ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θέματα Αρμονικής Ανάλυσης

Ενότητα 1: Αρμονικές Συναρτήσεις στο επίπεδο, Μετασχηματισμός Hilbert (Εισαγωγή)

Μιχ. Μ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Αρμονικές συναρτήσεις στο επίπεδο.
2. Μετασχηματισμός Hilbert.

Σκοποί ενότητας

- Στην πρώτη ενότητα θα θίξουμε ορισμένα θέματα της Αρμονικής ανάλυσης που σχεδιάζουμε να διαπραγματευτούμε στο μάθημα.

Αρμονικές συναρτήσεις στο επίπεδο

Ας θυμηθούμε την πρώτη μας συνάντηση με τις αρμονικές συναρτήσεις.

Αν $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι μια ολόμορφη συνάρτηση τότε

$$F = ReF + iImF = u + iv, (1)$$

και οι u, v ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v, \\ \partial_y u = -\partial_x v. \end{cases} \qquad (2)$$

Συνεπώς

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_{xy}^2 v - \partial_{xy}^2 v = 0,$$

δηλαδή η u είναι αρμονική. Προφανώς το ίδιο ισχύει και για την v. Οι u και v που ορίζονται από την (1) λέγονται **συζυγείς αρμονικές**.

Ιδιότητες (1)

Είδαμε στο μάθημα των μιγαδικών (ή και στην Διανυσματική Ανάλυση με Green) ότι οι αρμονικές συναρτήσεις έχουν αξιοσημείωτες ιδιότητες:

1. Την **ιδιότητα του μέσου όρου:** Αν η u είναι αρμονική στο ανοικτό Ω, τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in \Omega$ και για κάθε περιφέρεια $S\big((x_0, y_0), r\big)$ που περιέχεται στο Ω, ισχύει

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S\left((x_0, y_0), r\right)} u \, , \qquad (3)$$

Η ιδιότητα του μέσου όρου χαρακτηρίζει τις αρμονικές, δηλαδή αν μία συνεχής συνάρτηση ικανοποιεί την (3), τότε είναι αρμονική.

Ιδιότητες (2)

2. Την **αρχή του μεγίστου**: Αν u αρμονική στο ανοικτό Ω, τότε

$$\sup_{\Omega} u < \sup_{\partial\Omega} u.$$

Κατά συνέπεια, αν το μέγιστο της u πιάνεται σε εσωτερικό σημείο του Ω, η u είναι σταθερή.

3. Το **θεώρημα του Liouville**: Αν η u αρμονική σε όλο τον $\mathbb{R}^2$ και φραγμένη, τότε είναι σταθερή.

Συζυγείς αρμονικές (1)

Ας είναι $F = u + iv$ ολόμορφη στον άνω ημιχώρο

$$\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

Οι u και v συνδέονται με τις σχέσεις Cauchy-Riemann.

Ας υποθέσουμε ότι οι u, v έχουν συνοριακές τιμές τις

$$f(x) = \lim_{y\to 0} u(x,y) \; \kappa\alpha\iota \; g(x) = \lim_{y\to 0} v(x,y)$$

Ποια είναι η σχέση των συνοριακών τιμών f, g;

Για να απαντήσουμε, χρειάζεται πρώτα να θυμηθούμε ότι η αρμονική επέκταση στον άνω ημιχώρο μιας συνάρτησης $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, δίνεται από την συνέλιξη με τον πυρήνα τουPoisson

$$Q_y(x) = c\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Συζυγείς αρμονικές (2)

Αν λοιπόν η f είναι η συνοριακή τιμή της αρμονικής u, τότε

$$u(x,y) = \left(Q_y * f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} Q_y(x-x')f(x')dx'$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{cy}{(x-x')^2+y^2} f(x')dx', \qquad (4)$$

και όμοια για τις v και g.

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier της $u(x,y)$ ως προς την μεταβλητή x και θυμίζοντας ότι ο Fourier μετασχηματίζει την συνέλιξη σε γινόμενο, συνάγεται ότι

$$\hat{u}(\xi,y) = \left(\widehat{Q_y * f}\right)(\xi) = \widehat{Q_y}(\xi)\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|}\hat{f}(\xi), \qquad (5)$$

αφού $\widehat{Q_y}(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|}$.

Συζυγείς αρμονικές (3)

Επίσης

$$\widehat{\partial_x u}(\xi, y) = -2\pi i \xi e^{-2\pi y|\xi|} \hat{f}(\xi), \qquad (6)$$

αφού για κάθε καλή φ

$$\widehat{\partial_x \varphi}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{\varphi}(\xi).$$

Από τις (5), (6) και την (2)έχουμε ότι

$$\partial_x u = \partial_y v$$

ή

$$2\pi i \xi e^{-2\pi y|\xi|} \hat{f}(\xi) = -2\pi |\xi| e^{-2\pi y|\xi|} \hat{g}(\xi),$$

δηλαδή

$$\hat{g}(\xi) = i \frac{\xi}{|\xi|} \hat{f}(\xi) = i sign(\xi) \hat{f}(\xi), \qquad (7)$$

Μετασχηματισμός Hilbert (1)

Θα δούμε αργότερα ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\xi \to isign(\xi)$ είναι η $x \to \frac{c}{x}$ και συνεπώς η (7), με ανάποδο Fourier, δίνει

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{c}{x - x'} f(x')dx' ,$$

δηλαδή την συνέλιξη f, με τον πυρήνα $K(x) = \frac{c}{x}$. Γράφουμε:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{c}{x - x'} f(x')dx' = \int_{\mathbb{R}} K(x - x')f(x')dx'$$

$$= \int_{\mathbb{R}} K(x')f(x - x')dx' = Hf(x), \qquad (8)$$

αφού ο μετασχηματισμός αυτός λέγεται μετασχηματισμός Hilbert.

Μετασχηματισμός Hilbert (2)

Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε πάει και ανάποδα, δηλαδή αν

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}) \; και \; g = H(f),$$

τότε οι αρμονικές τους επεκτάσεις $u = Q_y(f)$ και $v = Q_y(g)$ είναι συζυγείς αρμονικές και η $F := u + iv$ είναι ολόμορφη στον άνω ημιχώρο.

Μερικές παρατηρήσεις επί του μετασχηματισμού Hilbert επιβάλονται.

Πρώτον, επειδή ο πυρήνας $\mathrm{K}(x)$ δεν ορίζεται στο $x = 0$, για να αποφύγουμε τις κακοτοπιές και να έχει νόημα το ολοκλήρωμα (8) για $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, πρέπει να πάρουμε όρια:

Παρατηρήσεις (1)

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x\prime| \geq \varepsilon} \frac{1}{x'} f(x - x')dx'$$

(είναι αυτό που λέμε principal value).

Τώρα, από την (7) και την ισομετρία του Plancherel, (αν $f \in L^2(\mathbb{R})$, τότε $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ και $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$), έχουμε

$$\|Hf\|_2 = \|\widehat{Hf}\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{Hf}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |isign(\xi)\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2,$$

Παρατηρήσεις (2)

δηλαδή ο μετασχηματισμός Hilbert είναι συνεχής επί του $L^2(\mathbb{R})$.

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι οι χώροι της αρμονικής ανάλυσης είναι οι χώροι $L^p(\mathbb{R})$,$p \geq 1$.

Για $p \in [1, \infty)$, η $f \in L^p(\mathbb{R})$αν είναι μετρήσιμη και

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Ο $L^\infty(\mathbb{R})$ είναι οι μετρήσιμες και φραγμένες συναρτήσεις (εκτός ίσως από ένα σύνολο μέτρου 0) και η νόρμα του είναι ως συνήθως το $sup|f| = \|f\|_\infty$.

Ένα ερώτημα που τίθεται φυσιολογικά είναι το ακόλουθο:

Συνέχεια του μετασχηματισμού Hilbert (1)

Για ποια $p \geq 1$, ο μετασχηματισμός Hilbert είναι συνεχής επί του $L^p(\mathbb{R})$;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, ξεκινούμε με την ακόλουθη επισήμανση. Αν ο πυρήνας $\mathrm{K}(x)$ ήταν ολοκληρώσιμος (δηλαδή $K \in L^1(\mathbb{R})$) τότε για κάθε $f \in L^\infty(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
|Hf(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |K(y)f(x-y)|dy \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |K(y)|dy \\
&= \|f\|_\infty \|K\|_1 < \infty,
\end{aligned}
$$

και συνεπώς $Hf \in L^\infty(\mathbb{R})$, και επιπλέον ο H θα ήταν συνεχής στον $L^\infty(\mathbb{R})$. Κατόπιν, με παρεμβολή και συμμετρία θα είχαμε την συνέχεια επί των $L^p(\mathbb{R})$ για όλα τα $p \geq 1$.

Αλλά τα πράγματα δεν είναι έτσι:

Συνέχεια του μετασχηματισμού Hilbert (2)

$$\int_{\mathbb{R}} |K(x)|dx = 2c\int_0^\infty \frac{dx}{x} = 2c[lodx]_0^\infty = \infty,$$

άρα ο πυρήνας δεν είναι ολοκληρώσιμος.

Σε αυτήν την περίπτωση, για να απαντηθεί το ερώτημα της συνέχειας του μετασχηματισμού Hilbert επί των $L^p(\mathbb{R})$, έχουμε ανάγκη της θεωρίας των Calderón-Zygmund.

Έτσι καταφέρνουμε να δείξουμε ότι ο H είναι συνεχής από τον $L^1(\mathbb{R})$σε κάποιον μεγαλύτερο χώρο (τον $L^1_{weak}(\mathbb{R})$) για τον οποίο τα γενικά θεωρήματα της παρεμβολής ισχύουν.

Έτσι μπορούμε να δείξουμε τελικά την συνέχεια του μετασχηματισμού Hilbert επί των $L^p(\mathbb{R})$ για όλα τα $p \in (1,\infty)$:

$$\|Hf\|_p \le c(p)\|f\|_p, \forall p \in (1,\infty), \qquad (9)$$

Συνέχεια του μετασχηματισμού Hilbert (3)

Στον μοναδιαίο δίσκο έχουμε τα αντίστοιχα φαινόμενα και η (9) είναι ένα παλιό αποτέλεσμα του M.Riesz.

Τον υπολογισμό της βέλτιστης σταθεράς στην (9) την έκανε ο αείμνηστος Στέλιος Πηχωρίδης στην διατριβή του.

Πέρασμα σε περισσότερες διαστάσεις

Οι αρμονικές συναρτήσεις μπορούν να οριστούν στον $\mathbb{R}^n$ για κάθε $n \geq 2$, σαν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\Delta \mathrm{u} = \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \cdots + \partial_{x_n}^2 u = 0$$

Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε τις ιδιότητες του μέσου όρου, της αρχής του μεγίστου και το θεώρημα Liouville, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Green, χωρίς δηλαδή την χρήση της μιγαδικής δομής που άλλωστε δεν είναι και διαθέσιμη για $n = 2p + 1$.

Βιβλιογραφία

- A. Carbery, *Harmonic Analysis of the Calderón-Zygmund School*, 1970-1993, Bull. London Math. Soc., 30, (1998), 11-23.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970.
- E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1993.
- E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton University Press, 1970.
- E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Θέματα Αρμονικής ανάλυσης. Αρμονικές Συναρτήσεις στο επίπεδο, Μετασχηματισμός Hilbert (Εισαγωγή)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS354/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης