeter, etc.), steel (tower, etc.), and foundations (concrete, etc.) We refer the reader to the report (Malcolm and Hansen 2002) for additional information.

We are trying to simulate the parked condition case or survivability conditions during turbulent wind conditions. In order to simulate the same, we have kept the rotor locked by disabling the generator degree of freedom and set the initial rotor speed to zero. For illustration, we have used the Kaimal spectrum along with a standard turbulence model according to IEC 61400-1 standard (IEC 61400-3 2009). Two cases are considered: one working condition of the turbine at the design wind speed, and another parked condition of the wind turbine in storm conditions. The wind speeds are calculated at an interval of 0.05 s for 600.0 s. In order to remove the initial transient effect, the first 10 s of the time series are discarded. An ensemble size of 100 is used in calculation of MUR.

- Εάν μόνο η F ήταν τυχαία, τότε και η y θα “ακολουθούσε” την τυχειότητα της F .
- Τί συμβαίνει όμως εάν πολλές από τις παραμέτρους που καθορίζουν την y είναι ταυτόχρονα τυχαίες;

Δοκός

□ Προσομοίωση

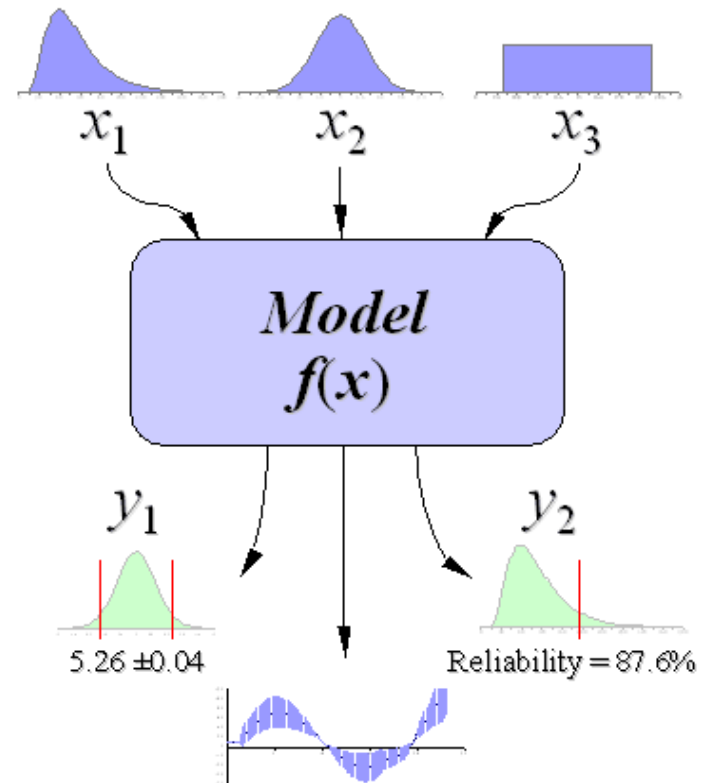
□ $E=3 \times 10^9 \pm 1.5 \times 10^8 \text{ Pa}$

□ $F=300 \pm 50 \text{ N}$

□ $L=2.5 \pm 0.05 \text{ m}$

□ $\alpha=0.1 \pm 0.01 \text{ m}$

□ $e=10\% \alpha$



- Θεωρώντας ότι
 - ▣ η κατανομή των παραπάνω (τυχαίων) μεγεθών είναι κανονική
 - (άρα μπορεί να περιγραφεί από τη συνάρτηση **randn**),
 - ▣ με μέση τιμή και τυπική απόκλιση όπως αυτή που δίνεται,
 - ▣ ζητείται να αναπτυχθεί πρόγραμμα το οποίο υλοποιεί την παραπάνω προσομοίωση.
 - ▣ Η κατανομή του μέγιστου εύρους ταλαντώσεων θα πρέπει να οπτικοποιηθεί με τη βοήθεια κατάλληλου σχήματος. Μελετήστε το συνδυασμό παραμέτρων που οδηγούν σε μεγάλα πλάτη ταλάντωσης.
 - ▣ Ο κατασκευαστής θεωρεί επικίνδυνο εύρος > 0.6 . Μία τέτοια τιμή είναι πιθανή;

```
nsamples = 1000;
```

```
F = 300 + 50*randn(nsamples,1);
```

```
E = 3e9 + 1.5e8*randn(nsamples,1);
```

```
L = 2.50 + 0.05*randn(nsamples,1);
```

```
a = 0.10 + 0.01*randn(nsamples,1);
```

```
e = 0.1*a;
```

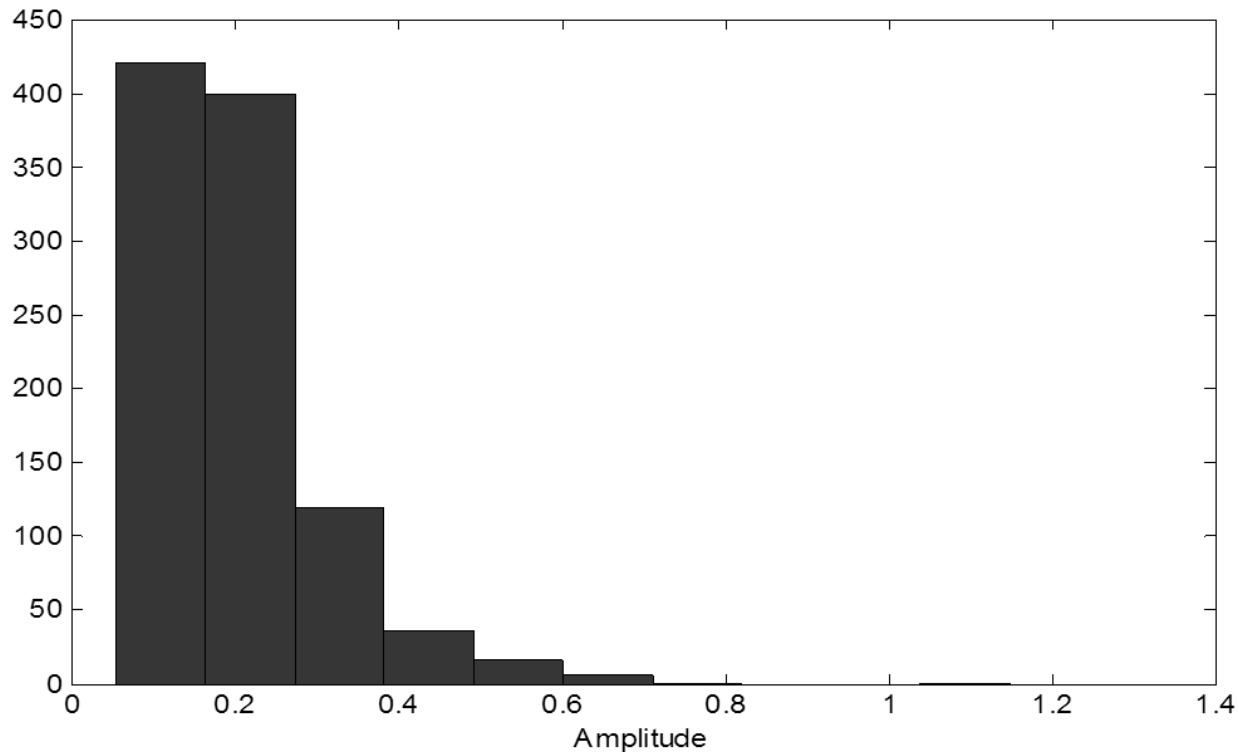
```
I = (a.^4 - (a-e).^4)/12;
```

```
y = F.*L.^3./(3*E.*I);
```

```
figure;
```

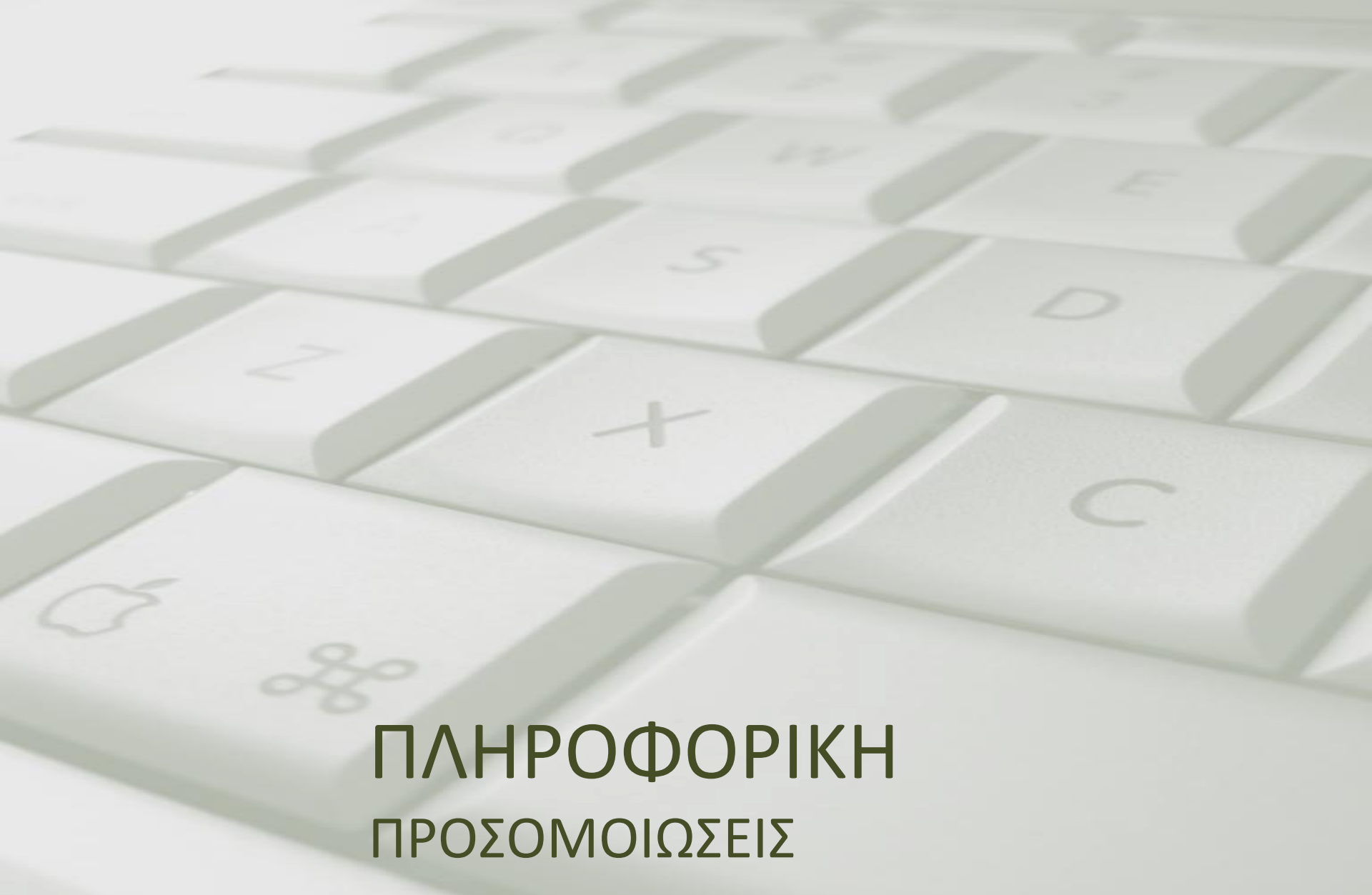
```
hist(y);
```

```
xlabel('Amplitude')
```



Κάποια συμπεράσματα:

- Το εύρος (amplitude) κυμαίνεται κυρίως < 0.4



ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ

05.05.2015

Αν. Καθηγητής Κωνσταντίνος Καρατζάς
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΑΠΘ

Περιεχόμενα

- Προσομοίωση βάσει τυχαίων αριθμών
 - ▣ Υπολογισμός αριθμού π
 - ▣ Υπολογισμός βέλτιστης παραγωγής εποχικών προϊόντων
 - Τι θα δούμε – τί θα μάθουμε;
 - ▣ **Μέθοδο διαμόρφωσης διαδικασίας (αλγορίθμου)** υπολογισμού βάσει τυχαίων συμβάντων (και άρα τυχαίων αριθμών)
 - ▣ Βασικά προγραμματιστικά **στοιχεία υλοποίησης αλγορίθμων** που χρησιμοποιούν τυχαία συμβάντα - αριθμούς
-

Υπολογισμός π

- Το π περιλαμβάνεται σε κάθε υπολογισμό που σχετίζεται με κύκλους.
- Θέλω έναν τρόπο υπολογισμού στοιχείου του κύκλου (περίμετρος-εμβαδό) που να μπορεί να κάνει χρήση τυχαίων συμβάντων.
 - Πόσο “τυχαία” μπορώ να ακολουθήσω μία κυκλική διαδρομή?
 - Αφού η γεωμετρία της διαδρομής είναι συγκεκριμένη, δύσκολα θα την ακολουθήσω randomly....
 - Δείτε το random walk παράδειγμα στην επόμενη διάλεξη...
 - Πόσο “τυχαία” μπορώ να εκτιμήσω εμβαδόν κύκλου?
 - Όσο “τυχαία” μπορώ να μετρήσω σημεία εντός και εκτός κύκλου!

Υπολογισμός π

- Όσο “τυχαία” μπορώ να μετρήσω σημεία εντός και εκτός κύκλου!

- Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι

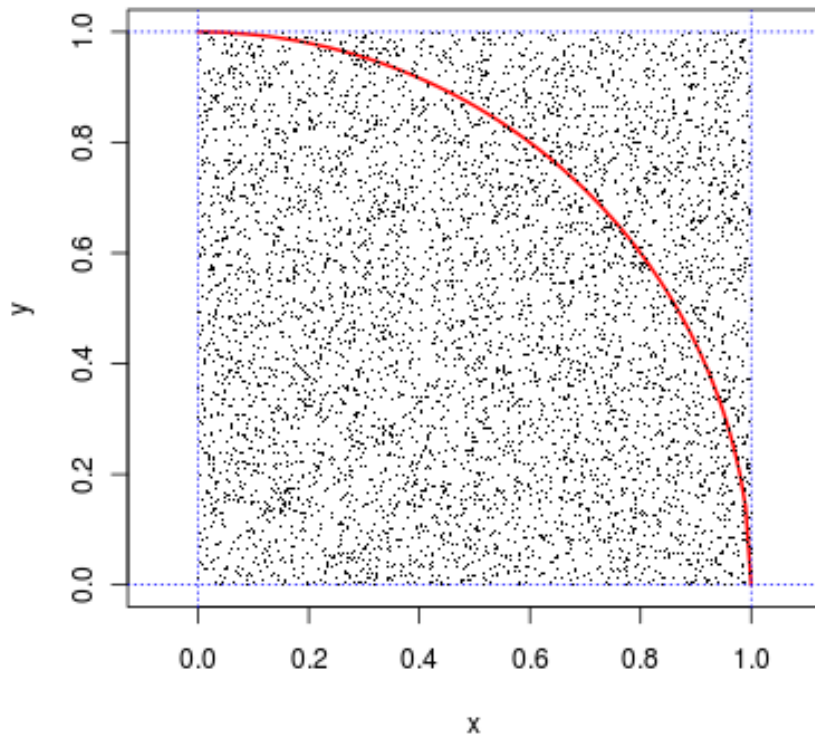
$$x^2 + y^2 = 1$$

- και για το πρώτο τεταρτημόριο (θετικό x , θετικό y) ισχύει:

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad r = x^2 + y^2$$

- όπου r η απόσταση ενός σημείου από το κέντρο των αξόνων.
 - **Αν $r < 1$ τότε το σημείο κείται εντός του μοναδιαίου κύκλου!**
-

Υπολογισμός π



- Το $\pi/4$ μπορεί να υπολογιστεί ως ο λόγος των σημείων που βρίσκονται κάτω από την καμπύλη, ως προς το σύνολο των σημείων.

Υπολογισμός π

```
function [ estimated_pi ] = pi_est(n)
times=rand(n,2);
times_squared=times.^2;
apostaseis=sum(times_squared,2);
%enallaktika apostaseis=sum(times_squared')
entos_kuklou=find(apostaseis<1);
estimated_pi=4*length(entos_kuklou)/n;
abs_error=abs(estimated_pi-pi);
```

```
% displaying results
disp(['Numbers used: ', num2str(n), ' ', 'Pi estimated: '...
     , num2str(estimated_pi), ' ', 'Absolute Error: '...
     , num2str(abs_error)])
```

Άλλη μέθοδος υπολογισμού;

- Οι βελόνες του Buffon.
 - How to Calculate Pi by Throwing Frozen Hot Dogs
-

Συζήτηση

- Αλγόριθμος
 - Χειρισμός τυχαιότητας
 - Προγραμματιστικές τεχνικές
-



□ Και μετά???

Προσοοίωση στοχαστικής ζήτησης

- Στοχαστικά συστήματα διαχείρισης αποθεμάτων (διαχείριση αποθεμάτων υπό αβέβαιη ζήτηση)
 - Παραγωγή εποχικών προϊόντων
 - Είδη Χριστουγεννιάτικης διακόσμησης
 - Καλοκαιρινά είδη
 - Προσφορά προϊόντων στοχαστικής ζήτησης
 - The newsboy example
-

Στοχαστική ζήτηση: εποχικά είδη



- Προγραμματισμός προμήθειας για είδη στολισμού
 - Κόστος ανά τεμάχιο: $c \in (0,1]$
 - Τιμή πώλησης: $v=1$ Euro
 - Εκποίηση μετά το πέρας: $g \in (0,1]$

- Ερωτήματα
 - Πόσα τεμάχια να προμηθευτώ;
 - Σε ποιά τιμή αγοράς;
 - Με ποιά τιμή εκποίησης;

Στοχαστική ζήτηση: εποχικά είδη

- Ζήτηση ανά σεζόν: 10000-20000 (κάθε ενδιάμεση τιμή είναι ισοπίθανη)
 - Ιδιοκτήτης καταστήματος: $Q1 = \text{mean} = 15000$
 - Σύζυγος ιδιοκτήτη: $Q2 = 10000 \left(1 + \frac{v - c}{v - g} \right)$
 - Πελάτης – φοιτητής Μηχανολόγος: προσομοίωση!
-

Προσομοίωση

- Τιμές πώλησης & εκποίησης μεταξύ 0.1 και 0.9 Ε
 - Ομοιόμορφα κατανεμημένες -> linspace
 - `c=linspace(0.1,0.9,100);`
 - `g=linspace(0.1,0.9,100);`
 - Προσομοιώσεις $n=500$
 - Ζήτηση προϊόντος, δηλ. αρ. πωλήσεων [10000, 20000]
 - `d=10000+10000*rand(1,n);`
 - Να δοκιμαστεί κάθε συνδυασμός **c** και **g**
 - `for i=1:length(c)`
 - `for j=1:length(g)`
-

Σενάριο 1: ζήτηση Q1

- Συνολικό κέρδος =
 - πώληση προϊόντος + εκποίηση – αγορά
 - Σενάριο 1 (ζήτηση :Q1)->K1
 - Πώληση= $\min(\text{πραγματικού}, \text{σενάριο1})$
 - $\min(d, Q1)$
 - Εκποίηση=(σενάριο1-πραγματικό) ή μηδέν
 - $g * \max(Q1 - d, 0)$
 - Αγορά= $c * Q1$
-

Σενάριο 2: ζήτηση Q2

- Συνολικό κέρδος =
 - πώληση προϊόντος + εκποίηση – αγορά
 - Σενάριο 2 (ζήτηση :Q2)->K2
 - Πώληση= $\min(\text{πραγματικού}, \text{σενάριο2})$
 - $\min(d, Q2)$
 - Εκποίηση=(σενάριο2-πραγματικό) ή μηδέν
 - $g \cdot \max(Q2 - d, 0)$
 - Αγορά = $c \cdot Q2$
-

Τελικά

- Για κάθε πληθυσμό (500σάδα) πραγματικής ζήτησης
 - ▣ Κέρδος= $\text{mean}(\text{Κέρδος}_{500})$
-

Οπτικοποίηση

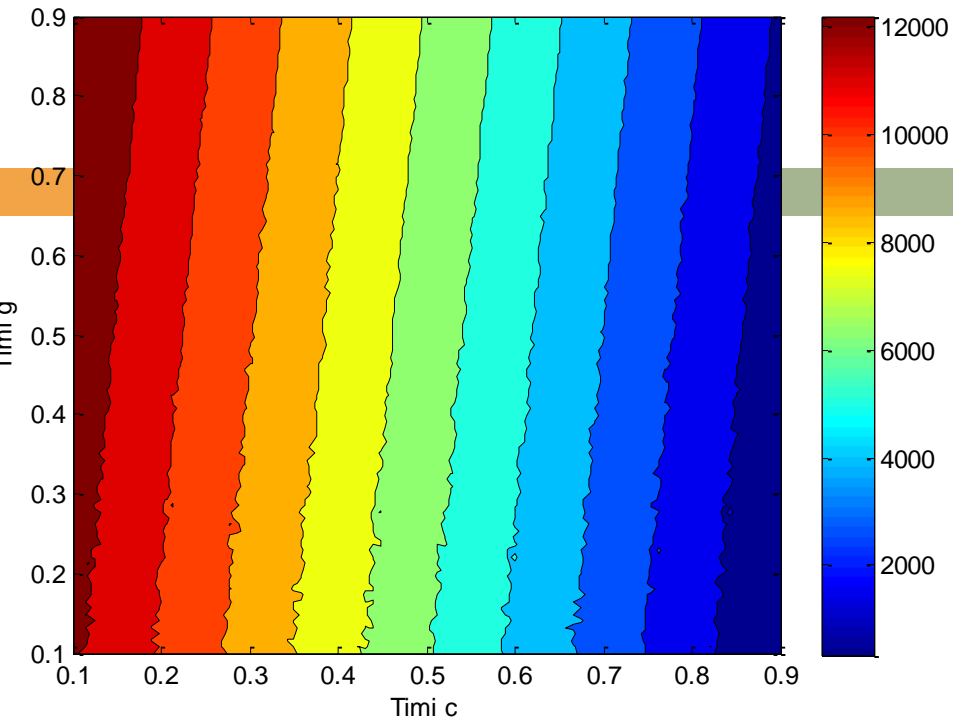
```
[X Y]=meshgrid(c,g); % δημιουργία κανάβου
```

```
figure(1) % δημιουργία παραθύρου εικόνας  
contourf(X,Y,mK1,50) % δημιουργία countour  
xlabel('Timi c')  
ylabel('Timi g')  
title('Scenario 1: K1')  
colorbar
```

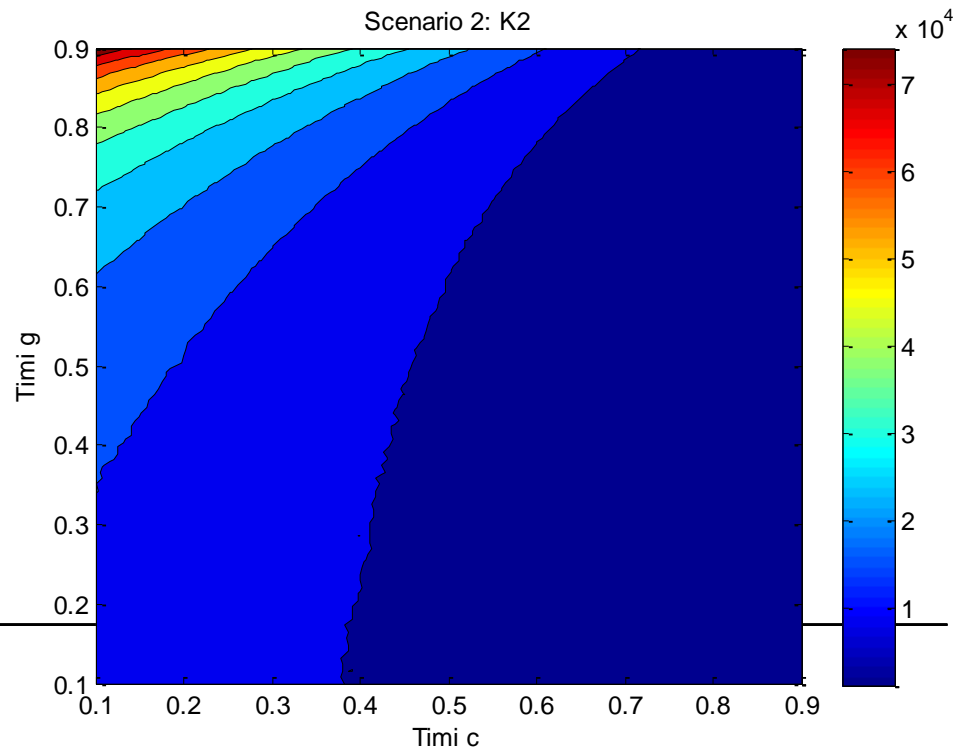
```
figure(2)  
contourf(X,Y,mK2,50)  
title('Scenario 2: K2')  
xlabel('Timi c')  
ylabel('Timi g')  
colorbar
```

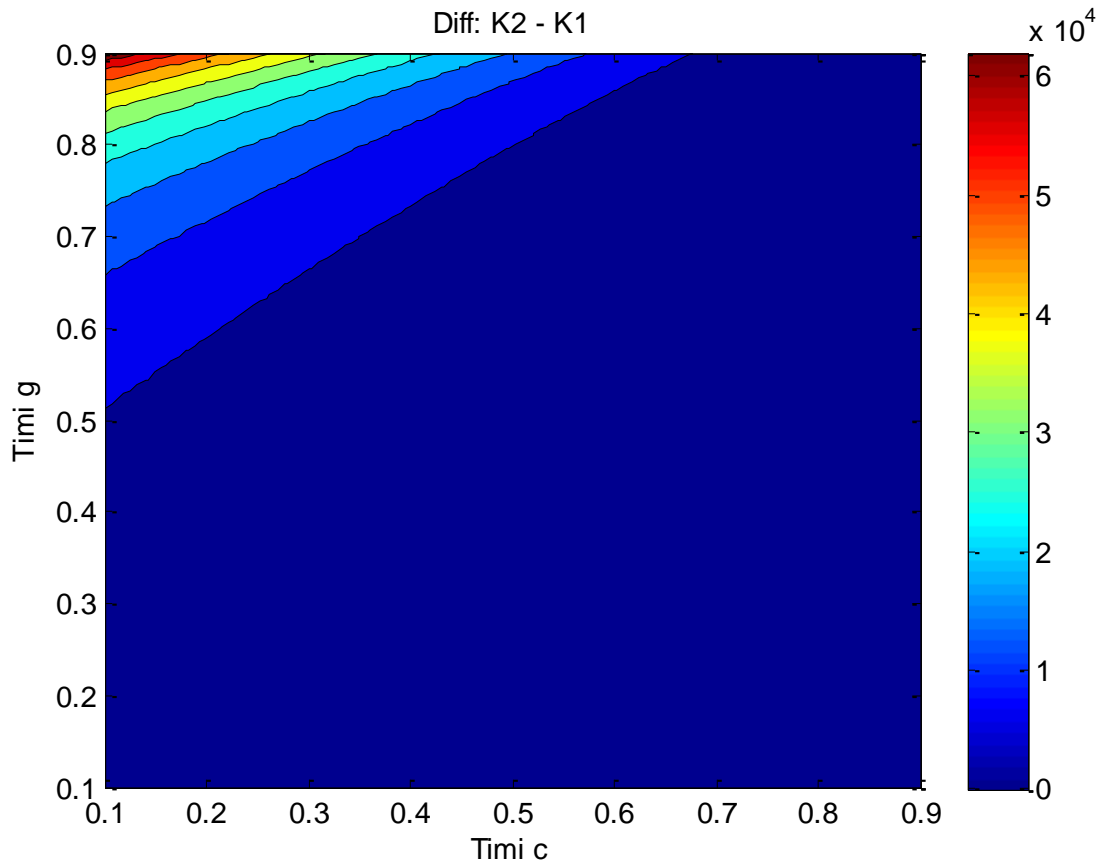
```
figure(3)  
contourf(X,Y,mK2-mK1,50)  
title('Diff: K2 - K1')  
xlabel('Timi c')  
ylabel('Timi g')  
colorbar
```

Scenario 1: K1



Scenario 2: K2





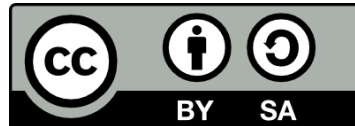
Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Κωνσταντίνος Καρατζάς. «Πληροφορική. Ενότητα 9: Προσομοιώσεις, Τυχαίοι Αριθμοί και Monte Carlo». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.auth.gr/courses/OCRS328/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

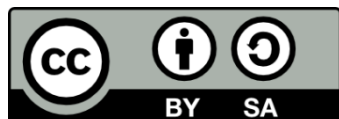
[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

