ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θέματα Αρμονικής Ανάλυσης

Ενότητα 5: Οι κλασικές διαφορικές εξισώσεις

Μιχ. Μ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Εξίσωση της θερμότητας.
2. Εξίσωση Poisson.
3. Εξίσωση Laplace.

Σκοποί ενότητας

- Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε μια πρώτη εφαρμογή του Fourier στις κλασικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (δ.ε.μ.π.): της θερμότητας στον $\mathbb{R}^n$, του Poisson στον $\mathbb{R}^n$ και του Laplace στον άνω ημιχώρο $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

  Οι θεμελιώδεις λύσεις τους είναι ο πυρήνας του Gauss, η συνάρτηση Green και ο πυρήνας Poisson αντίστοιχα.

Η εξίσωση της θερμότητας (1)

Η εξίσωση της θερμότητας στον $\mathbb{R}^n$ είναι η ακόλουθη:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \Delta_x u(t,x) \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \\ \quad u(t,x) \xrightarrow{t\to 0} f(x) \end{cases}, (1)$$

Η f είναι η αρχική θερμοκρασία και μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα της λύσης.

Μπορούμε λοιπόν να φανταστούμε ότι η λύση $u(t,x)$ της (1) ζεί στον άνω ημιχώρο

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x,t) \colon x \in \mathbb{R}^n, t > 0\},$$

και συνεπώς η f είναι η συνοριακή της τιμή.

Άς υποθέσω ότι οι παρακάτω υπολογισμοί έχουν νόημα.

Η εξίσωση της θερμότητας (2)

Με άλλα λόγια οι λογαριασμοί που ακολουθούν είναι τυπικοί (formal είναι ο αγγλοσαξονικός όρος). Με Fourier ως προς την μεταβλητή του χώρου x, έχουμε από την (1):

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(t,x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x u(t,x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx\,,$$

δηλαδή

$$\partial_t \hat{u}(t,\xi) = -4\pi^2\|\xi\|^2\hat{u}(t,\xi),$$

ή ακόμη

$$\partial_t log\hat{u}(t,\xi) = -4\pi^2\|\xi\|^2.$$

Συνεπώς

Η εξίσωση της θερμότητας (3)

$$log\hat{u}(t,\xi) = -4\pi^2\|\xi\|^2 t + C(\xi).$$

Άρα

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{C(\xi)}e^{-4\pi^2 t\|\xi\|^2} = \hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2 t\|\xi\|^2},$$

από τα αρχικά δεδομένα.

Αντιστρέφοντας τον Fourier, έχω

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi}\hat{u}(t,\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi}\hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2 t\|\xi\|^2}d\xi$$
$$= (f * P_t)(x),$$

όπου ο $P_t(x)$ ικανοποιεί

$$\widehat{P_t}(\xi) = e^{-4\pi^2 t\|\xi\|^2}.$$

Η εξίσωση της θερμότητας (4)

Από το Λήμμα 2 (Ενότητα 4), έχουμε

$$P_t(x) = \frac{e^{-\|x\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}, t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Όπως είναι γνωστό, ο πυρήνας $P_t(x)$ λέγεται πυρήνας της θερμότητας (ή του Gauss) και ο ρόλος του στην Ανάλυση είναι πολύ σημαντικός.

Χρήσιμες ιδιότητες του πυρήνα της θερμότητας είναι οι ακόλουθες:

Λήμμα 1 (1)

Λήμμα 1: Αν P_t είναι ο πυρήνας της θερμότητας, τότε

1. Για κάθε $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x)dx = 1.$$

2. Για κάθε $t_1, t_2 > 0$,

$$P_{t_1} * P_{t_2} = P_{t_1+t_2},$$

(ιδιότητα της ημιομάδας)

Απόδειξη: 1. Για κάθε $t > 0$ έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|y\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} dy = \prod_{j \leq n} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-{y_j}^2/2t}}{(4\pi t)^{1/2}} dy_j = 1,$$

απο το ολοκλήρωμα του Gauss.

Λήμμα 1 (2)

2. Συνάγεται με ανάποδο Fourier από την σχέση:

$$\widehat{P}_{t_1}(\xi)\widehat{P}_{t_2}(\xi) = e^{-4\pi^2 t_1\|\xi\|^2} e^{-4\pi^2 t_1\|\xi\|^2}$$

$$= e^{-4\pi^2(t_1+t_2)\|\xi\|^2}$$

$$= \widehat{P}_{t_1+t_2}(\xi)$$

Η εξίσωση του Poisson (1)

Η εξίσωση του Poisson στον $\mathbb{R}^n$ είναι η ακόλουθη

$$\Delta u(x) = f(x), \qquad (2)$$

Για να λύσουμε την (2) κάνουμε Fourier και έχουμε την

$$-4\pi^2 \|\xi\|^2 \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{\hat{f}(\xi)}{4\pi^2 \|\xi\|^2},$$

και συνεπώς

$$u(x) = c(n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} dy,$$

Η εξίσωση του Poisson (2)

αφού για $\mathrm{n} > 2$, ο μετασχηματισμός Fourier της $\frac{1}{\|x\|^{n-2}}$ είναι η $\frac{c(n)}{\|\xi\|^2}$ (για $n = 2$ έχουμε την $log\|x\|$).

Προφανώς το να λύσουμε την Poisson, είναι ισοδύναμο με το να αντιστρέψουμε την Λαπλασιανή αφού

$$u(x) = (\Delta^{-1}f)(x),$$

και συνεπώς

$$\Delta u = \Delta\Delta^{-1}f = f.$$

Η πρόταση που ακολουθεί δίνει την αντίστροφη της Λαπλασιανής.

Θεώρημα 1 (1)

Θεώρημα 1: Αν $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, τότε

1. Αν $n \geq 3$,

$$f(x) = c(n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} dy .$$

2. Αν $n \geq 2$,

$$f(x) = c \int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(y) log\|x-y\| dy .$$

Απόδειξη: Δίνουμε την απόδειξη μόνο για $n \geq 3$. Η περίπτωση $n = 2$, αφήνεται ως άσκηση.

Σταθεροποιώ ένα x_0 και διαλέγω R μεγάλο τέτοιο ώστε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in S(x_0, R)$.

Θεώρημα 1 (2)

Ας είναι $\Omega_\varepsilon = \mathrm{B}(x_0, R)\backslash \mathrm{B}(x_0, \varepsilon)$

Από τον τύπο του Green:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \{g(y)\Delta \mathrm{f}(y) - f(y)\Delta \mathrm{g}(y)\}dy = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(g\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial g}{\partial x}\right)d\sigma$$

$$= \int_{S(x_0,\varepsilon)} \left(g\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial g}{\partial x}\right)d\sigma\,,$$

αφού η f μηδενίζεται πάνω στην $S(x_0, R)$.

Αν πάρω

$$g(y) = \frac{c(n)}{\|x-y\|^{n-2}},$$

Θεώρημα 1 (3)

τότε επί των σφαιρών $S(x_0, r)$,

$$g = \frac{c(n)}{r^{n-2}} \;\kappa\alpha\iota\; \frac{\partial g}{\partial n} = \frac{c'(n)}{r^{n-1}}.$$

Επιπλέον, επειδή η g είναι αρμονική μέσα στον Ω_ε, έχω

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{c(n)}{\|x-y\|^{n-2}} \Delta f(y) dy = \int_{S(x_0,\varepsilon)} \left(g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) d\sigma$$

$$= \int_{S(x_0,\varepsilon)} \frac{c(n)}{\varepsilon^{n-2}} \frac{\partial f}{\partial n} (x_0 + \varepsilon\theta) \varepsilon^{n-1} d\theta + \int_{S(x_0,\varepsilon)} \frac{c'(n)}{\varepsilon^{n-1}} f(x_0 + \varepsilon\theta) \varepsilon^{n-1} d\theta$$

$$\overrightarrow{\varepsilon \to 0}\; 0 + c'(n) f(x_0).$$

Θεώρημα 1 (4)

Ως πόρισμα του Θεωρήματος έχουμε ότι αν $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, η λύση της εξίσωσης

$$\Delta u(x) = f(x),$$

δίνεται από τον τύπο:

$$u(x) = c(n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} dy = c(n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{\|y\|^{n-2}} dy\,.$$

Πράγματι, παραγωγίζοντας μέσα από το ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\Delta u(x) = c(n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta_x f)(x-y)}{\|y\|^{n-2}} dy = f(x),$$

απο το θεώρημα.

Η εξίσωση του Laplace (1)

Η εξίσωση του Laplace στον άνω ημίχωρο

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x,y): x \in \mathbb{R}^n, y > 0\},$$

είναι η ακόλουθη:

$$\begin{cases} \Delta_x u(x,y) + \partial_y^2 u = 0, \\ u(x,y) \xrightarrow{y\to 0} f(x). \end{cases} \quad (3)$$

Πρόκειται δηλαδή για το πρόβλημα της αρμονικής επέκτασης στον άνω ημίχωρο. Το πρόβλημα λύνεται μέσω του πυρήνα Poisson που θα κατασκευάσουμε με δύο τρόπους.

Ξεκινούμε με την κλασσική προσέγγιση.

Με Fourier ως προς x, έχουμε από την (3)

$$\partial_y^2 \hat{u}(\xi,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^2 u(x,t) e^{-2\pi i x\xi} dx =$$

Η εξίσωση του Laplace (2)

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x u(x,t)\, e^{-2\pi i x\xi} dx = -\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\, \Delta_x e^{-2\pi i x\xi} dx$$

$$= 4\pi^2 \|\xi\|^2 \hat{u}(\xi, y).$$

Η ολοκληρώσιμη λύση της ως άνω εξίσωσης είναι η

$$\hat{u}(\xi, y) = C(\xi) e^{-2\pi y \|\xi\|}, \xi \in \mathbb{R}^n, y > 0.$$

Για τον υπολογισμό της $u(x, y)$, πρέπει να βρούμε την αντίστροφη Fourier της $e^{-2\pi y \|\xi\|^2}$.

Θυμίζω ότι η συνάρτηση Γ ορίζεται από τον τύπο

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds\,, Rez > 0.$$

Πρόταση 1

Πρόταση 1: Για κάθε $y > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi y\|\xi\|} e^{2\pi i x\xi} d\xi = c_n \frac{y}{(y^2 + \|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

όπου

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}.$$

Ο πυρήνας

$$Q_y(x) = c_n \frac{y}{(y^2 + \|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

λέγεται **πυρήνας Poisson**.

Ιδιότητες του πυρήνα Poisson

Δύο χρήσιμες ιδιότητες του πυρήνα Poisson είναι οι ακόλουθες:

Πρόταση 2: Τα κάτωθι ισχύουν

1. Για κάθε $y > 0$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} Q_y(x)dx = 1.$$
2. Για κάθε $y_1, y_2 > 0$,
$$\left(Q_{y_1} * Q_{y_2}\right)(x) = Q_{y_1+y_2}(x),$$
(ιδιότητα της ημιομάδας).

Βιβλιογραφία

- A. Carbery, *Harmonic Analysis of the Calderón-Zygmund School*, 1970-1993, Bull. London Math. Soc., 30, (1998), 11-23.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970.
- E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1993.
- E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton University Press, 1970.
- E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Θέματα Αρμονικής Ανάλυσης. Οι κλασικές διαφορικές εξισώσεις». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS354/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης