



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

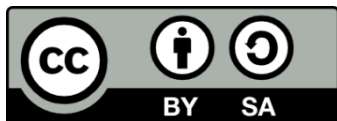
ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας

Ενότητα 2: Πεδία Έλξης

Η.Ν. Τζιαβός - Γ.Σ. Βέργος
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



ΑΠΘ/ΤΑΤΜ

**Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας
4^ο Εξάμηνο**

Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας

Introduction to gravity field

Ακαδημαϊκή Χρονιά:

2014 – 2015

Πρόγραμμα:

Τετάρτη 9:00 – 13:00

Διδάσκοντες:

Η.Ν. Τζιαβός, Γ.Σ. Βέργος

<http://web.auth.gr/e-topo/>

<http://olimpia.topo.auth.gr/courses/>

Ιστοσελίδες ΔΕΠ

Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας

Η. Τζιαβός ή Γ. Βέργος

Μαθήματα - εργασίες

➤ Εκπόνηση θέματος

➤ Βαθμός προαγωγής

Γραπτό: 8 μονάδες (άριστα)

Θέμα: 2 μονάδες (άριστα)

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Το θέμα ενεργοποιείται εφόσον ο βαθμός του γραπτού είναι 3.5 - 4 με άριστα το 8

Ελληνική

Δ. Αραμπέλος (2000): “Βαρυτημετρία”.

Δ. Αραμπέλος (2002): “Εισαγωγή στη θεωρία του δυναμικού”.

Κ. Κατσάμπαλος και Η.Ν. Τζιαβός (1991): “Φυσική Γεωδαισία”.

Ξενόγλωσση

W.A. Heiskanen and H. Moritz (1967): “Physical Geodesy”.

H. Moritz (1980): “Advanced Physical Geodesy”.

M.G. Sideris (1993): “The gravity field in Surveying and Geodesy”,
Lecture Notes, University of Calgary.

W. Torge (2001): “Geodesy”, 3rd edition.

I.N. Tziavos (1993): “Numerical considerations of FFT methods in Gravity Field Modelling”,
University of Hannover.

P. Vanicek and E. Karakiwsky (1982): Geodesy

H. Wellenhof and H. Moritz (2005): “Physical Geodesy”.

Νευτώνειο πεδίο έλξης

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΒΑΡΥΤΗΜΕΤΡΙΑΣ



Εικόνα 1

Όργανα μέτρησης σχετικών τιμών βαρύτητας

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΒΑΡΥΤΗΜΕΤΡΙΑΣ



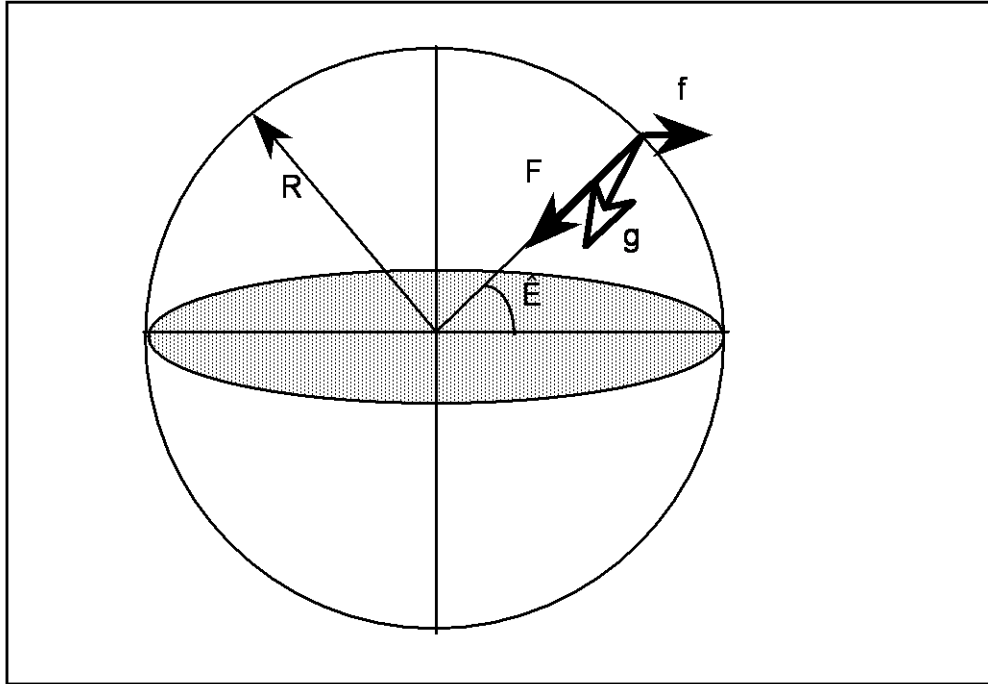
Εικόνα 2

Όργανα μέτρησης απόλυτων τιμών βαρύτητας

ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Βαρύτητα $1 \text{ gal} = 1 \text{ cm sec}^{-2}$
 $1 \text{ mgal} = 10^{-5} \text{ m sec}^{-2}$
- Δυναμικό $\text{m}^2 \text{ sec}^{-2}$
- Μεταβολή 'g' κατά την κατακόρυφη
 $1\text{E} = 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$ (Eotvos)

Η ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ ΓΗΣ



Εικόνα 3

φυγόκεντρη δύναμη

$$f = \omega^2 R \cos\phi$$

$$g = F + f$$

❑ Στον ισημερινό η μέγιστη τιμή: $f_{\max} = \omega^2 R = 3.4 \text{ gal}$

$$g_{\text{equ}} = 978.0 \text{ gal}$$

❑ Στους πόλους:

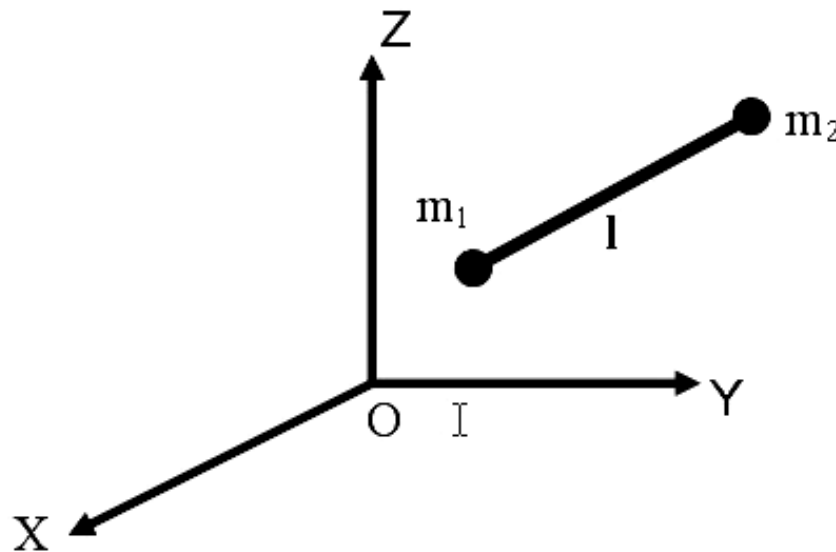
$$f = 0$$

$$g_{\text{pole}} = 983.2 \text{ gal}$$

- Νεύτων – παγκόσμια έλξη
- Ηλεκτρομαγνητισμός
- Ισχυρή & ασθενής πυρηνική δύναμη
- Αϊνστάϊν – γεωμετρία χωροχρόνου
- 5η δύναμη ; (αντι-βαρύτητα;)

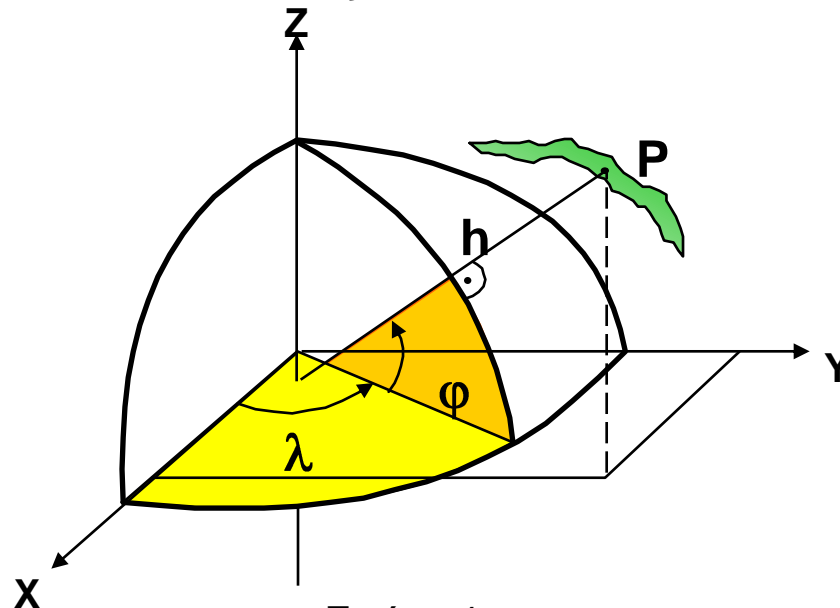
ΝΕΥΤΩΝΙΟ ΠΕΔΙΟ ΕΛΞΗΣ

- Οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μαζών είναι η κύρια πηγή του πεδίου βαρύτητας
- Το 0.3% του πεδίου βαρύτητας οφείλεται στη φυγόκεντρο δύναμη
- **ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ!!** Μέτρο, Διεύθυνση, Φορά των ελκτικών δυνάμεων των μαζών
- Οι παράμετροι (Μέτρο, Διεύθυνση, Φορά) εξαρτώνται από την κατανομή των μαζών



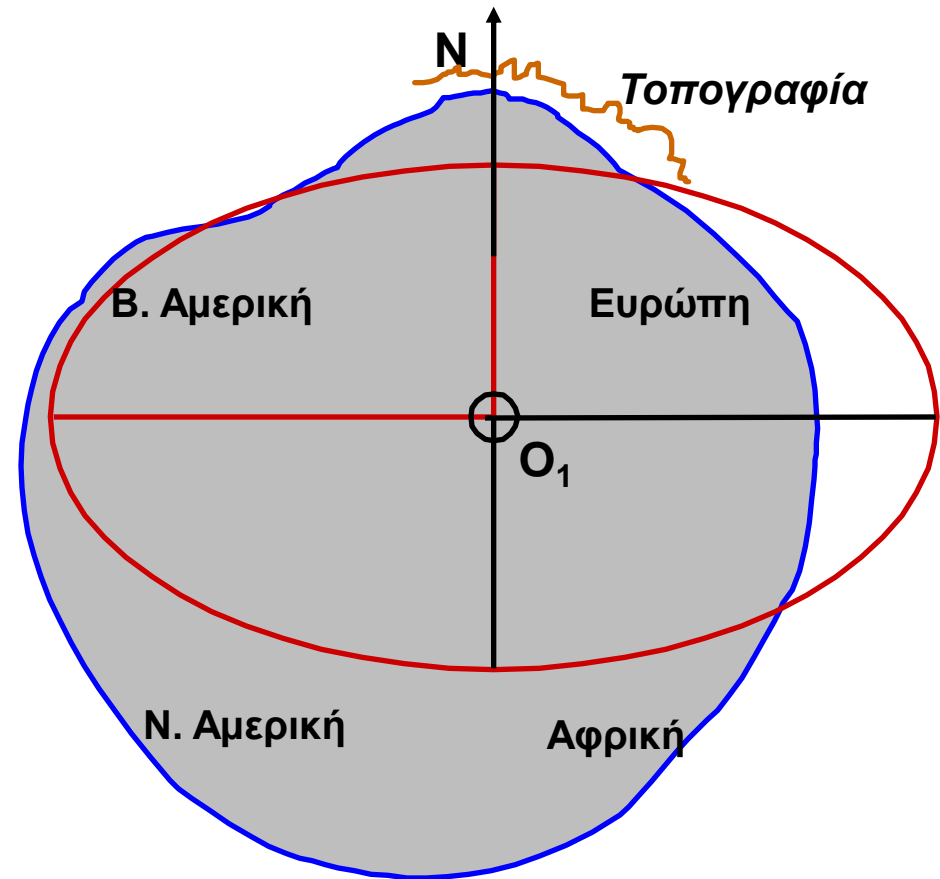
ΓΕΩΚΕΝΤΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

- Ελλειψοειδές γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς
- Γεωμετρία (μεγάλος & μικρός ημιάξονας a, b , κέντρο \equiv κέντρο μάζας Γης)
- Ο άξονας Z συμπίπτει με το μέσο άξονα περιστροφής της Γης (μέση θέση πόλου 1900.0 -1906.0 *Conventional International Origin – CIO*)
- Ο άξονας X διέρχεται από την τομή του αστρονομικού μεσημβρινού του Greenwich (μηδενικός μεσημβρινός μηκών – Διεθνές Γραφείο Ώρας – *Bureau Internationale de l' Heure - BIH*)
- Ο άξονας Y συμπληρώνει ένα δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα



Εικόνα 4

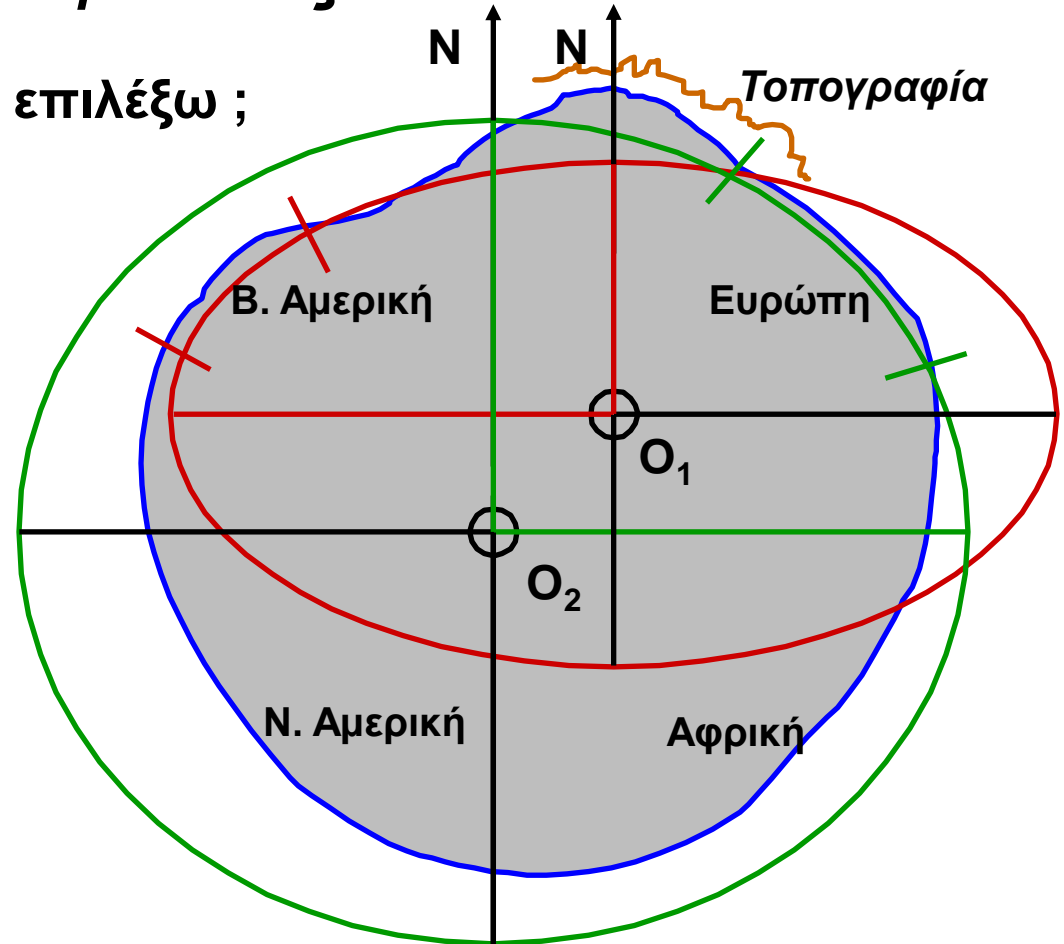
Το ελλειψοειδές και η ορατή τοπογραφία



Εικόνα 5

Το ελλειψοειδές και το γεωειδές

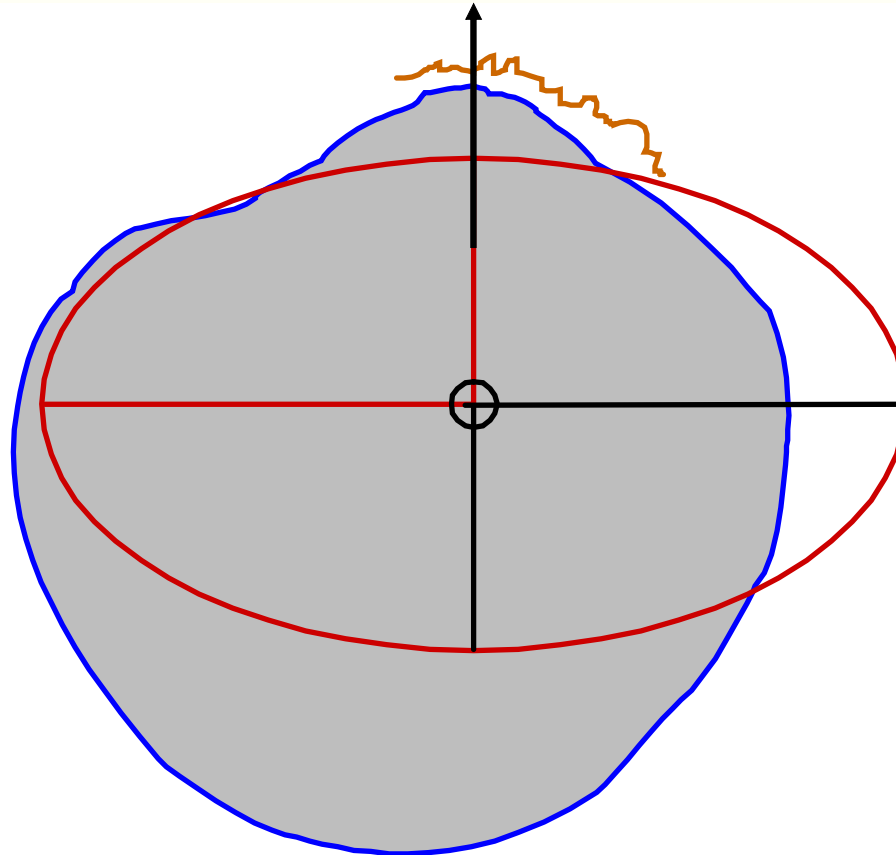
- Ποιο ελλειψοειδές να επιλέξω ;



Εικόνα 6

1η προσέγγιση

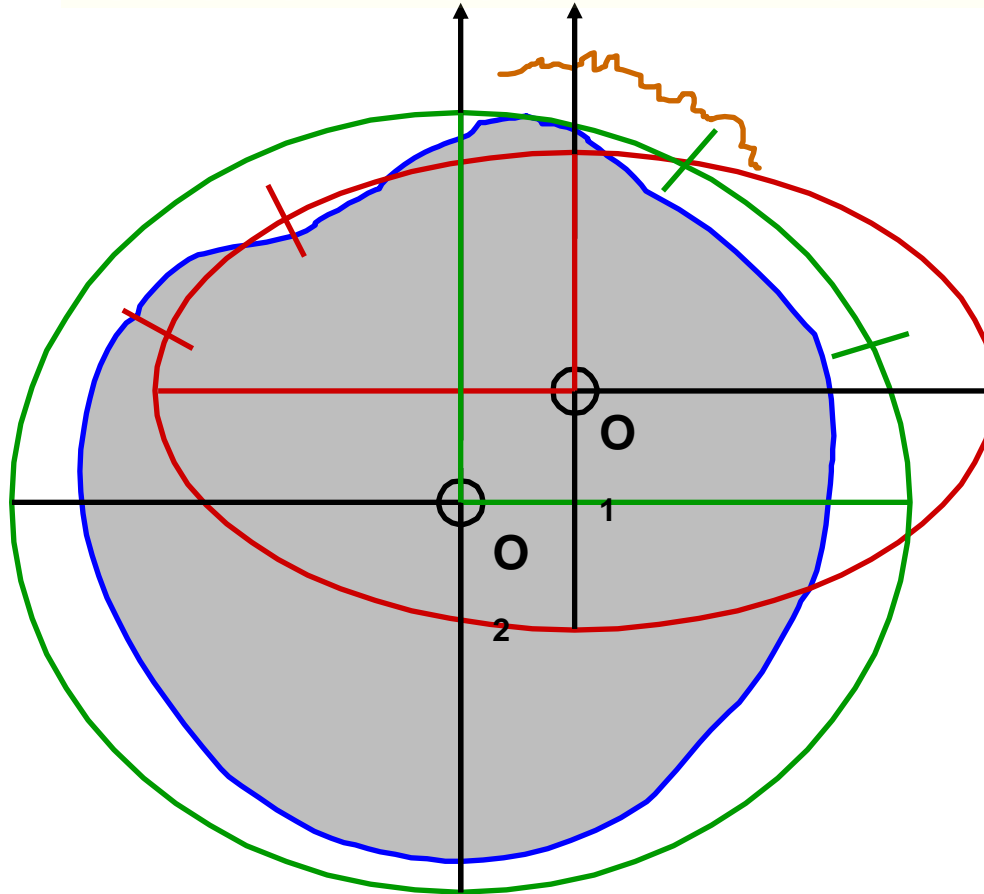
η γη προσεγγίζεται με ελλειψοειδές



Εικόνα 7

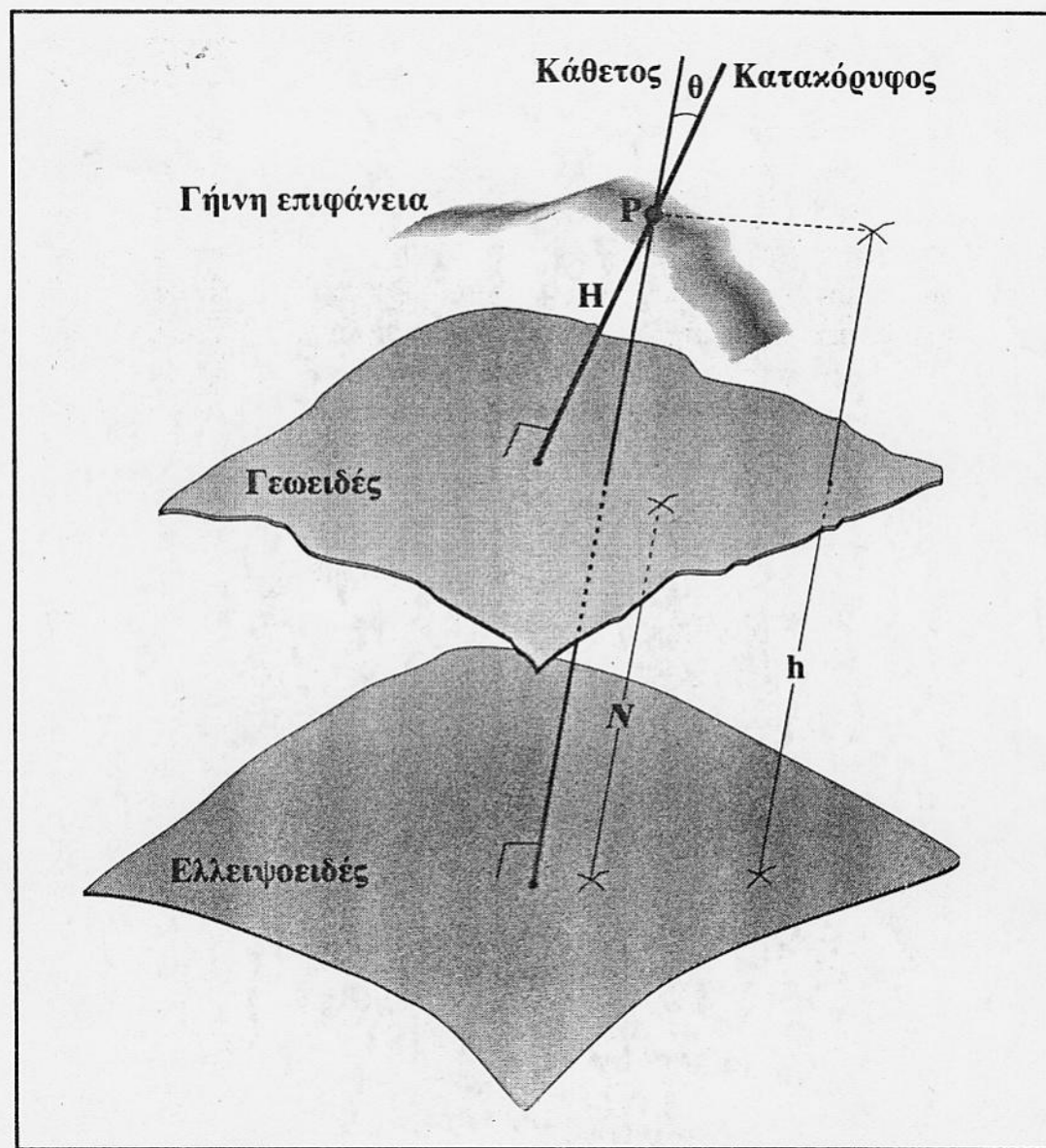
2η προσέγγιση

η γη προσεγγίζεται με σφαίρα



Εικόνα 8

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ – ΚΑΘΕΤΟΣ & ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΣ

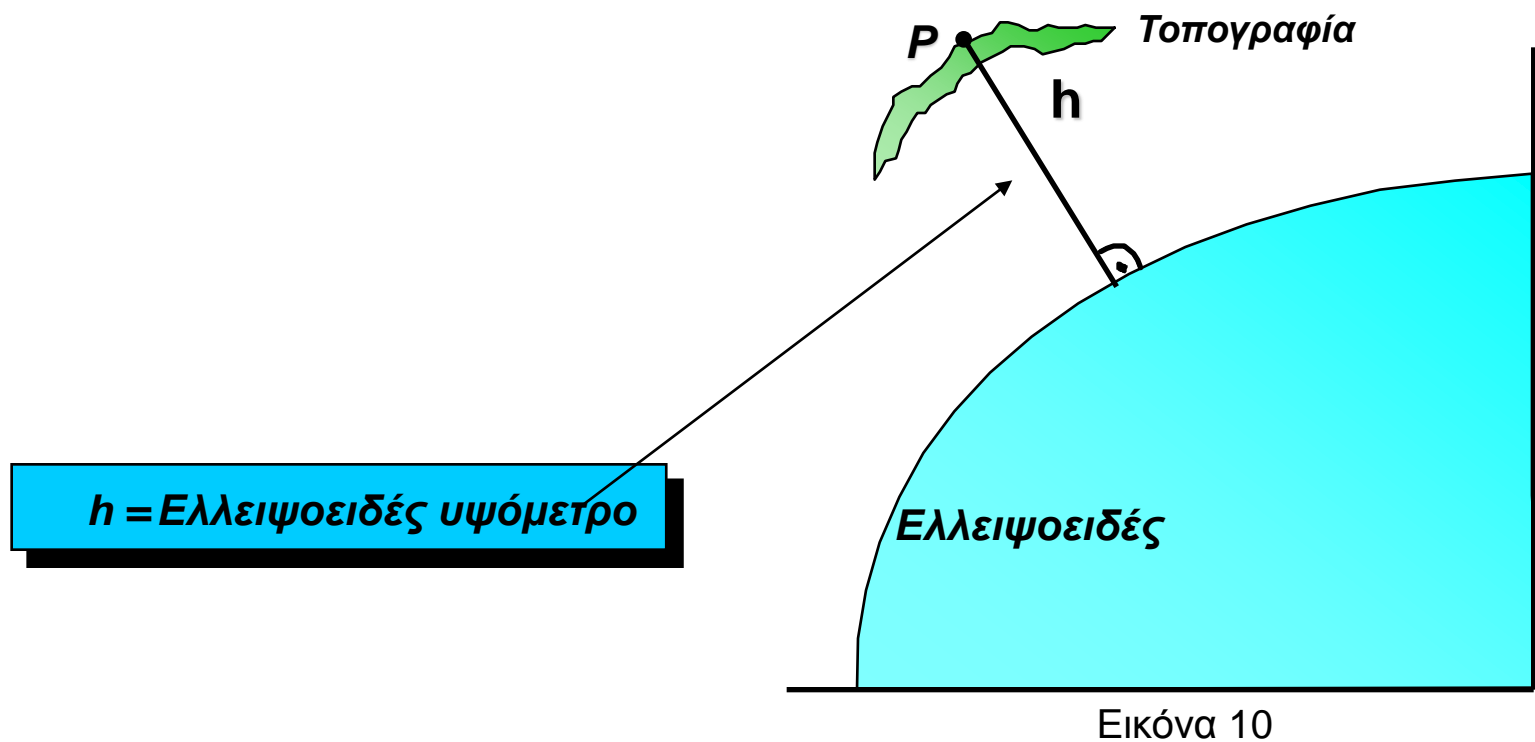


$$h = H + N$$

Εικόνα 9

Υψομετρία

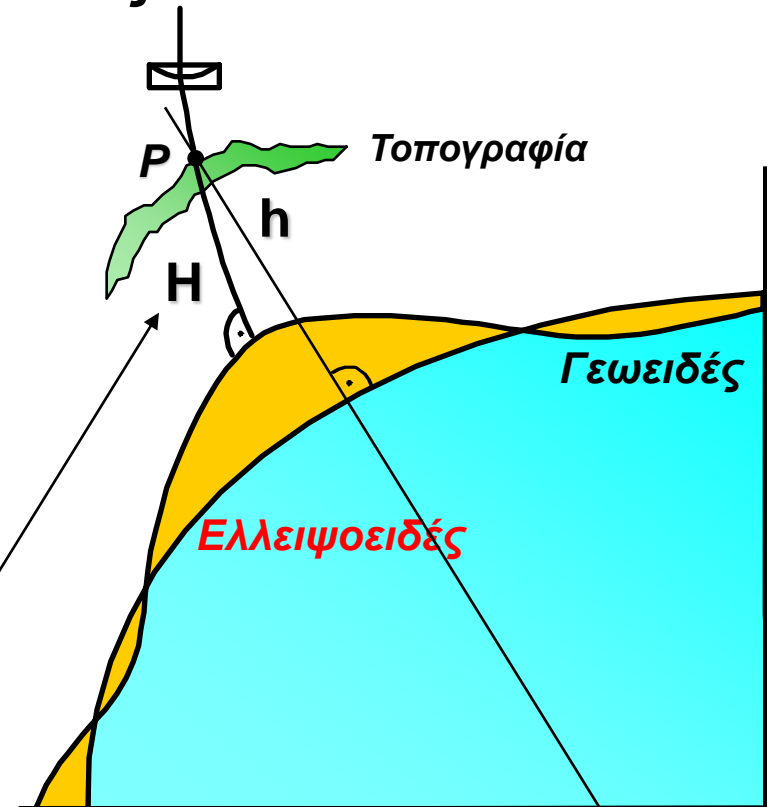
- h προσδιορίζονται με GPS



Υψομετρία

- Το γεωειδές είναι ισοδυναμική επιφάνεια που συμπίπτει με Μέση Στάθμη Θάλασσας – Μ.Σ.Θ.
- Οι διακυμάνσεις του γεωειδούς οφείλονται σε επιδράσεις της τοπογραφίας, γεωλογίας κ.λπ.
- Τα ορθομετρικά υψόμετρα αναφέρονται τυπικά σε ένα Datum που συμπίπτει με τη Μέση Στάθμη της Θάλασσας
- Μ.Σ.Θ. \equiv Γεωειδές

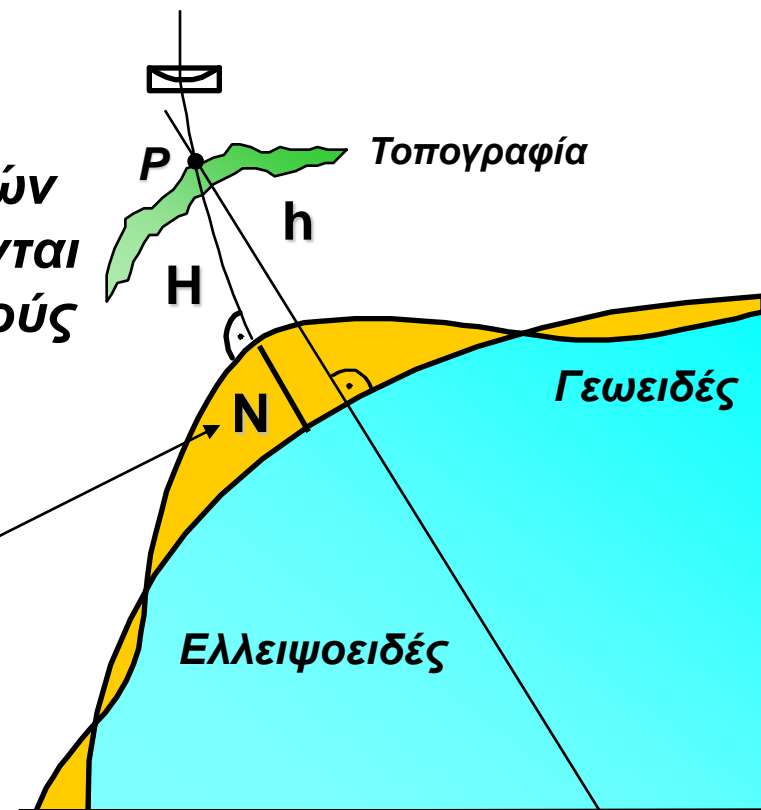
H = υψόμετρο από γεωειδές
(~ορθομετρικό υψόμετρο)



Εικόνα 11

Υψομετρία

- Η διαφορά ανάμεσα σε γεωειδές και ελλειψοειδές ονομάζεται **διακύμανση του γεωειδούς (υψόμετρο γεωειδούς)**
- Για τον υπολογισμό ορθομετρικών υψομέτρων πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τα υψόμετρα του γεωειδούς

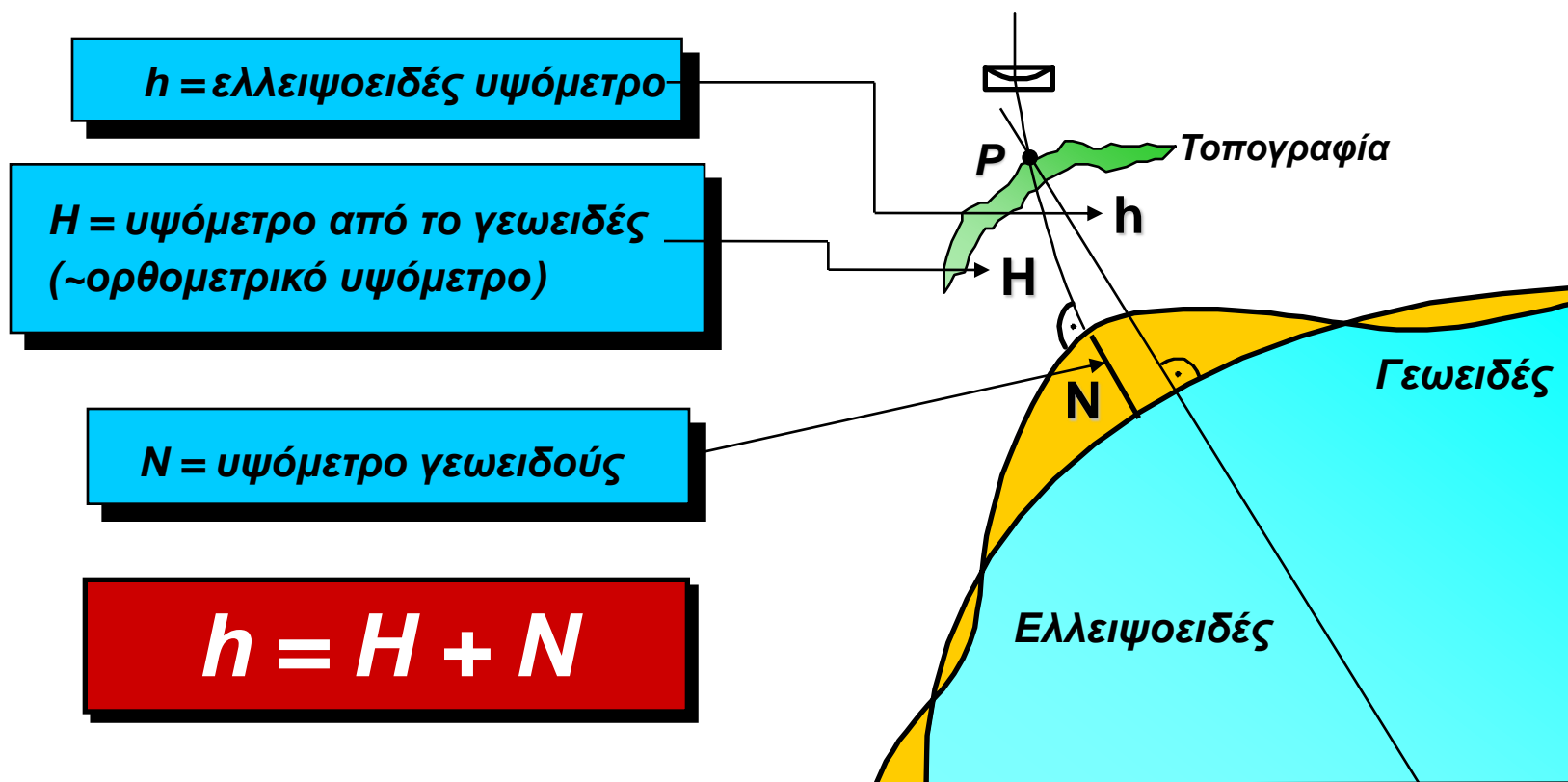


$N =$ υψόμετρο γεωειδούς

Εικόνα 12

Υψομετρία

- Το υψόμετρο του γεωειδούς μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό



Εικόνα 13

ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (r, θ, λ)

r γεωκεντρική απόσταση

$$\vartheta = 90^\circ - \bar{\varphi}$$

$\bar{\varphi}$ γεωκεντρικό πλάτος

$$\tan \bar{\varphi} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \tan \varphi$$

φ ελλειψοειδές γεωγραφικό πλάτος

Διάνυσμα θέσης

$$r = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda \\ \sin \theta \sin \lambda \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

ΤΟΠΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

Γεωμετρία σε τοπική κλίμακα – τοπικά συστήματα συντεταγμένων

Άξονας z συμπίπτει με διεύθυνση κατακορύφου
(κατευθύνεται στο ναδίρ / διεύθυνση διανύσματος g της βαρύτητας)

x, y τοπικό σύστημα, x κατευθύνεται στο βορρά (αστρονομικός μεσημβρινός)
και y στην ανατολή

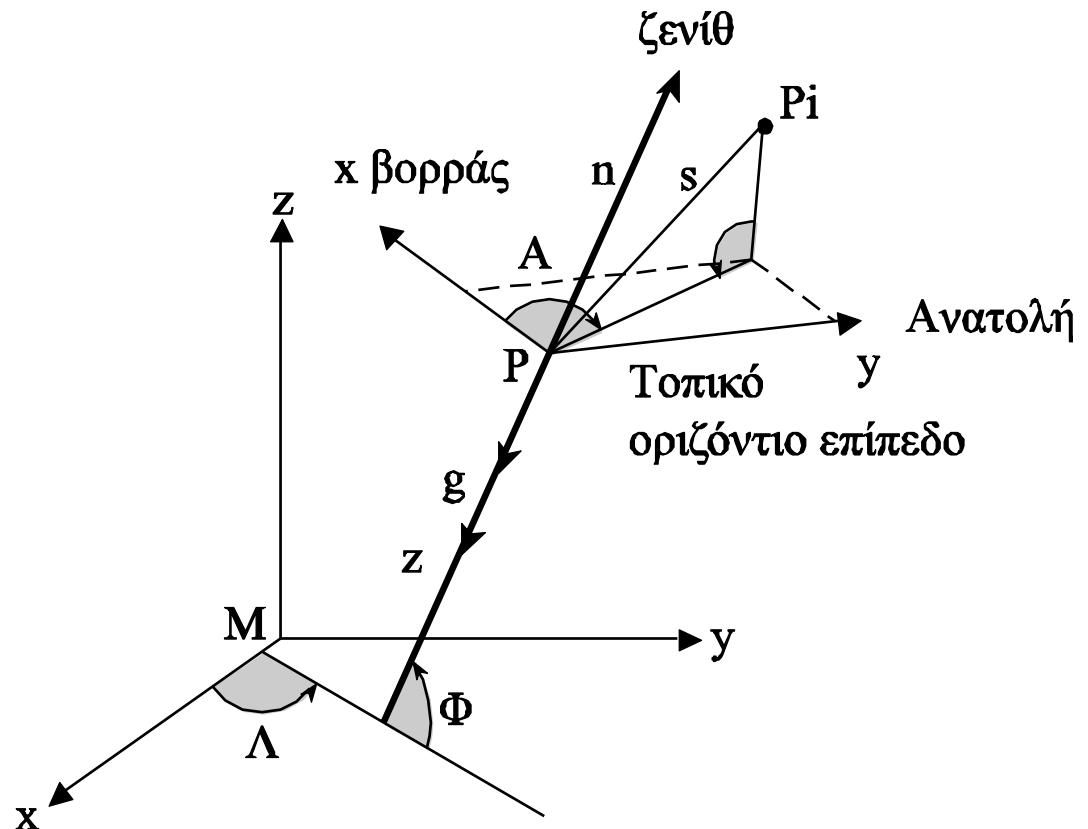
Φ αστρονομικό πλάτος

Λ αστρονομικό μήκος

A αστρονομικό αζιμούθιο

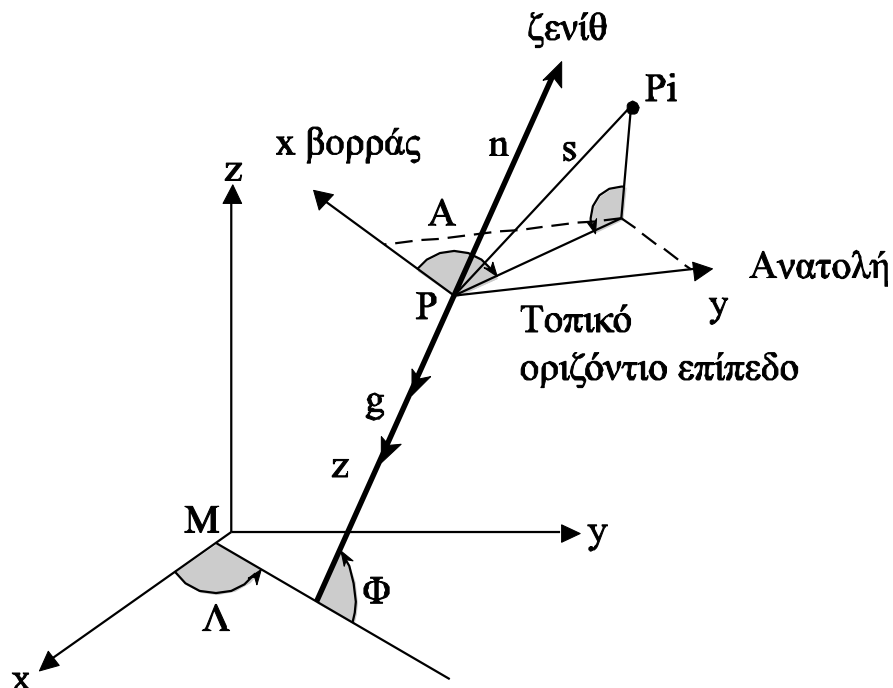
↓
Γεωδαιτικής Αστρονομίας

↓
Ακρίβειες $0.1'' - 1''$



Εικόνα 14

ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ g



Εικόνα 15

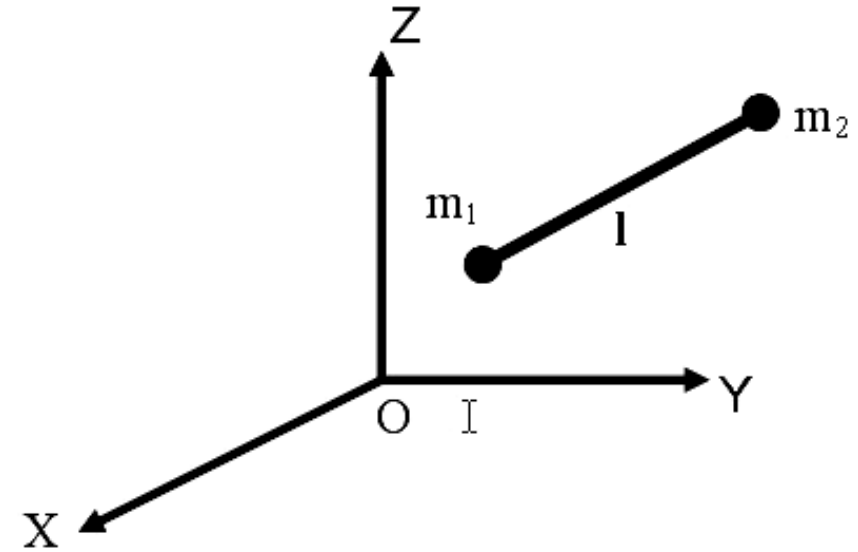
$$g = -gn = -g \begin{pmatrix} \cos\Phi \cos\Lambda \\ \cos\Phi \sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{pmatrix}$$

n το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου

ΝΕΥΤΩΝΙΟ ΠΕΔΙΟ ΕΛΞΗΣ

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2}$$

$$l = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$



Εικόνα 16

Παγκόσμια σταθερά έλξης

$$G = (6.673 \pm 0.001) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$$

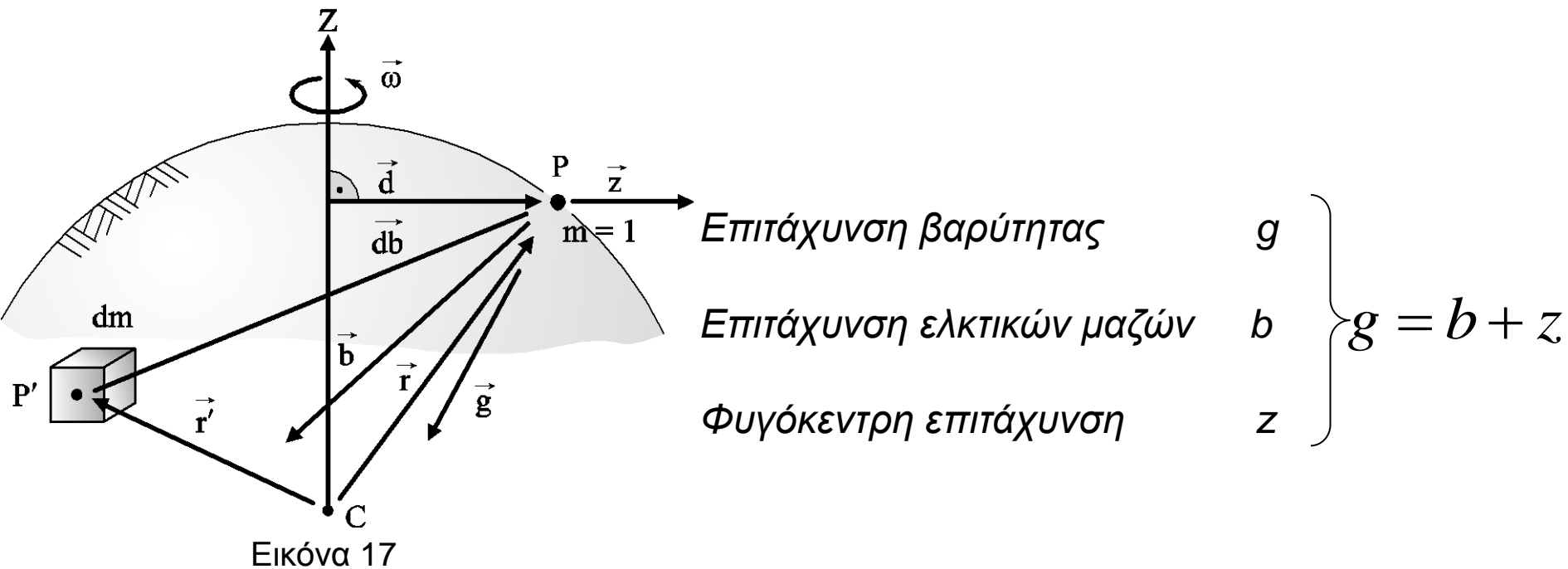
Δύναμη μεταξύ δύο σημειακών μαζών που απέχουν 1 cm είναι

$$6.673 \times 10^{-8} \text{ dyn}$$

- Η μία από τις ελκόμενες μάζες μοναδιαία
- b είναι η δύναμη που ασκεί η μάζα m στη μονάδα της μάζας που βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο απέχει απόσταση l
- Η μάζα m δημιουργεί **πεδίο ελκτικών δυνάμεων**

$$b = G \frac{m}{l^2}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ



Δύναμη της βαρύτητας $F = mg$

Ένταση της βαρύτητας $g = |g|$

(μέτρο διανύσματος, διεύθυνση της κατακορύφου)

ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΔΙΕΘΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ (SI)

Διεθνής Ένωση Γεωδαισίας και Γεωφυσικής

(International Association of Geodesy and Geophysics)

ms^{-2} μονάδα μέτρησης της βαρύτητας

$$1\mu ms^{-2} = 10^{-6} ms^{-2}$$

$$1nms^{-2} = 10^{-9} ms^{-2}$$

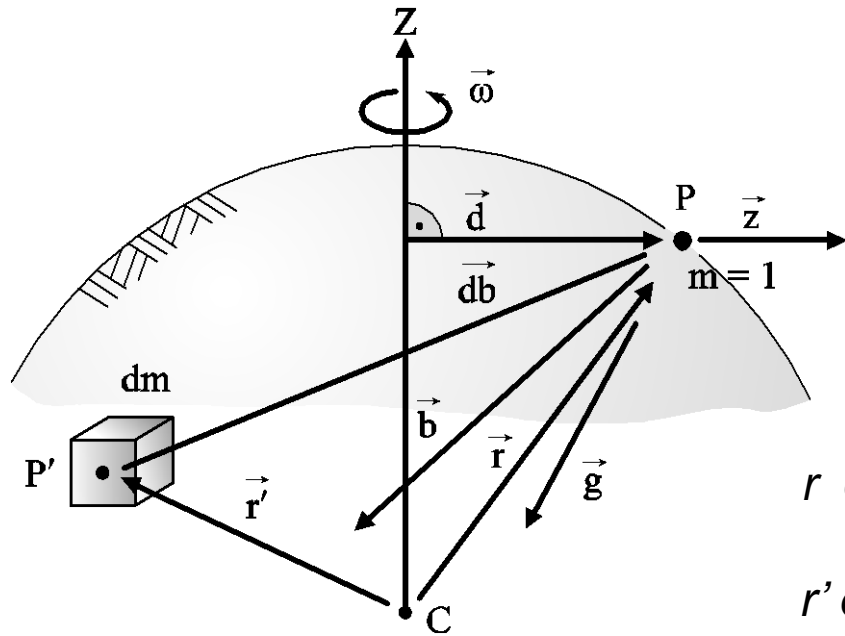
$$1 Gal = 1 cms^{-2} \quad Galileo$$

$$1mGal = 10^{-5} ms^{-2}$$

$$1\mu Gal = 10^{-8} ms^{-2}$$

SI

ΠΕΔΙΟ ΕΛΚΤΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ



Εικόνα 18

$$b(r) = G \iiint_V \frac{r' - r}{|r' - r|^3} dm$$

r διανυσματική ακτίνα θέσης ελκόμενου σημείου

r' διανυσματική ακτίνα θέσης έλκοντος σημείου

μάζες



$$dm = r dV$$



δυναμικό

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΚΤΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Πεδίο των ελκτικών δυνάμεων είναι συντηρητικό $\nabla \times b = 0$

Συνάρτηση δυναμικού $V(r)$

$$b = -\nabla V$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} V = 0$$

όπου δεν υπάρχουν μάζες δεν υπάρχει δυναμικό

$$\text{μονάδα δυναμικού } m^2 s^2$$

Ανάλογες σχέσεις για το φυγόκεντρο δυναμικό

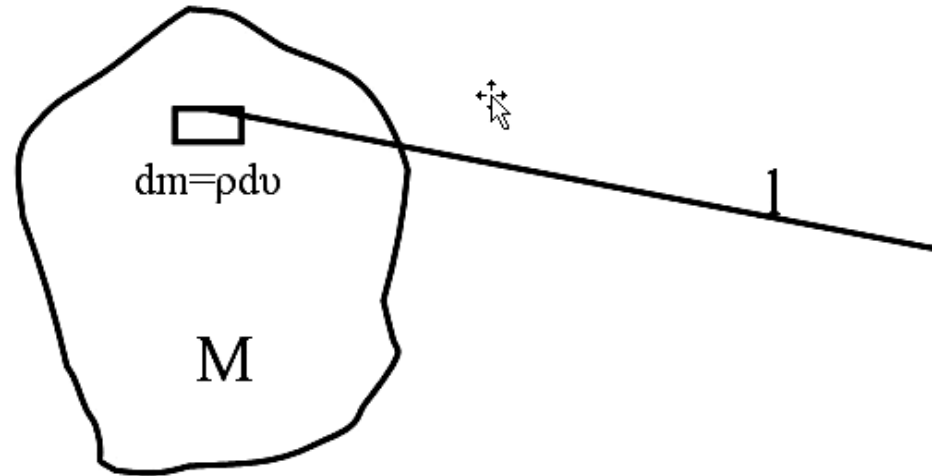
$$\nabla \times \mathbf{z} = 0 \quad \text{φυγόκεντρο πεδίο, συντηρητικό πεδίο}$$

$$\mathbf{z} = \nabla Z \quad \text{φυγόκεντρο δυναμικό}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} Z = 0$$

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΚΤΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

$$V(r) = G \iiint_{\upsilon} \frac{\rho(r')}{|r'-r|} d\upsilon$$



Εικόνα 19

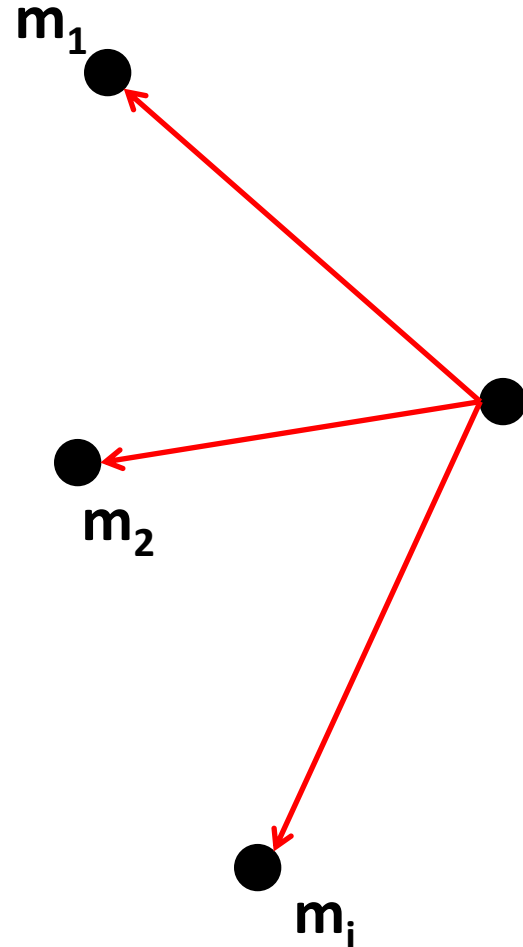
$$V = k \iiint_{\upsilon} \frac{dm}{r} = k \iiint_{\upsilon} \frac{\rho}{r} d\upsilon$$

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ

Το δυναμικό έλξης σε κάποιο σημείο του χώρου θα είναι:

$$V = k \frac{m}{l}$$

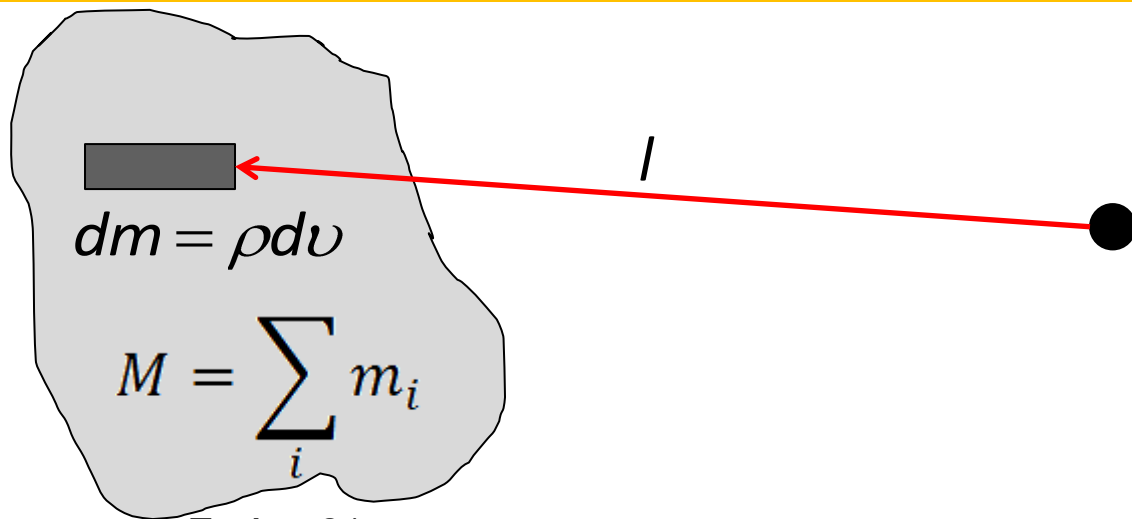
$$V = k \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i}$$



Εικόνα 20

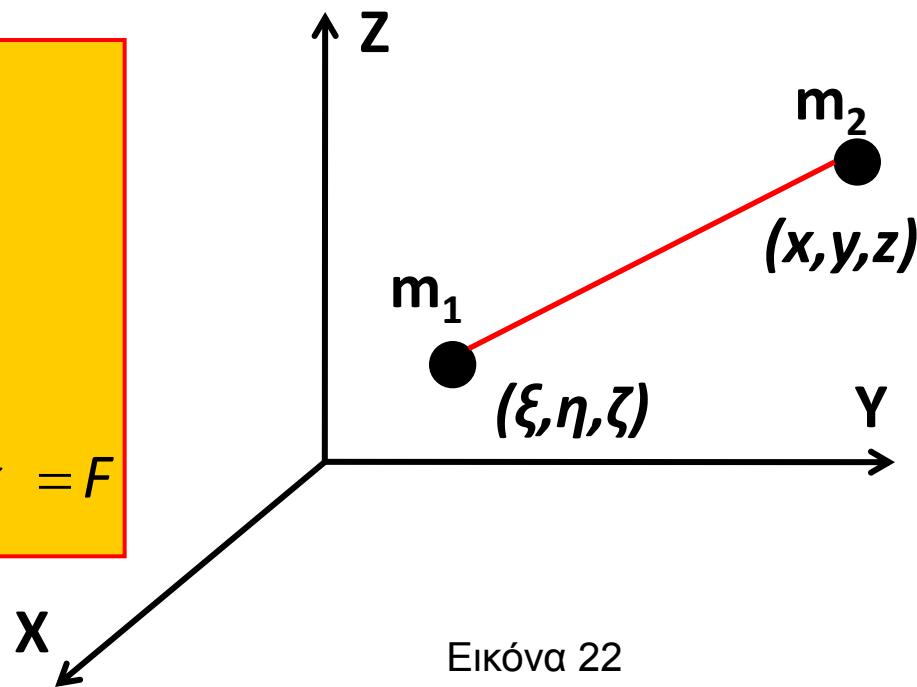
ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ

$$V = k \iiint_v \frac{dm}{l} = k \iiint_v \frac{\rho}{l} dv$$



Εικόνα 21

$$\begin{aligned} \text{grad}V &= \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k = \\ &= \frac{\partial V}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial z} k = \\ &= -\frac{km}{l^3} (x - \xi) i + (y - \eta) j + (z - \zeta) k = F \end{aligned}$$



Εικόνα 22

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΓΗΣ

$$V = \frac{GM}{R}$$

για σημεία επί της σφαιρικής Γης (ακτίνας R)

$$V = \frac{GM}{r}$$

για σημεία εκτός της σφαιρικής Γης ($r > R$)

Για $GM = 398.6 \times 10^{12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ $R = 6371 \text{ km}$

$$V = 6.27 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \quad b = 9.82 \text{ m s}^{-2}$$

$$Z(r) = \frac{\omega^2}{2} d^2 \quad \text{φυγόκεντρο δυναμικό}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

$$W(r) = V(r) + Z(r)$$

$$g = \nabla W = \frac{\partial W}{\partial X} i + \frac{\partial W}{\partial Y} j + \frac{\partial W}{\partial Z} k$$

$$g^T = [W_X, W_Y, W_Z]$$

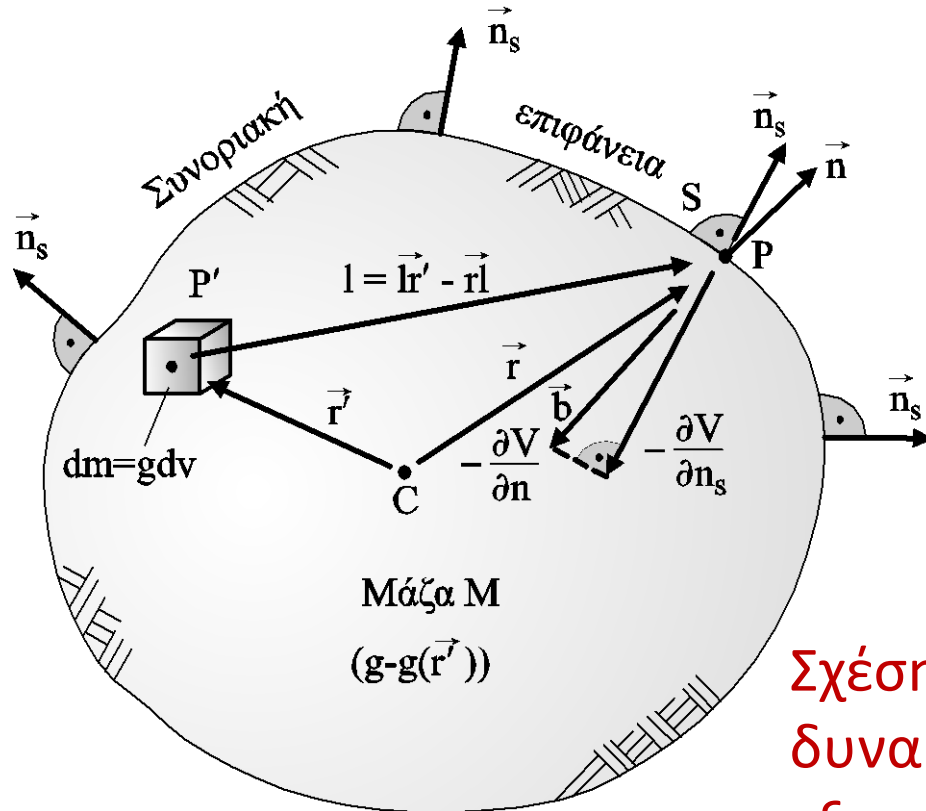
$$W_X = \partial W / \partial X, \quad W_Y = \partial W / \partial Y, \quad W_Z = \partial W / \partial Z$$

$$\nabla \times g = \nabla \times \nabla W = 0$$

$$W_{XY} = W_{YX}, \quad W_{XZ} = W_{ZX}, \quad W_{YZ} = W_{ZY}$$

$$W_{XY} = \partial^2 W / \partial X \partial Y \quad \dots\dots$$

➤ Έννοια της συνοριακής επιφάνειας



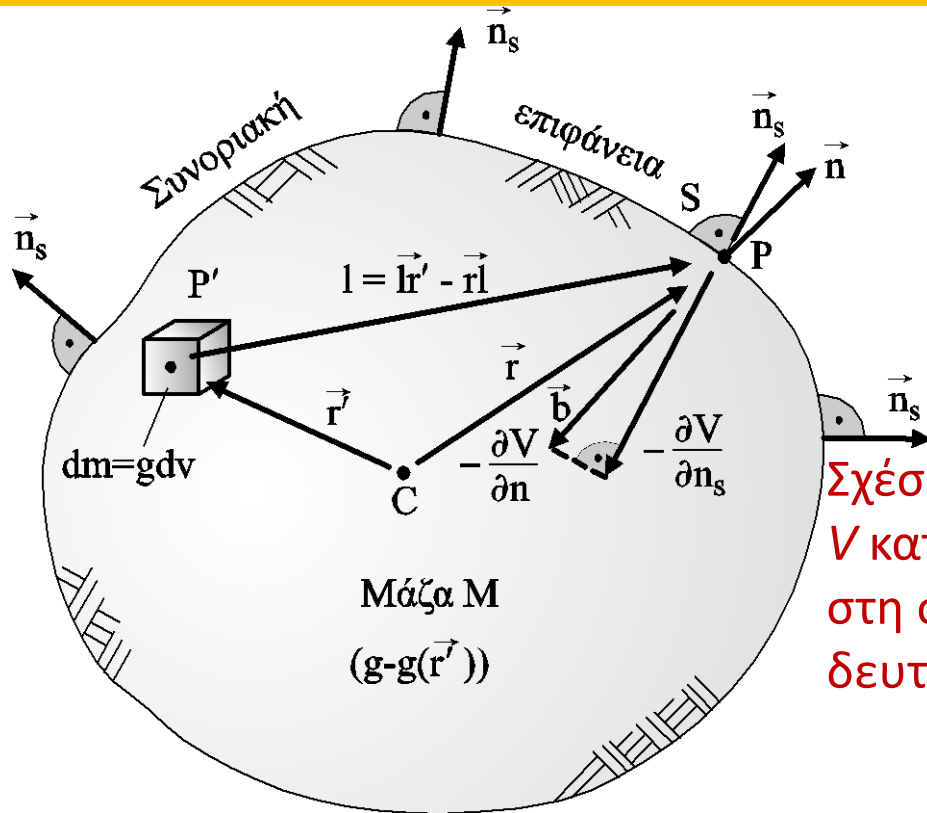
Εικόνα 23

Θεώρημα Gauss

$$\iint_S \frac{\partial V}{\partial n_s} dS = \iiint_U \Delta V du$$

Σχέση ανάμεσα στην παράγωγο του δυναμικού V κατά τη διεύθυνση της εξωτερικής καθέτου n_s στη συνοριακή επιφάνεια S και της παραγώγου δευτέρας τάξης του δυναμικού

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΚΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ



Θεώρημα Gauss

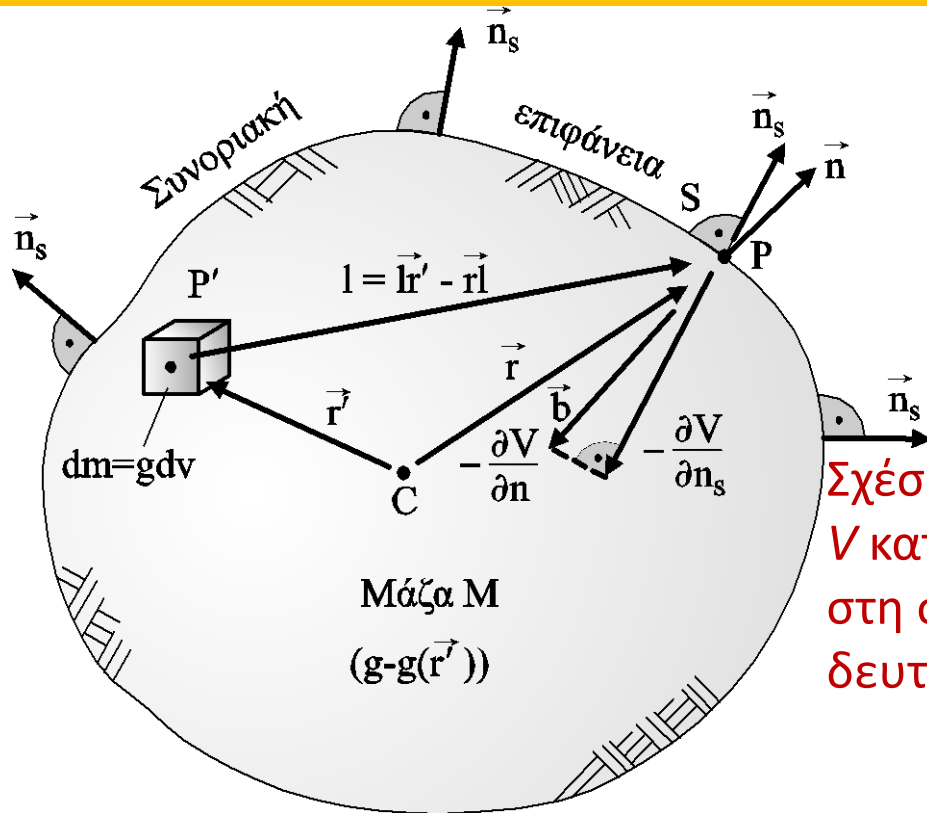
$$\iint_S \frac{\partial V}{\partial n_s} dS = \iiint_U \Delta V du$$

Σχέση ανάμεσα στην παράγωγο του δυναμικού V κατά τη διεύθυνση της εξωτερικής καθέτου n_s στη συνοριακή επιφάνεια S και της παραγώγου δευτέρας τάξης του δυναμικού

Δηλώνει (απλά) ότι οι μάζες είναι οι πηγές του βαρυτικού πεδίου και ότι η δύναμη των πηγών αυτών

$$\begin{aligned} \text{grad}V = \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k = \\ &= -\frac{km}{l^3} (x-\xi) i + (y-\eta) j + (z-\zeta) k = F \end{aligned}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΚΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ



Θεώρημα Gauss

$$\iint_S \frac{\partial V}{\partial n_s} dS = \iiint_U \Delta V du$$

Σχέση ανάμεσα στην παράγωγο του δυναμικού V κατά τη διεύθυνση της εξωτερικής καθέτου n_s στη συνοριακή επιφάνεια S και της παραγώγου δευτέρας τάξης του δυναμικού

Δηλώνει (απλά) ότι οι μάζες είναι οι πηγές του βαρυτικού πεδίου και ότι η δύναμη των πηγών αυτών είναι ανάλογη της πυκνότητας των μαζών ρ (ροή της βαρύτητας δια μέσου της επιφάνειας S)

Εξίσωση **Poisson** στο χώρο εντός των ελκυστών μαζών:

$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -4\pi k\rho$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΛΚΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

$$M = \iiint_{\upsilon} \rho \mathbf{e}' d\upsilon$$

$$\iint_S \frac{\partial V}{\partial n_s} = -4\pi GM$$

Θεωρία δυναμικού

$$\Delta V = -4\pi G\rho(r')$$

Εξίσωση Poisson, ισχύει για το εσωτερικό των μαζών
(εσωτερικό συνοριακής επιφάνειας)

$$\Delta V = 0 = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}$$

Εξίσωση Laplace
(για το χώρο εκτός των μαζών)

ΓΗΙΝΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Laplace & Poisson

$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Εξίσωση **Laplace**:

$$\Delta V = 0$$

Στο χώρο έξω από τις έλκουσες μάζες – πυκνότητα σταθερή
(έξω από τη συνοριακή επιφάνεια)

Εξίσωση **Poisson**:

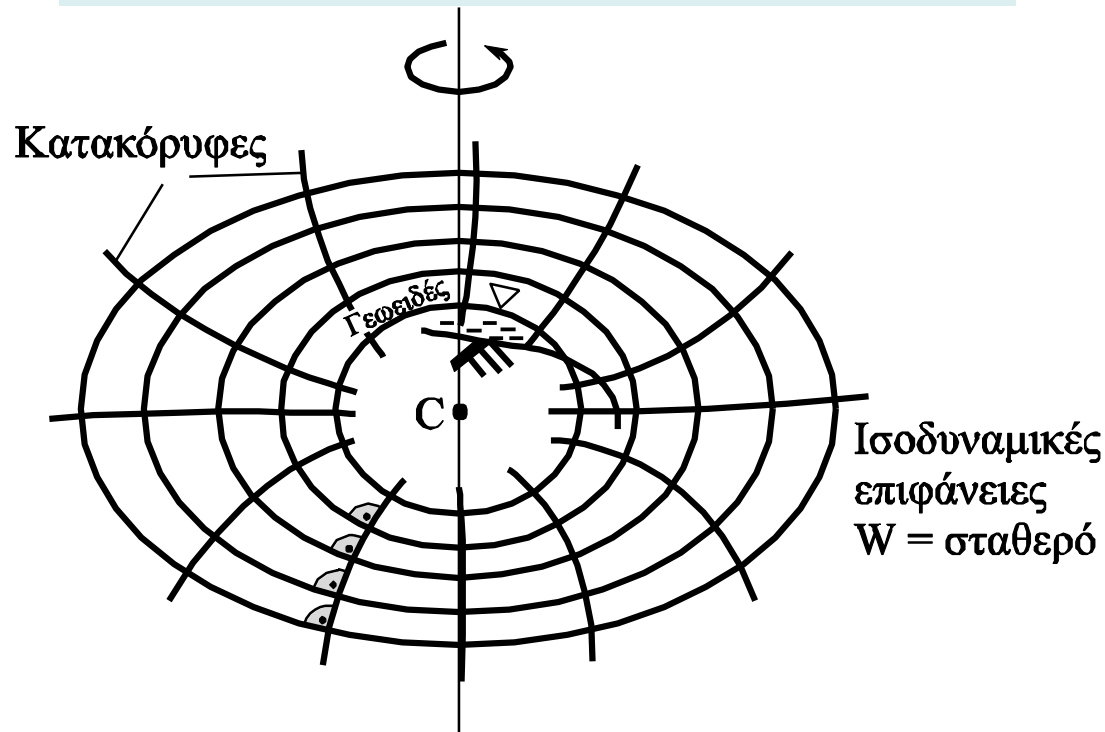
$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k\rho$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΕΛΚΤΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

- Στο χώρο εκτός των μαζών το V και οι παράγωγοι $1^{\text{ης}}$ και $2^{\text{ης}}$ τάξης είναι πεπερασμένες και συνεχείς συναρτήσεις
- Το δυναμικό σύμφωνα με την εξίσωση του Laplace είναι **αρμονική συνάρτηση** και επομένως μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά
- Μέσα στις μάζες το V και οι παράγωγοι $1^{\text{ης}}$ τάξης είναι συνεχείς συναρτήσεις. Κάποιες από τις παραγώγους $2^{\text{ης}}$ τάξης παρουσιάζουν ασυνέχειες λόγω απότομων μεταβολών της πυκνότητας λόγω της διαφορικής εξίσωσης του Poisson
- Επάνω στη συνοριακή επιφάνεια το V και οι παράγωγοι $1^{\text{ης}}$ τάξης είναι συνεχείς και πεπερασμένες συναρτήσεις. Οι παράγωγοι δεύτερης τάξης παρουσιάζουν ασυνέχεια λόγω της διαφορικής εξίσωσης του Poisson

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

Ισοδυναμικές γραμμές και κατακόρυφοι



Εικόνα 24

$$W(r) = \text{σταθερό}$$

ισοδυναμικές ή χωροσταθμικές επιφάνειες

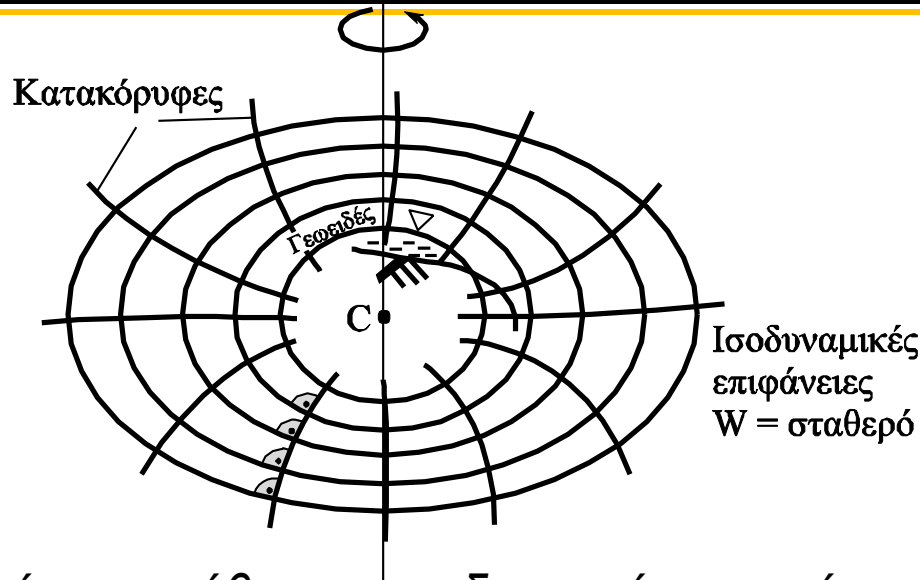
$$dW = g \bullet dr = gdr \cos(g, dr)$$

μεταβολή θέσης και δυναμικό – παραγωγή έργου

$$dW = 0$$

επιφάνεια ισορροπίας – μηδενικό έργο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

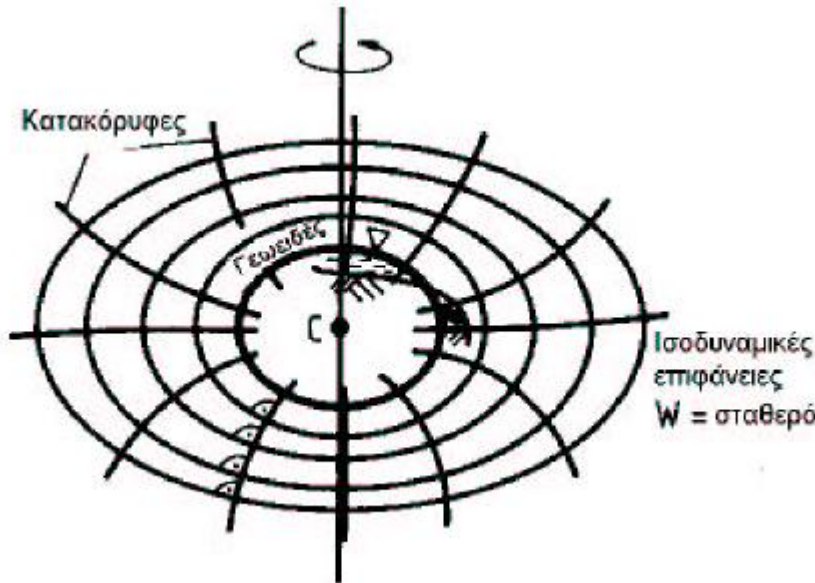


- Οι κατακόρυφες τέμνουν κάθετα τις ισοδυναμικές γραμμές
- Όταν dr συμπίπτει με την κατακόρυφο (εξωτερική κάθετος n της επιφάνειας)
 $\cos(g, dr) = -1$

και επομένως $dW = -gdn$

- Αύξηση της τιμής της βαρύτητας \longrightarrow σύγκλιση ισοδυναμικών γραμμών (οι ισοδυναμικές γραμμές δεν είναι παράλληλες)
- Η ισοδυναμική επιφάνεια που προσεγγίζει βέλτιστα τη μέση στάθμη της θάλασσας καλείται γεωειδές

ΒΑΘΜΙΔΕΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ



Βαθμίδες βαρύτητας

$$g^T = -gn^T = \left(W_X, W_Y, W_Z \right)^T$$

$$W_X = \partial W / \partial X \dots\dots\dots$$

$$\nabla \cdot g = \nabla \cdot \left(\nabla W \right) = \begin{pmatrix} W_{XX} & W_{XY} & W_{XZ} \\ W_{YX} & W_{YY} & W_{YZ} \\ W_{ZX} & W_{ZY} & W_{ZZ} \end{pmatrix}$$

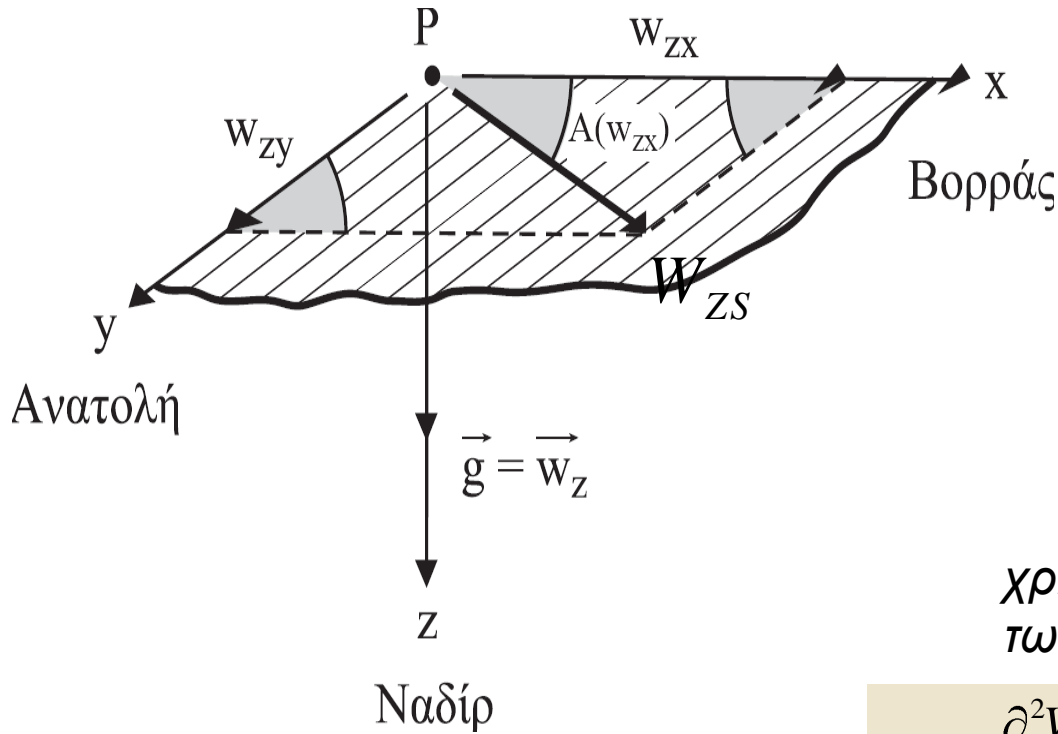
τανυστής βαθμίδων βαρύτητας
(τανυστής Eotvos)

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k\rho$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2\omega^2$$

$$W_{XX} + W_{YY} + W_{ZZ} = -4\pi G\rho + 2\omega^2$$

ΒΑΘΜΙΔΕΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ



κάθετη συνιστώσα

χρήσιμη για την αναγωγή και ερμηνεία των δεδομένων βαρύτητας

$$W_{zz} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial g}{\partial z} = - \left(W_{xx} + W_{yy} \right) - 4\pi G\rho + 2\omega^2$$

μέση καμπυλότητα των ισοδυναμικών επιφανειών

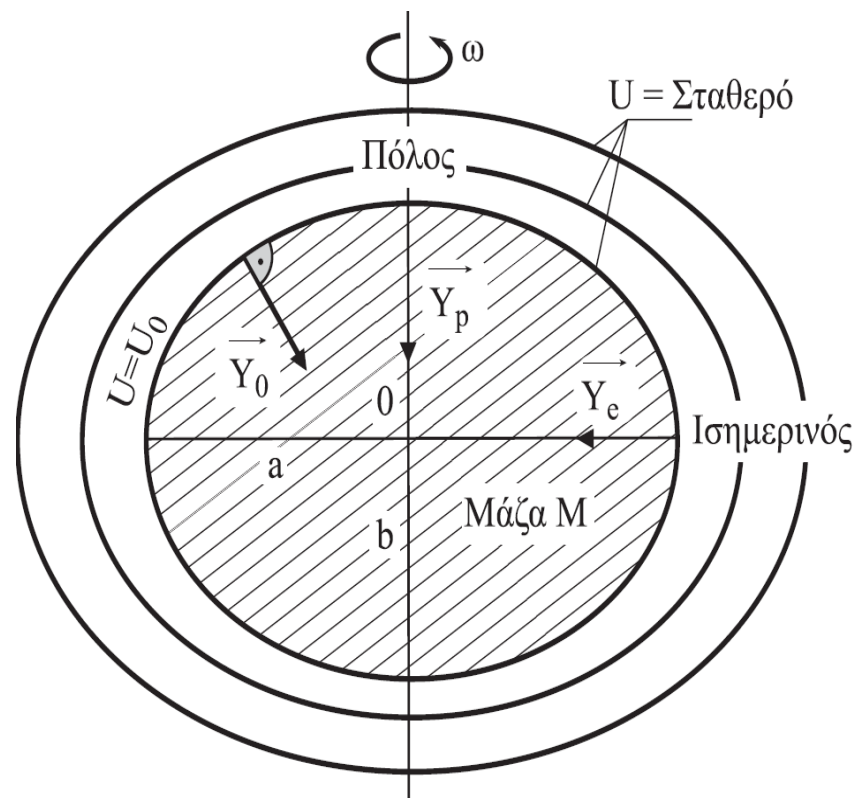
$$J = - \frac{1}{2g} \left(W_{xx} + W_{yy} \right)$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Βέλτιστες προσεγγίσεις του πραγματικού πεδίου βαρύτητας
- Τοπικά μοντέλα επίπεδες προσεγγίσεις
- Παγκόσμια ή σφαιρικά μοντέλα αναπτύγματα σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων
- Χωροσταθμική επιφάνεια – χωροσταθμικό σφαιροειδές (*level spheroid*)
(εφαρμογές στη γεωδαισία, γεωδυναμική, γεωεπιστήμες γενικότερα, πλοήγηση, ...)
- Το κανονικό πεδίο πρέπει να προσεγγίζει το πραγματικό με τέτοιο τρόπο ώστε οι διαφορές να ερμηνεύονται με γραμμικές σχέσεις
- Το κανονικό πεδίο (μοντέλο) πρέπει να είναι συμβατό με ένα μοντέλο κατανομής πυκνοτήτων στο εσωτερικό της Γης (γεωφυσικές ερμηνείες)

ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΙΚΟ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ

- Ελλειψοειδές εκ περιστροφής, μάζα M (μοντέλο Γης) γωνιακή ταχύτητα ω (ισοδυναμική επιφάνεια πεδίου βαρύτητας, συμμετρία ως προς άξονα Z)



Εικόνα 26

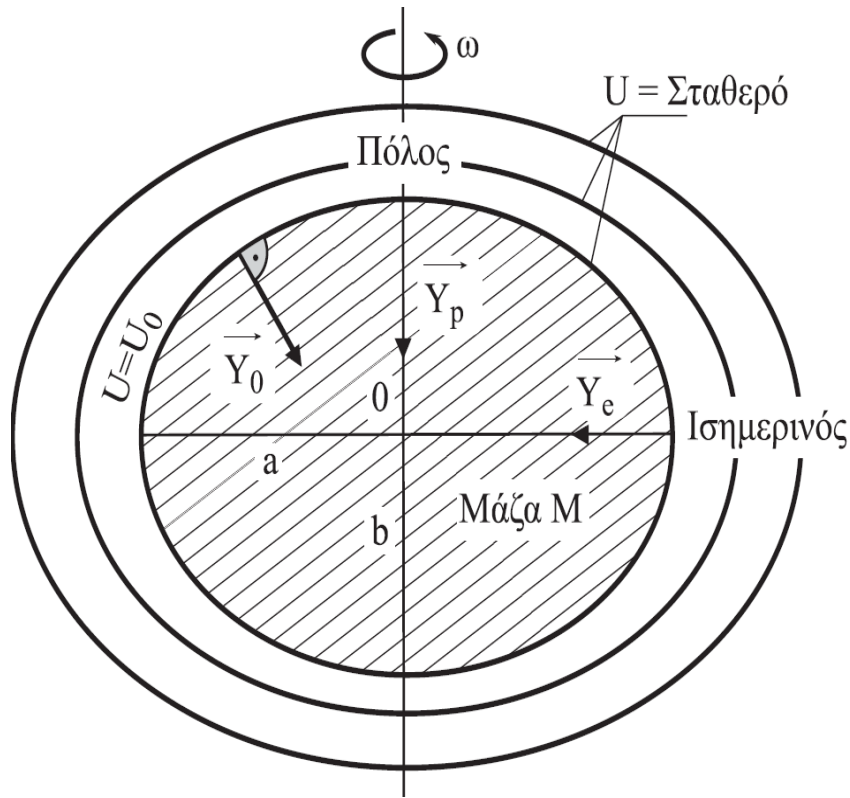
Επιπλάτυνση

$$f = \frac{a - b}{a}$$

- Εξωτερικό πεδίο βαρύτητας ορίζεται με a, f, M, ω περιγράφεται με $U(r)$

ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΙΚΟ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ & ΣΦΑΙΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ

Σφαιροδυναμικές επιφάνειες – κανονική βαρύτητα



➤ Σφαιροδυναμικές επιφάνειες

$$U(r) = \text{σταθερό}$$

Είναι αντίστοιχες με τις ισοδυναμικές

(δεν είναι ελλειψοειδή)

Ελλειψοειδές είναι μόνο το

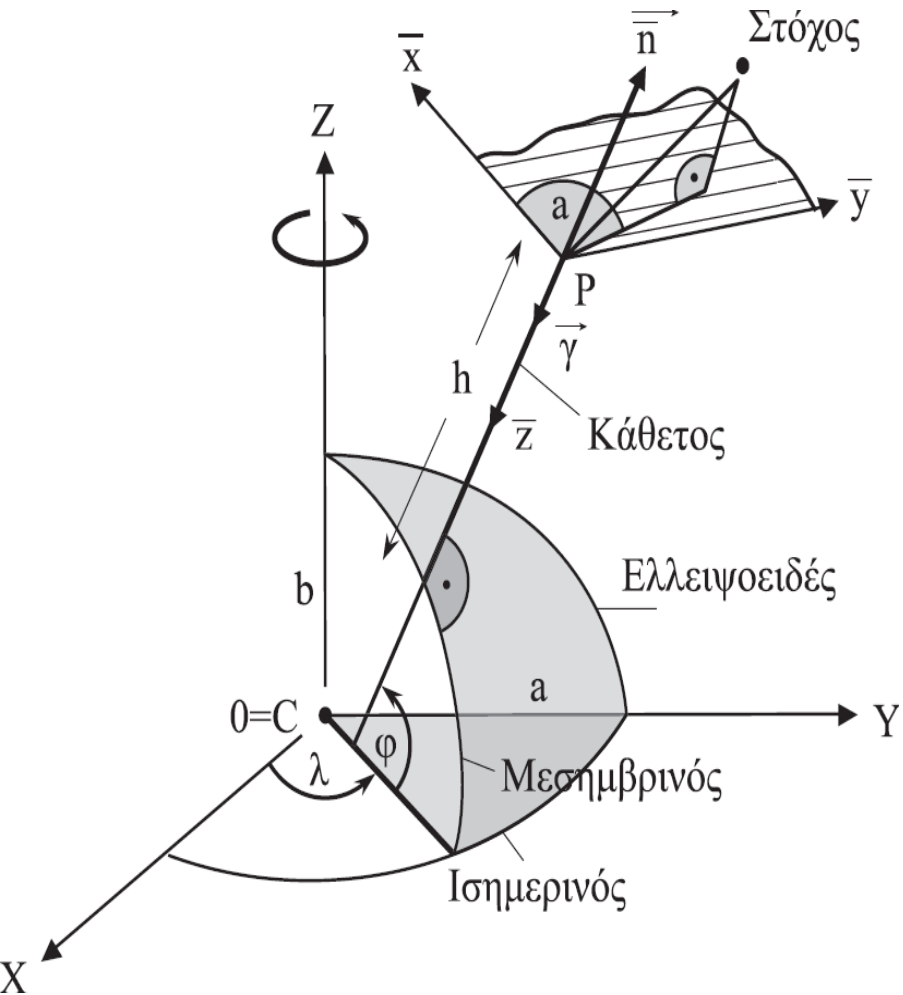
χωροσταθμικό ελλειψοειδές

$$U(r) = U_0$$

Για το ελλειψοειδές μόνη αναγκαία υπόθεση η κατανομή κατά στρώματα της πυκνότητας (αύξηση από την επιφάνεια προς το κέντρο)

γεωφυσική ερμηνεία

ΕΛΛΙΠΣΟΕΙΔΕΙΣ & ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Εικόνα 27

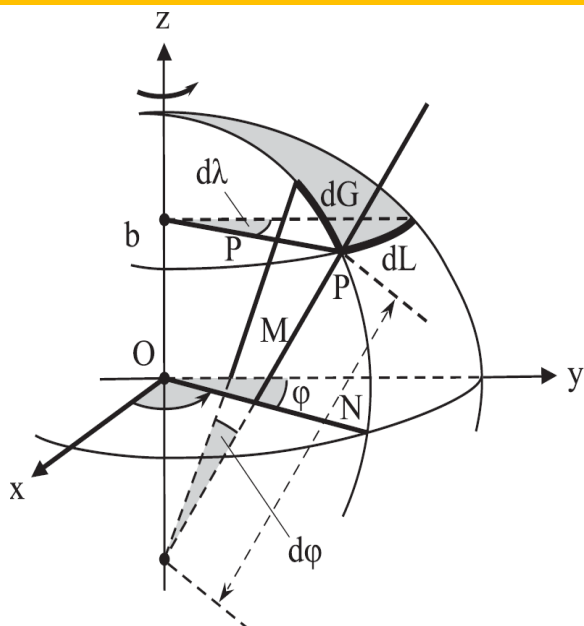
φ = ελλειψοειδές γεωγραφικό πλάτος

λ = ελλειψοειδές γεωγραφικό μήκος

h = ελλειψοειδές ύψος

$$\tan \bar{\varphi} = \left(\frac{b}{a} \right)^2 \tan \varphi$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ



Εικόνα 28

$$M = \frac{a \sqrt{-e^2}}{\sqrt{-e^2 \sin^2 \varphi}}^{3/2}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{-e^2 \sin^2 \varphi}}^{1/2}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

επαναλήψεις $h \ll N$

$$\varphi = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left(1 - e^2 \frac{N}{N+h} \right)^{-1}$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X}$$

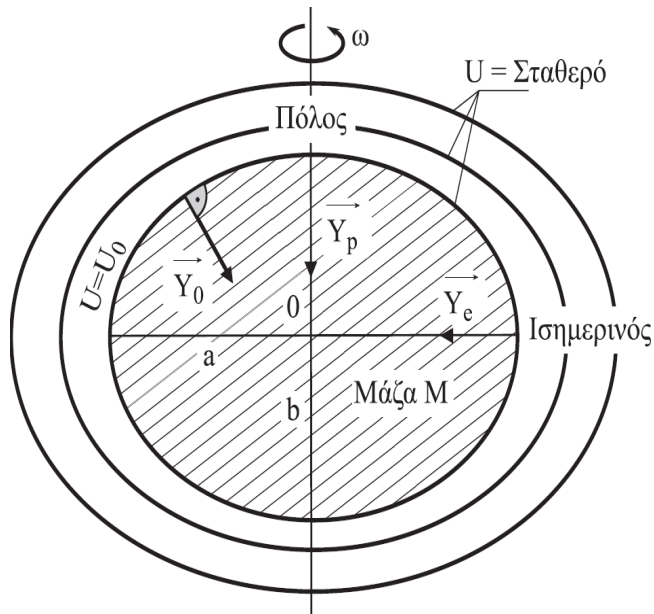
$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N$$

$$r = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \sqrt{-e^2} [N+h] \sin \varphi \end{pmatrix}$$

διάνυσμα θέσης σημείου P

$$r = a \sqrt{-f \sin^2 \varphi} \quad (\text{επί του ελλειψοειδούς})$$

ΤΟ ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ



Εικόνα 29

κανονική βαρύτητα
(μοντέλο)

$$\gamma = \nabla U$$

βαρύτητα
("πραγματική")

$$g = \nabla W$$

κανονική βαρύτητα επί ελλειψοειδούς
τύπος Somigliana

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 \varphi + b\gamma_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi}}$$

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2 (1-f)} \left(1 - m - \frac{me' q_0'}{6 q_0} \right)$$

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{me' q_0'}{3 q_0} \right)$$

ΤΟ ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

$$q_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{e'^2} \right) \arctan e' - \frac{3}{2e'}$$

$$q_0' = 3 \left(1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left(1 - \frac{1}{e'} \arctan e' \right) - 1$$

$$m = \omega^2 a^3 \frac{1-f}{GM}$$

$$2 \frac{\gamma_a}{a} + \frac{\gamma_b}{b} = \frac{3GM}{a^2 b} - 2\omega^2$$

$$e' = \frac{\varepsilon}{b}$$

δεύτερη αριθμητική εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$f = \frac{a-b}{a}$$

γεωμετρική πλάτυνση

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}$$

βαρυτική πλάτυνση

ΤΟ ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \vartheta) \right] + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta$$

$$J_n = -C_{n,0} \quad n \text{ άρτιος}$$



συγκλίνει γρήγορα, όροι για $n > 6$ παραλείπονται στο ανάπτυγμα

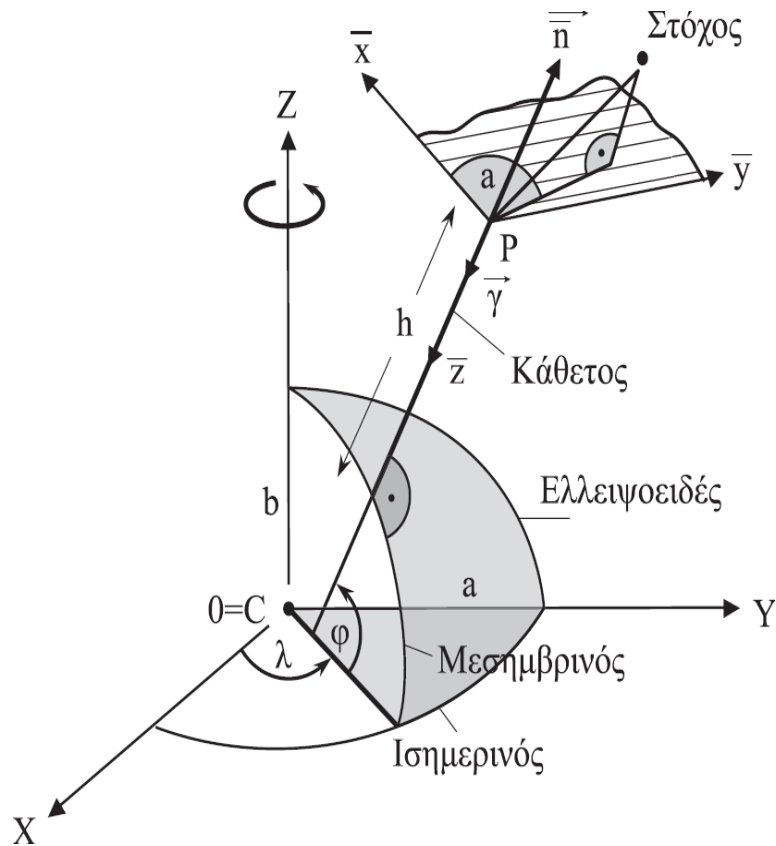
$$n=2 \quad \longrightarrow \quad P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$$



$$U = \frac{GM}{r} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2}{2GM} r^3 \sin^2 \theta \right]$$

$J_2 \longrightarrow$ δυναμικός συντελεστής μορφής της Γης

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

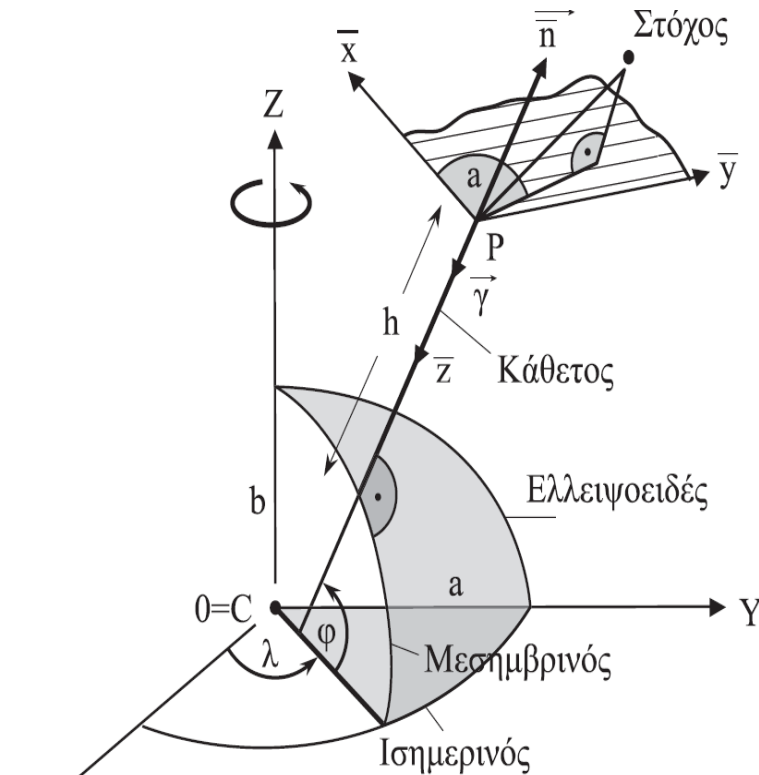


Εικόνα 30

$$\gamma^T = -\gamma \bar{n}^T = \left(U_{\bar{X}}, U_{\bar{Y}}, U_{\bar{Z}} \right)$$

$$\nabla \cdot \gamma = \nabla \cdot \left(\nabla U \right) = \begin{pmatrix} U_{\bar{X}\bar{X}} & U_{\bar{X}\bar{Y}} & U_{\bar{X}\bar{Z}} \\ U_{\bar{Y}\bar{X}} & U_{\bar{Y}\bar{Y}} & U_{\bar{Y}\bar{Z}} \\ U_{\bar{Z}\bar{X}} & U_{\bar{Z}\bar{Y}} & U_{\bar{Z}\bar{Z}} \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΑΝΩ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΙΜΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ



Κάθετη συνιστώσα της βαθμίδας της κανονικής βαρύτητας
(ελλειψοειδές)

$$U_{\bar{z}\bar{z}} = \gamma_0 \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) + 2\omega^2$$

$$\gamma(\phi, \lambda) \approx \gamma_0 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_0 h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \right)_0 h^2 + \dots$$

σε ύψος h

$\gamma_0 \longrightarrow$ από τύπο Somigliana

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h}, \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \longrightarrow U_{\bar{z}\bar{z}} = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_0$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ I

Διεθνής Ένωση Γεωδαισίας και Γεωφυσικής

Διεθνής τύπος βαρύτητας του Cassinis 1930 (Στοκχόλμη)

Ελλειψοειδές Hayford $a = 6378388 \text{ m}$ $f=1/297.0$

Τύπος κανονικής βαρύτητας του Cassinis 1930

$$\gamma_0 = 9.78049 \left(+ 0.0052884 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2\varphi \right) \text{ ms}^{-2}$$

a, f, γ_e, ω

Διεθνές σύστημα αναφοράς 1930

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ II

Γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς 1967
Geodetic Reference System 1967 – **GRS67** (Λουκέρνη)

$$a = 6378137m, \quad GM = 398603 \times 10^9 m^3 s^{-2}, \quad J_2 = 1082.7 \times 10^{-6}$$

$$\omega = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rads}^{-1}$$

$$\gamma_0 = 9.78031846 \left(+ 0.0053024 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2\varphi \right) \text{ ms}^{-2}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ III

Γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς 1980
Geodetic Reference System 1980 – **GRS80** (Καμπέρα)

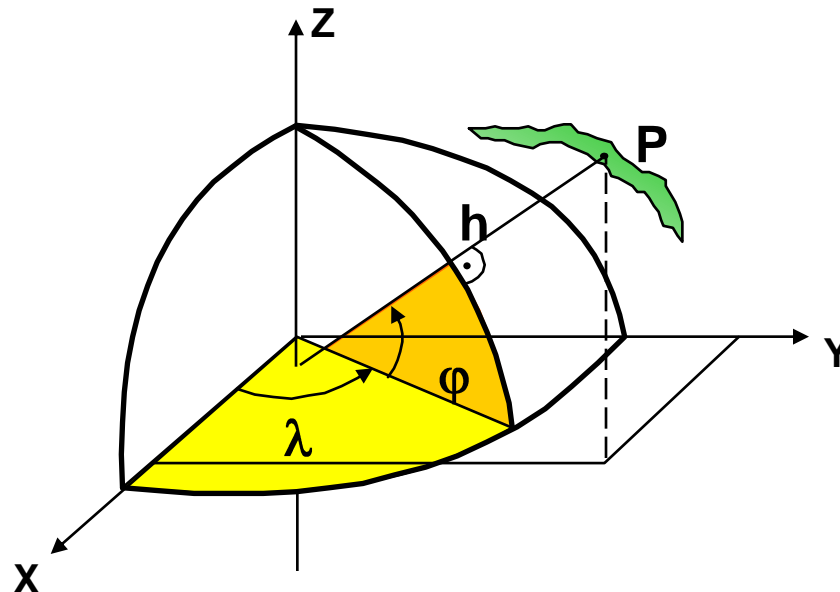
$$a = 6378137 \text{ m}, \quad GM = 398600.5 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad J_2 = 1082.63 \times 10^{-6}, \quad \omega = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

$$\gamma_0 = 9.78032677 \frac{1 + 0.001931851353 \sin^2 \varphi}{\left(-0.006694380029 \sin^2 \varphi \right)^{1/2}} \text{ ms}^{-2}$$

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Προσανατολισμός

- Ελλειψοειδές γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς
- Γεωμετρία (μεγάλος & μικρός ημιάξονας a, b , κέντρο \equiv κέντρο μάζας Γης)
- Ο άξονας Z συμπίπτει με το μέσο άξονα περιστροφής της Γης (μέση θέση πόλου 1900.0 -1906.0 Conventional International Origin – CIO)
- Ο άξονας X διέρχεται από την τομή του αστρονομικού μεσημβρινού του Greenwich (μηδενικός μεσημβρινός μηκών – Διεθνές Γραφείο Ώρας – Bureau Internationale de l'Heure - BIH)
- Ο άξονας Y συμπληρώνει ένα δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα



ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (I)

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ



ARISTOTLE UNIVERSITY OF THESSALONIKI
SCHOOL OF RURAL & SURVEYING ENGINEERING
DEPARTMENT OF GEODESY AND SURVEYING

Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας - 4^ο Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2013-2014

Θέμα στο μάθημα:

Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας

1. Δίνεται ένα σύνολο 16 τιμών της έντασης της βαρύτητας (g^{GRS80}), οι οποίες αναφέρονται στο σύστημα αναφοράς GRS80 και στο σύστημα βαρύτητας IGSN71. Οι τιμές αυτές αναφέρονται επίσης στις κορυφές ενός πλέγματος ισοδιάστασης 2arcmin. Το αρχείο δεδομένων (data.xls) περιέχει τα παρακάτω στοιχεία

α/α σημείου, φ ($^\circ$), λ ($^\circ$), g^{GRS80} (mGal), H (m), dg^{EGM08} (mGal), $dg^{GOCO02s}$ (mGal), $dg^{EIGEN6C2}$ (mGal)
 $n=250$, $dg^{EIGEN6C2}$ (mGal) $n=1949$, dg^{RTM} (mGal), N^{EGM08} (m), N^{RTM} (m)

όπου: α/α σημείου είναι ο κωδικός του σημείου

φ ($^\circ$) είναι το γεωδαιτικό πλάτος του σημείου

λ ($^\circ$) είναι το γεωδαιτικό μήκος του σημείου

g^{GRS80} (mGal) είναι η τιμή της έντασης της βαρύτητας στο GRS80 σε mGal

H (m) είναι το ορθομετρικό υψόμετρο του σημείου

dg^{EGM08} (mGal) είναι η συνεισφορά του μοντέλου EGM08 στις ανωμαλίες της βαρύτητας σε mGal

$dg^{GOCO02s}$ (mGal) είναι η συνεισφορά του μοντέλου GOCO02s στις ανωμαλίες της βαρύτητας σε mGal

$dg^{EIGEN6C2}$ (mGal) $n=250$ είναι η συνεισφορά του μοντέλου EIGEN6C2 για βαθμό ανάπτυξης $n=250$ στις ανωμαλίες της βαρύτητας σε mGal

$dg^{EIGEN6C2}$ (mGal) $n=1949$ είναι η συνεισφορά του μοντέλου EIGEN6C2 για βαθμό ανάπτυξης $n=1949$ στις ανωμαλίες της βαρύτητας σε mGal

dg^{RTM} (mGal) είναι η συνεισφορά του μοντέλου της υπολειπόμενης τοπογραφίας στις ανωμαλίες της βαρύτητας σε mGal

N^{EGM08} (m) είναι η συνεισφορά του μοντέλου EGM08 στα υψόμετρα του γεωειδούς σε m

N^{RTM} (m) είναι η συνεισφορά του μοντέλου της υπολειπόμενης τοπογραφίας στα υψόμετρα του γεωειδούς σε m

- α) Να υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές της κανονικής βαρύτητας στο GRS80 (γ^{GRS80}) για τα σημεία που δίνονται.

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (II)

| α/α | φ | λ | g | H | dg(EGM08) | dg(GOCO02s) | dg(EIGEN6C) n=250 | dg(EIGEN6C) n=1949 | dg(RTM) | N(EGM08) | N(RTM) |
|-----|-----------|-----------|------------------|------|-----------|-------------|-------------------|--------------------|---------|----------|--------|
| 1 | 40.000000 | 22.000000 | 979968.140684696 | 833 | 57.561 | 35.446 | 36.692 | 65.699 | 0.900 | 39.924 | -0.011 |
| 2 | 40.033333 | 22.000000 | 979958.394329865 | 900 | 68.936 | 36.680 | 38.197 | 78.929 | -2.831 | 40.257 | -0.010 |
| 3 | 40.066667 | 22.000000 | 979964.115595190 | 881 | 76.778 | 37.957 | 39.735 | 84.879 | -15.006 | 40.587 | -0.013 |
| 4 | 40.100000 | 22.000000 | 979973.354076660 | 844 | 69.658 | 39.256 | 41.28 | 80.686 | -15.126 | 40.628 | -0.010 |
| 5 | 40.000000 | 22.033333 | 979991.932884696 | 725 | 50.676 | 35.369 | 36.596 | 55.427 | 2.500 | 39.944 | -0.009 |
| 6 | 40.033333 | 22.033333 | 979963.215029865 | 880 | 65.376 | 36.509 | 38.007 | 68.236 | 4.192 | 40.256 | -0.009 |
| 7 | 40.066667 | 22.033333 | 979974.105795190 | 828 | 72.057 | 37.720 | 39.488 | 78.714 | -9.915 | 40.559 | -0.005 |
| 8 | 40.100000 | 22.033333 | 980077.216476660 | 485 | 74.780 | 39.028 | 41.069 | 86.637 | -19.943 | 40.748 | -0.001 |
| 9 | 40.000000 | 22.066667 | 980025.920784696 | 572 | 38.534 | 35.282 | 36.486 | 39.577 | 3.207 | 39.942 | 0.004 |
| 10 | 40.033333 | 22.066667 | 980002.279429865 | 689 | 50.087 | 36.359 | 37.842 | 49.782 | 3.456 | 40.252 | 0.008 |
| 11 | 40.066667 | 22.066667 | 979978.652895190 | 798 | 62.329 | 37.463 | 39.213 | 63.185 | 0.556 | 40.523 | 0.005 |
| 12 | 40.100000 | 22.066667 | 979916.349976660 | 1095 | 74.039 | 38.541 | 40.533 | 78.128 | 11.573 | 40.841 | 0.001 |
| 13 | 40.000000 | 22.100000 | 980034.123584696 | 508 | 25.925 | 35.159 | 36.329 | 22.905 | 0.599 | 39.942 | 0.014 |
| 14 | 40.033333 | 22.100000 | 980037.767429864 | 513 | 33.854 | 36.187 | 37.647 | 28.024 | -3.149 | 40.217 | 0.028 |
| 15 | 40.066667 | 22.100000 | 980028.508995190 | 572 | 51.267 | 37.234 | 38.972 | 43.877 | -11.258 | 40.455 | 0.009 |
| 16 | 40.100000 | 22.100000 | 979956.937376660 | 939 | 70.721 | 38.236 | 40.221 | 70.275 | 3.969 | 40.921 | 0.020 |

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (III)

Γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς 1980
Geodetic Reference System 1980 – **GRS80** (Καμπέρα)

$$a = 6378137 \text{ m}, \quad GM = 398600.5 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad J_2 = 1082.63 \times 10^{-6}, \quad \omega = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

$$\gamma_0 = 9.78032677 \frac{1 + 0.001931851353 \sin^2 \varphi}{\left(-0.006694380029 \sin^2 \varphi \right)^{1/2}} \text{ ms}^{-2}$$

Αντικατάσταση του γεωγραφικού πλάτους κάθε σημείο και υπολογισμός του γ_0^{GRS80}

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνες 1, 2: Φωτογραφική λήψη εξοπλισμού του Τομέα ΓΤΟ, ΤΑΤΜ, ΑΠΘ
- Εικόνα 3: Κατσάμπαλος Κ, Τζιαβός ΗΝ (1992): Φυσική Γεωδαισία. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Εικόνες 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13: Leica (2000) Leica GPS Basics. Leica Geosystems AG, v1.0.
- Εικόνες 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 : Αραμπέλος Δ και Τζιαβός ΗΝ (2007) Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας της Γης. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ηλίας Τζιαβός – Γεώργιος Βέργος. «Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας. Πεδία Έλξης». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS374/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης



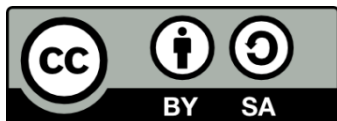
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δαλάκης Νικόλαος
Θεσσαλονίκη, 16/9/2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

