



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

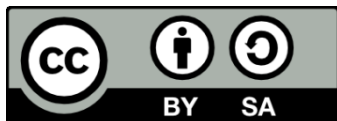
ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας

Ενότητα **9**: Προσδιορισμός Γεωειδούς με Ολοκληρωματικές,
Στοχαστικές και Φασματικές Μεθόδους

Η.Ν. Τζιαβός - Γ.Σ. Βέργος
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



ΑΠΘ/ΤΑΤΜ

**Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας
4^ο Εξάμηνο**

Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας

Introduction to gravity field

Ακαδημαϊκή Χρονιά:

2014 – 2015

Πρόγραμμα:

Τετάρτη 9:00 – 13:00

Διδάσκοντες:

Η.Ν. Τζιαβός, Γ.Σ. Βέργος

<http://web.auth.gr/e-topo/>

<http://olimpia.topo.auth.gr/courses/>

Ιστοσελίδες ΔΕΠ

Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας

Η. Τζιαβός ή Γ. Βέργος

Μαθήματα - εργασίες

ΤΟ ΓΕΩΕΙΔΕΣ
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΜΕ
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ, ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ
ΦΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ

FFT

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g(\psi, \alpha) S(\psi) d\sigma$$

$$\begin{aligned} S(\psi) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) = 5P_2(\cos \psi) + \frac{7}{2}P_3(\cos \psi) + 3P_4(\cos \psi) + \dots \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6\sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos \psi - 3\cos \psi \cdot \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΜΕ ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Stokes

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad \longrightarrow \quad \text{ολοκλήρωμα Stokes}$$

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^n \Delta g_{\text{obs}} S_i(\psi) d\varphi d\lambda \quad \longrightarrow \quad \text{απλοποιημένη μορφή
πρακτικές εφαρμογές}$$

Συνάρτηση Stokes

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)$$

$$S(\psi) \approx \frac{1}{\sin(\psi/2)} \approx \frac{1}{\psi/2} \approx \frac{2}{\psi} \quad \longrightarrow \quad \text{για μικρές τιμές του } \psi$$

ΣΧΕΣΕΙΣ Vening – Meinesz

$$\left\{ \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \right\} = \frac{\rho}{4\pi\gamma} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\pi} \Delta g \left\{ \begin{matrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{matrix} \right\} S'(\psi) \sin \psi \, d\psi \, d\alpha$$

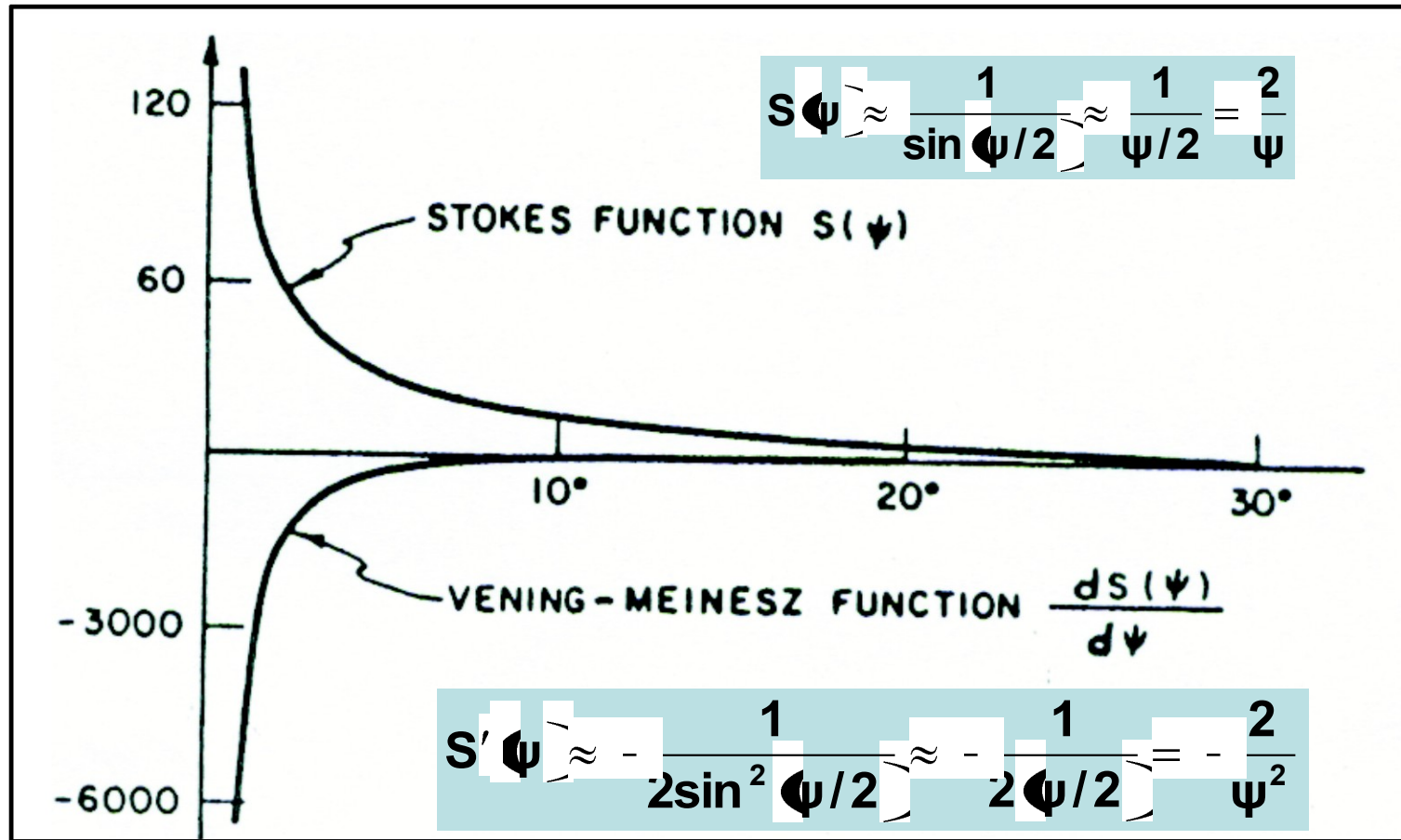
$$\left\{ \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \right\} = \iint_{\sigma} \Delta g S'(\psi) \left\{ \begin{matrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{matrix} \right\} d\sigma$$

$$S'(\psi) = \frac{dS(\psi)}{d\psi} = -\frac{\cos(\psi/2)}{2\sin^2(\psi/2)} + 8\sin\psi - 6\cos\frac{\psi}{2} - \frac{3-3\sin(\psi/2)}{\sin\psi} + 3\sin\psi \cdot \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

$$S(\psi) \approx \frac{1}{\sin(\psi/2)} \approx \frac{1}{\psi/2} = \frac{2}{\psi}$$

$$S'(\psi) \approx -\frac{1}{2\sin^2(\psi/2)} \approx -\frac{1}{2(\psi/2)} = -\frac{2}{\psi^2}$$

Συνάρτηση
Vening - Meinesz



Εικόνα 1

Πρακτική εφαρμογή του τύπου του Stokes – από τη σφαίρα στο επίπεδο

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma$$

$$S(\psi) \approx \frac{1}{\sin(\psi/2)} \approx \frac{1}{\psi/2} \approx \frac{2}{\psi} \approx \frac{2}{r}$$

$$d\sigma = dx \cdot dy$$

$$N = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \frac{\Delta g}{r} dx dy$$

τρεις συνιστώσες N_1, N_2, N_3

$$N = N_1 + N_2 + N_3$$

N_1 γεωδυναμικό μοντέλο

$$N_1 = R \left[\sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n C_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \vec{P}_{nm}(\sin \bar{\varphi}) \right]$$

N_2 από ανηγμένες τιμές βαρύτητας

$$N_2 = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} (\Delta_{\text{obs}} - \Delta g_{\text{pot}}) S(\psi) d\sigma$$

$$\Delta g_{\text{pot}} = \gamma \left[\sum_{n=2}^{n_{\max}} (n-1) \sum_{m=0}^n C_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \vec{P}_{nm}(\sin \bar{\varphi}) \right]$$

N_3 συνεισφορά ευρύτερης περιοχής

$$N_3 = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma-\sigma} (\Delta_{\text{obs}} - \Delta g_{\text{pot}}) S(\psi) d\sigma$$

ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΟΥ Stokes

- Το γεωειδές είναι μία ισοδυναμική επιφάνεια και το ελλειψοειδές μία σφαιροδυναμική ($W_0=U_0$)
- Οι ανωμαλίες βαρύτητας θεωρούνται ανηγμένες στην επιφάνεια του γεωειδούς
- Η μάζα του ΕΕΠ είναι ίση με τη μάζα της γης
- Το κέντρο του ΕΕΠ συμπίπτει με το κέντρο του συστήματος αναφοράς (Γης)
- Δεν υπάρχουν μάζες έξω από το γεωειδές, η αφαίρεσή τους έχει γίνει με τις αναγωγές των ανωμαλιών βαρύτητας στην επιφάνεια του σφαιρικού γεωειδούς
- Γη και ΕΕΠ περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα
- Η αποχή του γεωειδούς δίνεται σε σχέση με ένα ελλειψοειδές του οποίου η επιπλάτυνση είναι ίδια με εκείνη του ελλειψοειδούς που χρησιμοποιήθηκε για τις αναγωγές βαρύτητας

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ (Stokes)

✓ Σφάλματα του μαθηματικού μοντέλου

- Σφάλμα σφαιρικής προσέγγισης
- Επίδραση ατμοσφαιρικών μαζών
- Συνιστώσα μηδενικής τάξης
- Σφάλμα ολοκλήρωσης

✓ Σφάλματα του γεωδυναμικού μοντέλου

✓ Σφάλματα των ανωμαλιών βαρύτητας

σN_c } Σφάλμα εκ “μεταφοράς”
(commission error)

σN_0 } Σφάλμα παράλειψης
(ανάπτυξη μέχρι n_{max})
(omission error)

σN_D } Διακριτική ικανότητα Δg $\bar{n} = \frac{180^\circ}{\theta}$

σN_P } Σφάλμα προσδιορισμού Δg

Επίδραση ατμοσφαιρικών μαζών στις Δg

Ψ_c	Μέσο υψόμετρο κελύφους σε [m]				
	0	100	200	300	400
5°	0.56	0.56	0.55	0.55	0.54
10°	1.17	1.16	1.14	1.13	1.12
15°	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67
20°	2.26	2.23	2.21	2.18	2.16
25°	2.67	2.64	2.61	2.58	2.55
30°	2.97	2.93	2.90	2.87	2.83

Μέσο υψόμετρο 100 m

Ακτίνα ολοκλήρωσης $\Psi_c =$

Διόρθωση 0.56 m

Προσδιορισμός βέλτιστης ακτίνας συλλογής

Ελαχιστοποίηση σφαλμάτων

$$\sigma N_{\text{tot}} \left(\psi_c \right) = \sqrt{\sigma N_c + \overline{\sigma N_0} + \overline{\sigma N_D} + \overline{\sigma N_P}}$$

$$\sigma N_{\text{tot}} \left(\psi_c \right) = \text{minimum}$$

Απόσταση [km]	σN_c	σN_0	σN_D	σN_P	σN_{tot}
2	0.3	0.0	0.8	1.2	1.5
4	0.5	0.1	1.5	2.4	2.9
6	0.8	0.1	2.0	3.6	4.1
8	1.0	0.1	2.0	4.7	5.3
10	1.3	0.1	2.2	5.8	6.4
12	1.6	0.2	2.2	6.9	7.5
14	1.8	0.2	2.1	8.0	8.5
16	2.1	0.2	2.0	9.0	9.5
18	2.4	0.3	1.9	10.0	10.5
20	2.6	0.3	1.9	11.0	11.5

Τιμές σφαλμάτων σε cm

$$\varphi = 50^\circ \quad \psi_c = 2^\circ$$

Ο ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER – DISCRETE FOURIER TRANSFORM 2D

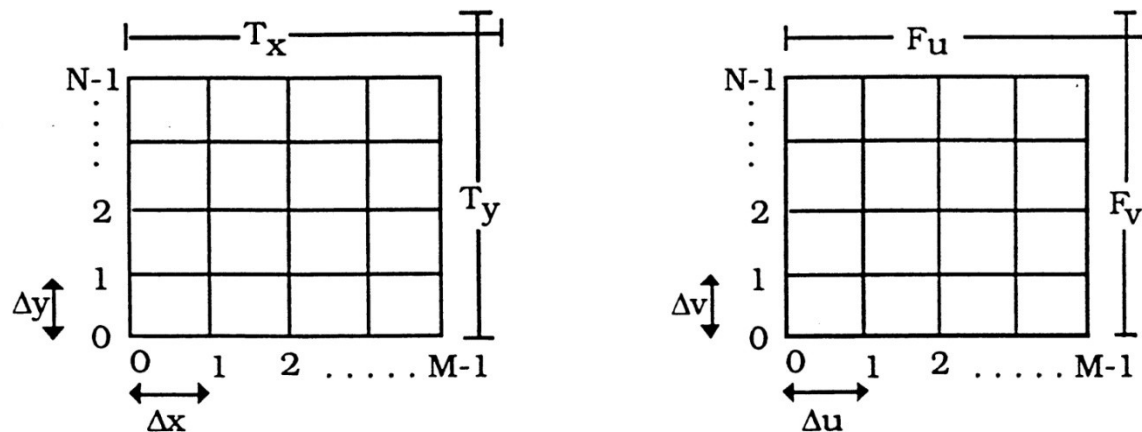
$h(x,y)$ $M \times N$ διακριτές τιμές

$$x = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad \Delta = \frac{T_x}{M}$$

$$y = l\Delta, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \Delta = \frac{T_y}{N}$$

$$u = m\Delta, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad \Delta = \frac{F_u}{M} = \frac{1}{\Gamma_x}$$

$$v = n\Delta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \Delta = \frac{F_v}{N} = \frac{1}{\Gamma_y}$$



Εικόνα 2

$$\begin{aligned}
 H(m\Delta u, n\Delta v) &= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(k\Delta x, l\Delta y) e^{-j2\pi(m\Delta u k\Delta x + n\Delta v l\Delta y)} \Delta x \Delta y \\
 &= \Delta x \Delta y \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(k\Delta x, l\Delta y) e^{-j2\pi(m\Delta u k\Delta x + n\Delta v l\Delta y)}
 \end{aligned}$$

$$\Delta x \Delta y = \frac{T_x}{M} \frac{T_y}{N}$$

$$H(m\Delta u, n\Delta v) = \frac{T_x}{M} \frac{T_y}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(k\Delta x, l\Delta y) e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)}$$

$$\begin{aligned}
 h(k\Delta x, l\Delta y) &= \Delta u \Delta v \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} H(m\Delta u, n\Delta v) e^{j2\pi(m\Delta u k\Delta x + n\Delta v l\Delta y)} \\
 &= \frac{1}{T_x} \frac{1}{T_y} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} H(m\Delta u, n\Delta v) e^{j2\pi\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)}
 \end{aligned}$$

$$h(k,l) \leftrightarrow (m,n)$$

$$H(m,n) = \frac{T_x}{M} \frac{T_y}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(k\Delta_x, l\Delta_y) e^{-j2\pi \left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)} = \mathcal{F}[h(m,n)]$$

$$h(k\Delta_x, l\Delta_y) = \frac{1}{T_x} \frac{1}{T_y} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} H(m,n) e^{j2\pi \left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)} = \mathcal{F}^{-1}[H(m,n)]$$

Προδικαθίσταται και στους δύο άξονες με περιόδους

$$T_x = M\Delta_x, \quad T_y = N\Delta_y$$

$$F_u = M\Delta_x, \quad F_v = N\Delta_y$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΓΩΕΙΔΟΥΣ ΜΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ FOURIER

$$N = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \frac{\Delta g}{r} dx dy$$

$$N(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \Delta g(x, y) \frac{1}{\left[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 \right]^{1/2}} dx dy$$

$$l_N(x, y) = r^{-1}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} \Delta g(x, y) * l_N(x, y)$$

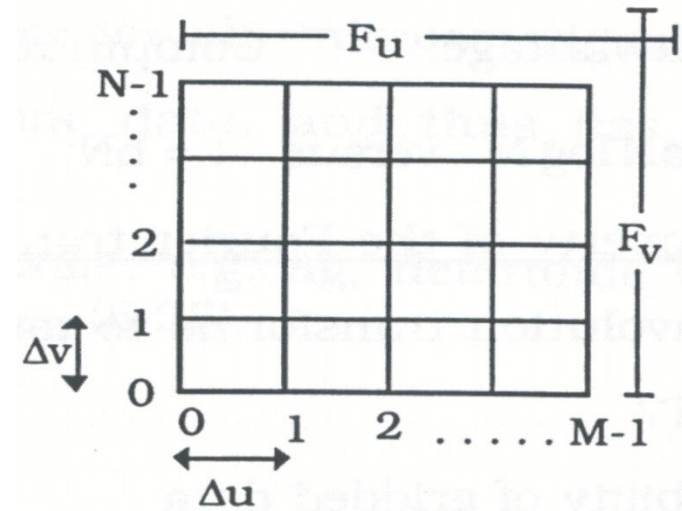
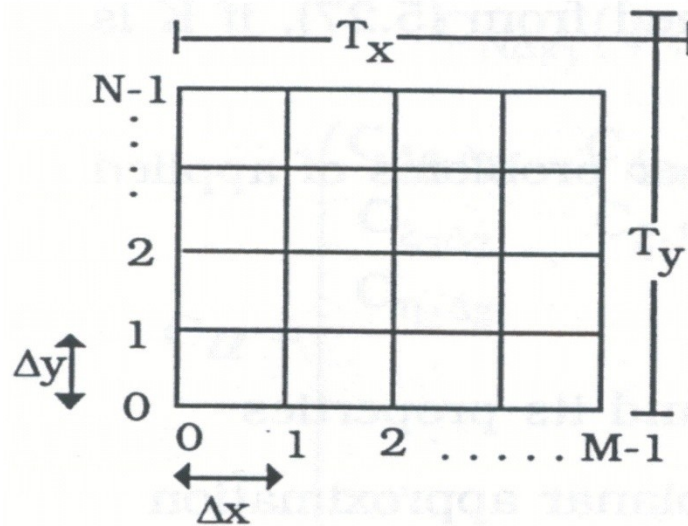
$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \{ \Delta G(u, v) L_N(u, v) \}$$

$$\Delta G(u, v) = F \{ \Delta g(x, y) \}$$

$$L_N(u, v) = F \{ l_N(x, y) \} = (u^2 + v^2)^{-1/2}$$

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \left[\Delta G(u, v) \frac{1}{(u^2 + v^2)^{-1/2}} \right]$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΓΩΓΕΙΔΟΥΣ ΜΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ FOURIER



Εικόνα 3

$$N(x, y) = \frac{R}{2\pi\gamma} \int_{-x}^x \int_{-y}^y \frac{\Delta}{r} dx dy$$

$$r = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}$$

$$N(x, y) = \frac{R}{2\pi\gamma} \int \int [g(x, y) * I_N(x, y)] dx dy$$

$$I_N = \delta(x, y)$$

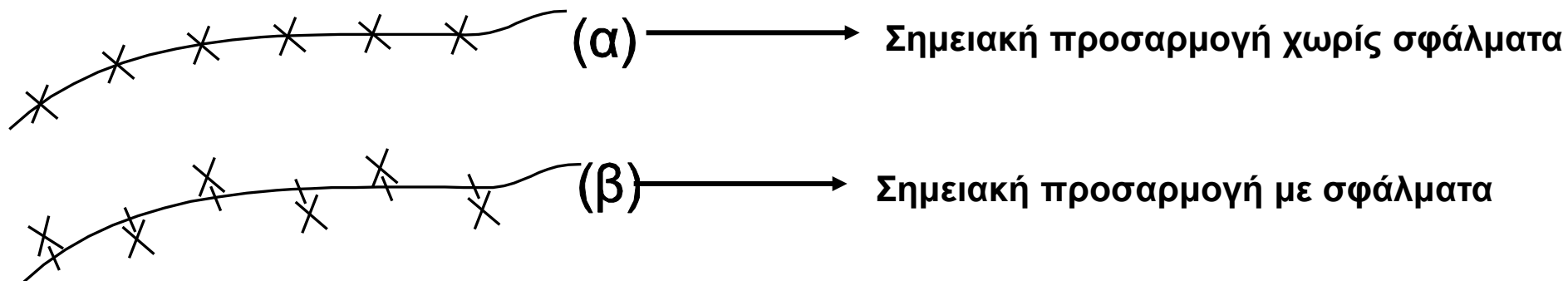
$$\Delta G(u, v) = \mathcal{F} [g(x, y)]$$

$$L_N(u, v) = \mathcal{F} [I_N(x, y)]$$

$$N(x, y) = \mathcal{F}^{-1} [\Delta G(u, v) L_N(u, v)]$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ – ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ

- σημειακή προσαρμογή χωρίς σφάλματα (exact collocation) – ελάχιστα τετράγωνα
- σημειακή προσαρμογή με σφάλματα (smoothing collocation)
- σημειακή προσαρμογή με παραμέτρους (parametric least squares collocation)



Εικόνα 4

Το πρόβλημα

Από ένα σύνολο μετρήσεων (παρατηρήσεων) s_i , $i=1,2,\dots,r$, οι οποίες σχετίζονται με το διαταρακτικό δυναμικό τη γης T και οι οποίες μπορεί να εκφραστούν ως τιμές ορισμένων γραμμικών συνεχών συναρτησιακών του διαταρακτικού δυναμικού σύμφωνα με τη σχέση

$$s_i = L_i T$$

ζητείται να βρεθεί μία προσέγγιση για το T , η οποία να ικανοποιεί τις μετρήσεις s_i και τη συνθήκη

$$\| T \| = \min$$

Σημειώνεται ότι τα συναρτησιακά είναι ορισμένοι τελεστές, οι οποίοι μετατρέπουν συναρτήσεις σε πραγματικούς αριθμούς

Πρόγνωση με ελάχιστα τετράγωνα

$$\hat{T}_P = [C_{P1} \ C_{P2} \dots \ C_{Pr}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ C_{r1} & C_{r2} & \dots & C_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_r \end{bmatrix}$$

Συναρτήσεις συμμεταβλητότητας

$$C_{Pi} = C(T_P, s_i)$$

$$C_{ij} = C(s_i, s_j)$$

Προγνώσεις

$$\hat{T}_P = C_{Ps} C_{SS}^{-1} \mathbf{s}$$

$$\hat{\mathbf{s}}'_k = C_{S'S} C_{SS}^{-1} \mathbf{s}$$

ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΧΩΡΙΣ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Πρόγνωση υψομέτρων γεωειδούς N από Δg

$$\hat{N} = [\hat{N}_1 \quad \hat{N}_2 \quad \dots \quad \hat{N}_k]^T$$

$$\hat{\Delta g} = [\Delta g_1 \quad \Delta g_2 \quad \dots \quad \Delta g_n]^T$$

$$\hat{N}_k = \mathfrak{C}_{N\Delta g} \mathfrak{C}_{\Delta g\Delta g}^{-1} \Delta g$$

Πίνακες συμμεταβλητοτήτων

$$\mathfrak{C}_{\Delta g\Delta g} = \begin{bmatrix} \mathfrak{C}(\Delta g_1, \Delta g_1) & \mathfrak{C}(\Delta g_1, \Delta g_2) & \dots & \mathfrak{C}(\Delta g_1, \Delta g_n) \\ \mathfrak{C}(\Delta g_2, \Delta g_1) & \mathfrak{C}(\Delta g_2, \Delta g_2) & \dots & \mathfrak{C}(\Delta g_2, \Delta g_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{C}(\Delta g_n, \Delta g_1) & \mathfrak{C}(\Delta g_n, \Delta g_2) & \dots & \mathfrak{C}(\Delta g_n, \Delta g_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{C}_{N\Delta g} = \begin{bmatrix} \mathfrak{C}(N_1, \Delta g_1) & \mathfrak{C}(N_1, \Delta g_2) & \dots & \mathfrak{C}(N_1, \Delta g_n) \\ \mathfrak{C}(N_2, \Delta g_1) & \mathfrak{C}(N_2, \Delta g_2) & \dots & \mathfrak{C}(N_2, \Delta g_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{C}(N_k, \Delta g_1) & \mathfrak{C}(N_k, \Delta g_2) & \dots & \mathfrak{C}(N_k, \Delta g_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{NN} = \mathfrak{C}_{\Delta g\Delta g}^{-1} - \mathfrak{C}_{N\Delta g} \mathfrak{C}_{\Delta g\Delta g}^{-1} \mathfrak{C}_{\Delta gN} \longrightarrow \text{σφάλμα πρόγνωσης}$$

ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

$$I_i = \lambda_i + \beta_i \quad \text{μέτρηση} = \text{σήμα} + \text{θόρυβος}$$

$$\mathbf{s}^T \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{s} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} = \text{minimum} \quad \text{συνθήκη ελαχιστοποίησης}$$

Συναρτήσεις συμμεταβλητότητας

$$\mathbf{C}_{ll} = \mathcal{C}_{tt} + \mathcal{C}_{te} + \mathcal{C}_{et} + \mathcal{C}_{ee}$$

$$\mathbf{C}_{ll} = \mathcal{C}_{tt} + \mathcal{C}_{ee}$$

Λύση

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathcal{C}_{sl} \mathbf{C}_{ll}^{-1} \mathbf{l} = \mathcal{C}_{sl} \mathbf{C}_{tt} + \mathcal{C}_{ee} \mathbf{l}$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathcal{C}_{st} \mathbf{C}_{tt} + \mathcal{C}_{ee} \mathbf{l}$$

Σφάλμα προσδιορισμού

$$\mathbf{E}_{ss} = \mathcal{C}_{ss} - \mathcal{C}_{st} \mathbf{C}_{ll}^{-1} \mathbf{C}_{ts}$$

Μοντέλο πρόγνωσης

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathfrak{C}_{sl} \mathbf{C}_{ll}^{-1} \mathbf{I} = \mathfrak{C}_{sl} \mathbf{C}_{tt} + \mathfrak{C}_{ee} \tilde{\mathbf{I}}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathfrak{C}_{st} \mathbf{C}_{tt} + \mathfrak{C}_{ee} \tilde{\mathbf{I}}$$

Ακρίβεια πρόγνωσης

$$\mathbf{E}_{ss} = \mathfrak{C}_{ss} - \mathfrak{C}_{st} \mathbf{C}_{ll}^{-1} \mathbf{C}_{ts}$$

Πρόγνωση υψομέτρων γεωειδούς από Δg , ξ , η

$$l_i = \dot{l}_i + \lambda_i$$

Στάδιο 1: Πίνακας παρατηρήσεων

$$l = [\Delta g_1 \dots \Delta g_i \quad \xi_1 \dots \xi_j \quad \eta_1 \dots \eta_k]^T$$

ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

$$l_i = \lambda_i + \mu_i$$

Στάδιο 2: Πίνακας συμμεταβλητοτήτων σημάτων

$$C_{tt} = \begin{bmatrix} C_{11}^{\Delta g \Delta g} & \dots & C_{1i}^{\Delta g \Delta g} & C_{11}^{\Delta g \xi} & \dots & C_{1j}^{\Delta g \xi} & C_{11}^{\Delta g \eta} & \dots & C_{1k}^{\Delta g \eta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{i1}^{\Delta g \Delta g} & \dots & C_{ii}^{\Delta g \Delta g} & C_{i1}^{\Delta g \xi} & \dots & C_{ij}^{\Delta g \xi} & C_{i1}^{\Delta g \eta} & \dots & C_{ik}^{\Delta g \eta} \\ C_{11}^{\xi \Delta g} & \dots & C_{1i}^{\xi \Delta g} & C_{11}^{\xi \xi} & \dots & C_{1j}^{\xi \xi} & C_{11}^{\xi \eta} & \dots & C_{1k}^{\xi \eta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{j1}^{\xi \Delta g} & \dots & C_{ji}^{\xi \Delta g} & C_{j1}^{\xi \xi} & \dots & C_{jj}^{\xi \xi} & C_{j1}^{\xi \eta} & \dots & C_{jk}^{\xi \eta} \\ C_{11}^{\eta \Delta g} & \dots & C_{1i}^{\eta \Delta g} & C_{11}^{\eta \xi} & \dots & C_{1j}^{\eta \xi} & C_{11}^{\eta \eta} & \dots & C_{1k}^{\eta \eta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{k1}^{\eta \Delta g} & \dots & C_{ki}^{\eta \Delta g} & C_{k1}^{\eta \xi} & \dots & C_{kj}^{\eta \xi} & C_{k1}^{\eta \eta} & \dots & C_{kk}^{\eta \eta} \end{bmatrix}$$

ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Στάδιο 3: Πίνακας συμμεταβλητοτήτων σφαλμάτων (συσχετισμένα σφάλματα)

$$C_{mn} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} D_{11}^{\Delta g \Delta g} \dots D_{1i}^{\Delta g \Delta g} & D_{11}^{\Delta g \xi} \dots D_{1j}^{\Delta g \xi} & D_{11}^{\Delta g \eta} \dots D_{1k}^{\Delta g \eta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{i1}^{\Delta g \Delta g} \dots D_{ii}^{\Delta g \Delta g} & D_{i1}^{\Delta g \xi} \dots D_{ij}^{\Delta g \xi} & D_{i1}^{\Delta g \eta} \dots D_{ik}^{\Delta g \eta} \\ D_{11}^{\xi \Delta g} \dots D_{1i}^{\xi \Delta g} & D_{11}^{\xi \xi} \dots D_{1j}^{\xi \xi} & D_{11}^{\xi \eta} \dots D_{1k}^{\xi \eta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{j1}^{\xi \Delta g} \dots D_{j1}^{\xi \Delta g} & D_{j1}^{\xi \xi} \dots D_{jj}^{\xi \xi} & D_{j1}^{\xi \eta} \dots D_{jk}^{\xi \eta} \\ D_{11}^{\eta \Delta g} \dots D_{1i}^{\eta \Delta g} & D_{11}^{\eta \xi} \dots D_{1j}^{\eta \xi} & D_{11}^{\eta \eta} \dots D_{1k}^{\eta \eta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{k1}^{\eta \Delta g} \dots D_{ki}^{\eta \Delta g} & D_{k1}^{\eta \xi} \dots D_{kj}^{\eta \xi} & D_{k1}^{\eta \eta} \dots D_{kk}^{\eta \eta} \end{array} \right| \end{array}$$

ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Στάδιο 3: Πίνακας συμμεταβλητοτήτων σφαλμάτων (ασυσχέτιστα σφάλματα)

$$C_{ee} = \begin{bmatrix} m_{\Delta g}^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & m_{\Delta g}^2 & & & \\ & & & m_{\xi}^2 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & m_{\xi}^2 \\ & 0 & & & & & m_{\eta}^2 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & m_{\eta}^2 \end{bmatrix}$$

ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Στάδιο 4: Υπολογισμός πίνακα \mathbf{b}

$$\mathbf{b} = (\mathbf{C}_{ss} + \mathbf{C}_{nn})^{-1} \mathbf{l}$$

Στάδιο 5: Υπολογισμός συμμεταβλητοτήτων ανάμεσα στα σημεία πρόγνωσης και τα σημεία των δεδομένων

$$\mathbf{C}_{s'1} = \begin{bmatrix} C_{P1}^{Ng} & \dots & C_{Pi}^{Ng} & C_{P1}^{N\xi} & \dots & C_{Pj}^{N\xi} & C_{P1}^{N\eta} & \dots & C_{Pk}^{N\eta} \end{bmatrix}$$

Στάδιο 6: Πρόγνωση υψομέτρων γεωειδούς

$$\hat{N}_p = \mathbf{C}_{s'1} \mathbf{b} = \sum_{t=1}^m b_t (\mathbf{C}_{s'1})_t$$

Πρόγνωση υψομέτρων γεωειδούς από Δg

$$N_k = \mathcal{N}_{\Delta g} \mathcal{C}_{\Delta g \Delta g} + \mathcal{N}_{\Delta} \Delta$$

Στάδιο 1: *Διάνυσμα παρατηρήσεων*

$$\Delta g = \begin{bmatrix} \Delta g_1, \Delta g_2, \dots, \Delta g_n \end{bmatrix}^T$$

Διάνυσμα σημάτων πρόγνωσης

$$\hat{N}_k = \begin{bmatrix} \hat{N}_1, \hat{N}_2, \dots, \hat{N}_n \end{bmatrix}^T$$

Πίνακας συμμ. ανάμεσα στα σημεία των δεδομένων και τα σημεία πρόγνωσης

$$C_{N\Delta g} = \begin{bmatrix} [C_{N_1, \Delta g_1}] & [C_{N_1, \Delta g_2}] & \dots & [C_{N_1, \Delta g_n}] \\ [C_{N_2, \Delta g_1}] & [C_{N_2, \Delta g_2}] & \dots & [C_{N_2, \Delta g_n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [C_{N_k, \Delta g_1}] & [C_{N_k, \Delta g_2}] & \dots & [C_{N_k, \Delta g_n}] \end{bmatrix}$$

Πίνακας συμμ. ανάμεσα στα σημεία των δεδομένων

$$C_{\Delta g \Delta g} = \begin{bmatrix} C(\Delta g_1, \Delta g_1) & C(\Delta g_1, \Delta g_2) & \dots & C(\Delta g_1, \Delta g_n) \\ C(\Delta g_2, \Delta g_1) & C(\Delta g_2, \Delta g_2) & \dots & C(\Delta g_2, \Delta g_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(\Delta g_n, \Delta g_1) & C(\Delta g_n, \Delta g_2) & \dots & C(\Delta g_n, \Delta g_n) \end{bmatrix}$$

ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Πίνακας συμμ. σφαλμάτων των δεδομένων

$$D = \begin{bmatrix} m_{\Delta g_1}^2 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & m_{\Delta g_n}^2 \end{bmatrix}$$

- Κατανομή δεδομένων τυχαία ή σε πλέγμα
- Πρόγνωση σε τυχαία σημαία ή σε πλέγμα
- Αποτέλεσμα ανεξάρτητο από τον αριθμό των σημείων πρόγνωσης
- Δεδομένα και προσδιοριζόμενα σήματα μπορεί να είναι ετερογενείς παρατηρήσεις
- Βέλτιστη λύση, ακριβέστερη από οποιαδήποτε άλλη γραμμική προσέγγιση

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{s} + \mathbf{n}$$

l ($r \times 1$) πίνακας των μετρήσεων

s ($r \times 1$) πίνακας των σημάτων

n ($r \times 1$) πίνακας των θορύβων

X ($m \times 1$) πίνακας των παραμέτρων

A ($r \times m$) γνωστός πίνακας, που εκφράζει τη σχέση μεταξύ μετρήσεων και παραμέτρων

Λύση του προβλήματος

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l}$$

$$\hat{\mathbf{s}}' = \mathbf{C}_{s'} \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}})$$

Ακρίβεια προσδιορισμού

$$\mathbf{E}_{s's'} = \mathbf{C}_{ll} - \mathbf{C}_{s'} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{C}_{ls'} + \mathbf{H} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}_{s'} \bar{\mathbf{C}}^{-1}$$

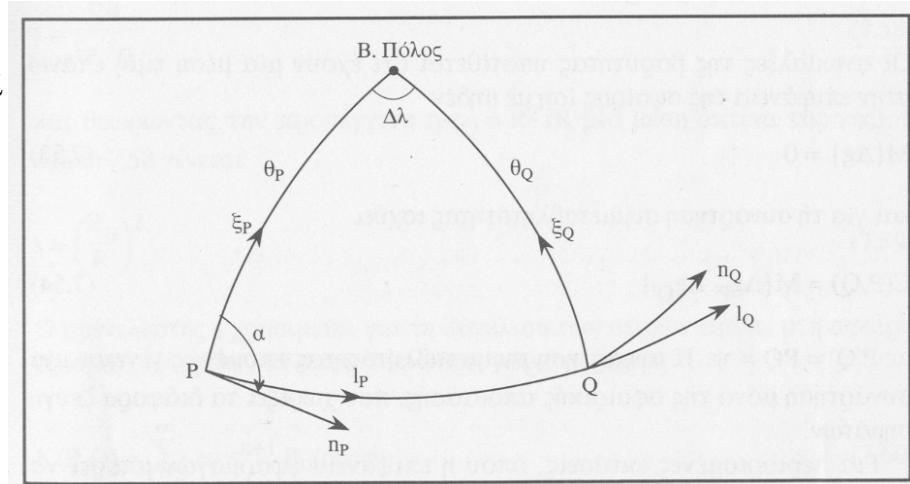
- ❑ αποτέλεσμα ανεξάρτητο από τον αριθμό των σημείων πρόγνωσης
- ❑ παρατηρήσεις και σήματα μπορεί να είναι ετερογενείς ποσότητες
- ❑ είναι η ακριβέστερη λύση από οποιαδήποτε άλλη γραμμική προσέγγιση

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

$$K(P_i, P_j) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} T_P, T_Q, \sin\theta \, d\theta \, d\lambda \, d\alpha$$

$$M(T) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} T \, d\sigma = 0$$

$$C(P_i, P_j) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g_P, \Delta g_Q, \sin\theta \, d\theta \, d\lambda \, d\alpha$$



Εικόνα 5

$$C(P, Q) = M\{\Delta g_P, \Delta g_{Q'}\}$$

$$C(d) = M\{\Delta g_P, \Delta g_{Q'}\} = C_{P'Q'}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

$$K(P, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^n P_n(\cos \psi)$$

σ_n συντελεστές μεταβλητότητας διαταρακτικού δυναμικού

$$s = \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \quad R_B \text{ σφαίρα του Bjerhammar} \quad s = \left(\frac{R_B}{R} \right)^2$$

$$K(P, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^n P_n(\cos \psi)$$

$$C(P, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n+1} P_n(\cos \psi)$$

c_n συντελεστές μεταβλητότητας ανωμαλιών βαρύτητας

Συναρτήσεις συμμεταβλητότητας μέσω τιμών ανωμαλιών βαρύτητας

$$\bar{C}(P, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n+1} P_n(\cos \psi)$$

Επίπεδη προσέγγιση

$$C(\psi) = \frac{\sum_{i,j=1,..} A_i A_j \bar{\Delta g}_i \bar{\Delta g}_j}{\sum_{i,j=1,..} A_i A_j}$$

A_i, A_j εμβαδά διαμερισμάτων μέσων τιμών Δg

$$C(\psi) = \frac{\sum_{i,j=1,..} \bar{\Delta g}_i \bar{\Delta g}_j}{n}$$

ισεμβαδικά διαμερίσματα

$$\psi - \frac{\Delta\psi}{2} \leq \psi_{ij} < \psi + \frac{\Delta\psi}{2}$$

κλάσεις της συνάρτησης συμμεταβλητότητας

Θεμελιώδεις παράμετροι

- μεταβλητότητα
(variance)

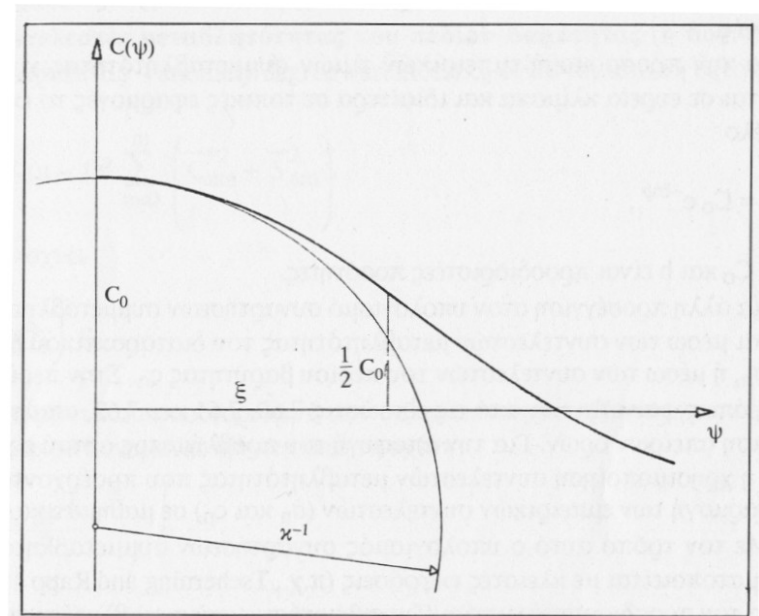
$$C_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta g_i^2$$

- μήκος συσχέτισης
(correlation length)

$$C(\xi) = \frac{C_0}{2}$$

- συντελεστής καμπυλότητας
(curvature parameter)

$$\chi = \kappa \frac{\xi^2}{C_0}$$



Εικόνα 6

ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΩΝ

$$C(\mu_1, T_2) = C(\mu_1, r_2, \psi) \quad \Delta g = \left(\frac{\partial}{\partial} - \frac{2}{r} T \right) \quad N = \frac{T}{Y}$$

$$\begin{aligned} C(\Delta g_1, \Delta g_2) &= \left(- \frac{\partial}{\partial} - \frac{2}{r_1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial} - \frac{2}{r_2} K \right) \\ &= \frac{\partial K}{\partial \partial} + \frac{2 \partial}{r_2 \partial} + \frac{2 \partial}{r_1 \partial} + \frac{4}{r_1 r_2} K \end{aligned}$$

$$C(N_1, \Delta g_2) = \frac{1}{Y_1} \left(- \frac{\partial K}{\partial r_2} - \frac{2}{r_2} K \right)$$

$$C(N_1, N_2) = \frac{K}{Y_1 Y_2}$$

ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΩΝ

$$N = N_1 + N_{\text{εσωτ}} + N_{\text{εξωτ}}$$

περιοχή $\sigma_1 + \sigma_2$

$$N_1 = R \left[\sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n C_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \vec{P}_{nm}(\sin \bar{\varphi})$$

εσωτερική ζώνη σ_1

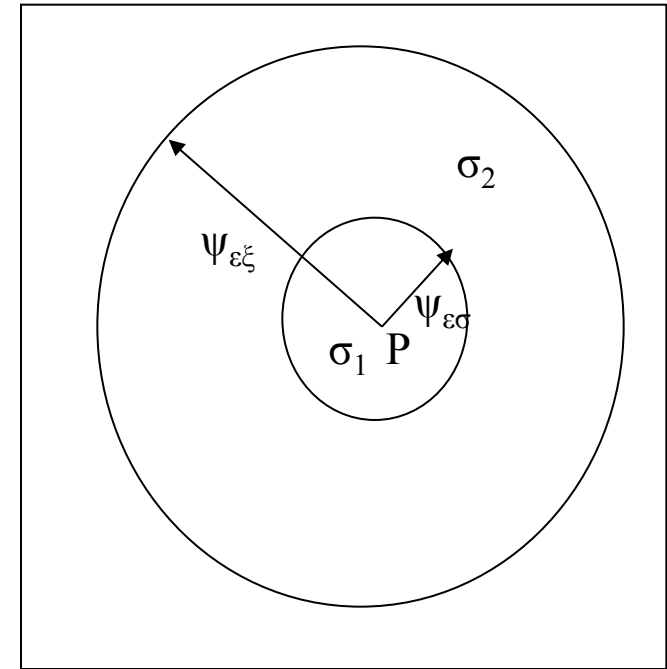
$$N_{\text{εσωτ}} = \vec{C}_{N\Delta g}^T \left(\vec{C}_{\Delta g\Delta g} + \vec{C}_{\Delta g_{\text{res}}} \right) \Delta g_{\text{res}}(\sigma_1)$$

$$\Delta g_{\text{res}} = \Delta g_{\text{obs}} - \Delta g_{\text{pot}}$$

$$\Delta g_{\text{pot}} = \gamma \left[\sum_{n=2}^{n_{\max}} (n-1) \sum_{m=0}^n C_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \vec{P}_{nm}(\sin \bar{\varphi})$$

εξωτερική ζώνη σ_2

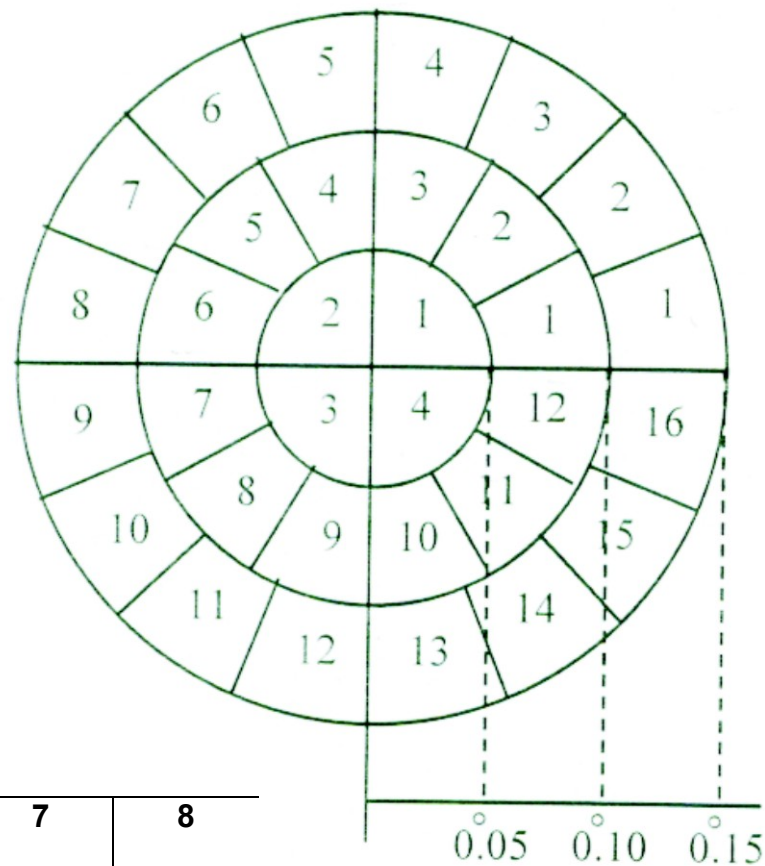
$$N_{\text{εξωτ}} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} (\Delta g_{\text{obs}} - \Delta g_{\text{pot}}) \vec{S}(\psi) d\sigma$$



Εικόνα 7

ΑΣΚΗΣΗ

$$N_A = \frac{R}{4\pi G} \sum_{i=1}^{32} \Delta g_{\text{obs}} S_i \psi \, d\varphi \, d\lambda$$



ψ	i	1	2	3	4	5	6	7	8
0°05		-89.2	-94.3	-94.8	-93.0				
0°10		-81.8	-81.7	-89.7	-92.0	-96.5	-94.9	-89.5	-77.4
0°10		-74.5	-83.8	-85.0	-88.0	-89.7	-95.3	-96.1	-88.8

ψ	i	9	10	11	12	13	14	15	16
0°05									
0°10		-79.9	-85.4	-88.2	-84.0				
0°10		-69.2	-63.8	-64.2	-62.5	-59.0	-75.5	-74.2	-72.5

Εικόνα 8

ΛΥΣΗ

Εμβαδόν διαμερισμάτων πρώτου τομέα (τεταρτοκύκλια) = $\pi r^2 / 4$ $r = 0.05^\circ$

Τα εμβαδά των διαμερισμάτων των δύο άλλων τομέων $\sim d\varphi \cdot d\lambda$ $d\varphi = d\lambda = 0.05^\circ$

4 διαμερίσματα 1ου τομέα

$$\psi = 0.025^\circ$$

$$S(\psi) = 19.0334$$

12 διαμερίσματα 2ου τομέα

$$\psi = 0.075^\circ$$

$$S(\psi) = 12.1752$$

16 διαμερίσματα 3ου τομέα

$$\psi = 0.125^\circ$$

$$S(\psi) = 19.7491$$

Συνάρτηση

Stokes

$$N_A = -0.78m$$

ΑΣΚΗΣΗ

$$\Delta g \longrightarrow N$$

Δεδομένα - Ανωμαλίες ελευθέρου αέρα

Σημείο	φ [°]	λ [°]	H [m]	Δg [gal]
1	39.00	21.00	0.00	0.058
2	39.00	22.00	0.00	0.064
3	39.25	21.70	0.00	0.105
4	39.50	21.50	0.00	0.074
5	39.75	21.25	0.00	0.088
6	39.80	21.50	0.00	0.103
7	39.90	21.90	0.00	0.092
8	39.10	21.70	0.00	0.077
9	39.20	21.30	0.00	0.062
10	39.75	21.75	0.00	0.100

Σημεία (σταθμοί) που θα γίνει πρόγνωση υψομέτρων γεωειδούς

Σημείο	φ [°]	λ [°]	H [m]
11	39.50	21.50	0.00
12	39.70	21.40	0.00
13	39.20	21.50	0.00
14	39.40	21.80	0.00

ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

$$C(\Delta g, \Delta g) = A s^2 \left(\frac{1}{L} - 1 - \ln \frac{2}{N} \right)$$

$$C(N, \Delta g) = \frac{A}{\gamma} R s \left(\ln \frac{2}{N} - t s \right)$$

$$L = \sqrt{1 - \gamma^2 s t + \gamma^2}$$

$$N = 1 + \gamma - s t$$

$$t = \gamma \cos \psi = \gamma \sin \varphi_i \sin \varphi_j + \gamma \cos \varphi_i \cos \varphi_j \cos(\lambda_i - \lambda_j)$$

Σταθερές

$$\gamma = 980.546 \text{ mGal}$$

$$R = 6371000 \text{ m}$$

$$A = 1/2600.10575 \text{ mGal}^2$$

$$s = 0.999617$$

Δεδομένα

$$I = \begin{bmatrix} \Delta g_1 & \Delta g_2 & \Delta g_3 & \Delta g_4 & \Delta g_5 & \Delta g_6 & \Delta g_7 & \Delta g_8 & \Delta g_9 & \Delta g_{10} \end{bmatrix}^T$$

Άγνωστες ποσότητες (υψόμετρα γεωειδούς)

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} \hat{N}_{11} & \hat{N}_{12} & \hat{N}_{13} & \hat{N}_{14} \end{bmatrix}^T$$

ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΩΝ-ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

$$C_{II} = \begin{bmatrix} C(\Delta g_1, \Delta g_1) & C(\Delta g_1, \Delta g_2) & \dots & C(\Delta g_1, \Delta g_{10}) \\ C(\Delta g_2, \Delta g_1) & C(\Delta g_2, \Delta g_2) & \dots & C(\Delta g_2, \Delta g_{10}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\Delta g_{10}, \Delta g_1) & C(\Delta g_{10}, \Delta g_2) & \dots & C(\Delta g_{10}, \Delta g_{10}) \end{bmatrix} \quad 10 \times 10$$

Gal^2

$$C_{II} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.02 & 0.02 & 0.04 & 0.07 & 0.02 \\ 0.03 & 1.00 & 0.06 & 0.03 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.08 & 0.04 & 0.03 \\ 0.03 & 0.06 & 1.00 & 0.07 & 0.03 & 0.04 & 0.03 & 0.14 & 0.07 & 0.04 \\ 0.03 & 0.03 & 0.07 & 1.00 & 0.07 & 0.07 & 0.04 & 0.05 & 0.06 & 0.07 \\ 0.03 & 0.02 & 0.03 & 0.07 & 1.00 & 0.11 & 0.04 & 0.03 & 0.04 & 0.05 \\ 0.02 & 0.02 & 0.04 & 0.07 & 0.11 & 1.00 & 0.07 & 0.03 & 0.03 & 0.11 \\ 0.02 & 0.02 & 0.03 & 0.04 & 0.04 & 0.07 & 1.00 & 0.02 & 0.02 & 0.11 \\ 0.04 & 0.08 & 0.14 & 0.05 & 0.03 & 0.03 & 0.02 & 1.00 & 0.06 & 0.03 \\ 0.07 & 0.04 & 0.07 & 0.06 & 0.04 & 0.03 & 0.02 & 0.06 & 1.00 & 0.03 \\ 0.02 & 0.03 & 0.04 & 0.07 & 0.05 & 0.11 & 0.11 & 0.03 & 0.03 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$C_{II}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.01 & -.02 & -.02 & -.02 & -.02 & -.01 & -.01 & -.03 & -.06 & -.01 \\ -.02 & 1.01 & -.05 & -.02 & -.01 & -.01 & -.01 & -.07 & -.02 & -.02 \\ -.02 & -.05 & 1.03 & -.06 & -.02 & -.02 & -.02 & -.01 & -.05 & -.03 \\ -.02 & -.02 & -.06 & 1.02 & -.05 & -.05 & -.03 & -.03 & -.05 & -.05 \\ -.02 & -.01 & -.02 & -.05 & 1.02 & -.10 & -.03 & -.02 & -.03 & -.04 \\ -.01 & -.01 & -.02 & -.05 & -.10 & 1.03 & -.05 & -.01 & -.02 & -.10 \\ -.01 & -.01 & -.02 & -.03 & -.03 & -.05 & 1.02 & -.01 & -.01 & -.10 \\ -.03 & -.07 & -.13 & -.03 & -.02 & -.01 & -.01 & 1.03 & -.05 & -.02 \\ -.06 & -.02 & -.05 & -.05 & -.03 & -.02 & -.01 & -.05 & 1.02 & -.02 \\ -.01 & -.02 & -.03 & -.05 & -.04 & -.09 & -.10 & -.02 & -.02 & 1.03 \end{bmatrix}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}_{\parallel}^{-1} \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{0} \times \dots)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} .045 \\ .078 \\ .044 \\ .063 \\ .074 \\ .069 \\ .048 \\ .038 \\ .070 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{N\Delta g} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{N_1, \Delta g_1} & \mathbf{C}_{N_1, \Delta g_2} & \dots & \mathbf{C}_{N_1, \Delta g_{10}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{N_4, \Delta g_1} & \mathbf{C}_{N_4, \Delta g_2} & \dots & \mathbf{C}_{N_4, \Delta g_{10}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{N\Delta g} = \begin{bmatrix} 10.39 & 10.39 & 10.21 & 17.16 & 12.05 & 12.17 & 10.94 & 11.33 & 11.89 & 12.05 \\ 9.93 & 9.70 & 10.93 & 12.94 & 14.09 & 14.08 & 11.30 & 10.35 & 10.93 & 12.38 \\ 11.28 & 11.28 & 13.54 & 12.17 & 10.59 & 10.52 & 9.93 & 13.27 & 13.65 & 10.59 \\ 10.02 & 11.32 & 13.46 & 12.57 & 10.73 & 11.15 & 10.93 & 12.09 & 11.29 & 11.79 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{C}_{N\Delta g} \mathbf{C}_{\parallel}^{-1} \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{N}_{11} \\ \hat{N}_{12} \\ \hat{N}_{13} \\ \hat{N}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.86 \\ 6.76 \\ 6.60 \\ 6.62 \end{bmatrix}$$

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνες 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8: Αραμπέλος Δ και Τζιαβός ΗΝ (2007) Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας της Γης. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ηλίας Τζιαβός – Γεώργιος Βέργος. «Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας. Προσδιορισμός Γεωειδούς με Ολοκληρωματικές, Στοχαστικές και Φασματικές Μεθόδους». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS374/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης



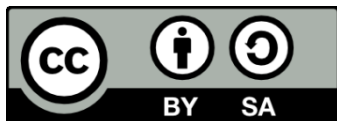
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δαλάκης Νικόλαος
Θεσσαλονίκη, 16/9/2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

