



Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή

Ενότητα 2.2 : Σύνολα, Σχέσεις, Συναρτήσεις (II).

Θεόδωρος Χατζηπαντελής
Τμήμα Πολιτικών Επιστημών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Σύνολα, Σχέσεις, Συναρτήσεις

Ορισμοί εννοιών και παραδείγματα,
Μέρος II.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

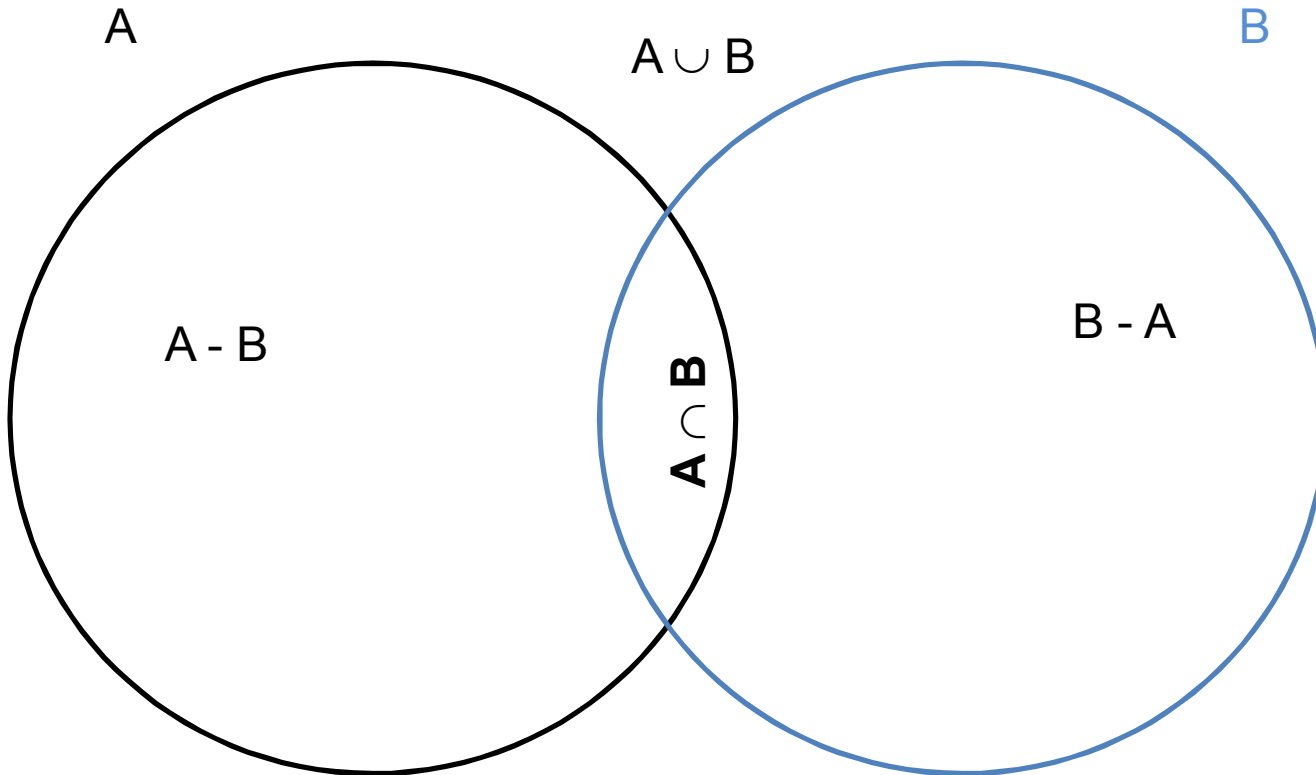
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σύνολα (παράσταση με διάγραμμα)

Σχήμα 1: Σύνολα



Διαμέριση

- Λόγω των ιδιοτήτων της μια **διαμέριση** είναι μια πολύ χρήσιμη έννοια.
- Προσέξτε ότι με μια διαμέριση χωρίζουμε το σύνολο μας σε υποσύνολα που είναι μεταξύ τους ξένα (η τομή κάθε δύο είναι το κενό σύνολο και η ένωση τους είναι το αρχικό σύνολο). Κάθε στοιχείο του συνόλου μας ανήκει μόνο σε ένα υποσύνολο της διαμέρισης.



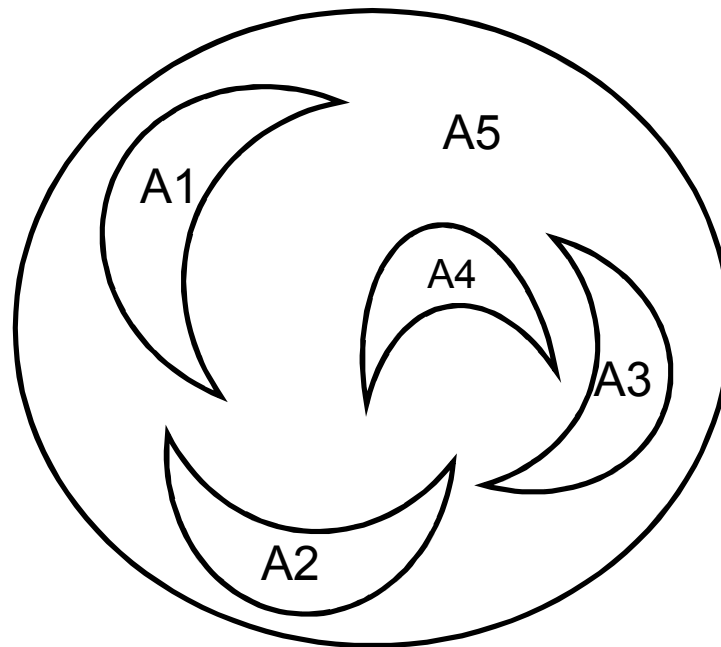
Παράδειγμα Διαμέρισης 3

- Το σύνολο των 300 Βουλευτών της Ελληνικής Βουλής χωρίζονται σήμερα ως εξής σε κοινοβουλευτικές ομάδες:
 $\{ \{ \mathbf{ΝΔ} (127 \text{ μέλη}) \}, \{ \mathbf{ΣΥΡΙΖΑ} (71) \}, \{ \mathbf{ΠΑΣΟΚ} (28) \}, \{ \mathbf{ΑΝΕΛ} (13) \}, \{ \mathbf{ΛΣ-ΧΑ} (16) \}, \{ \mathbf{ΔΗΜΑΡ} (10) \}, \{ \mathbf{ΚΚΕ} (12) \}, \{ \mathbf{ΑΝΔΗΒ} (14) \}, \{ \mathbf{ΑΝΕΞ} (9) \} \}$.
- Η διαμέριση δηλαδή έχει 9 σύνολα. Σε παρένθεση δίπλα σε κάθε ένα είναι ο πληθικός αριθμός.



Παράδειγμα Διαμέρισης 2

Σχήμα 2: Διαμέριση.
Απεικόνιση Διαμέρισης (A1, A2, A3, A4, A5)



Ο σοφιστής Επιμενίδης

Κρήτες ἀεὶ ψεῦσται (οι Κρήτες είναι πάντα ψεύτες)

- Σύμφωνα με την έκφραση αυτοί όλοι οι Κρητικοί είναι όλοι ψεύτες. Ωστόσο ποιος θα μπορούσε να βασιστεί σε αυτά τα λόγια του - επίσης καταγόμενου από την Κρήτη - Επιμενίδη;
- Εκεί ακριβώς έγκειται το παράδοξο: αν το δεχτούμε τότε λέει αλήθεια. (Άρα υπάρχει ένας Κρητικός που δεν είναι ψεύτης: ο Επιμενίδης) Αν δεν το δεχτούμε (δηλαδή θεωρήσουμε ότι ψεύδεται) λέει αλήθεια (άρα υπάρχει ένας Κρητικός που δεν είναι ψεύτης: ο Επιμενίδης).



Σικελία

- Όλες οι γυναίκες είναι παλιογυναίκες εκτός από τη μάνα μας και την αδερφή μας που και αυτές είναι γυναίκες.
- Δηλαδή: αφού η μάνα και η αδελφή είναι γυναίκες εμπίπτουν και αυτές στο γενικό χαρακτηρισμό των γυναικών.



Σχέση 1

1. Μια σχέση μπορεί να περιγραφεί με πίνακα ή με διάγραμμα. Οι περιγραφές αυτές θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες αργότερα.
- Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα.



Σχέση σε πίνακα, παράδειγμα 1

Πίνακας 1: σχέση σε πίνακα

ΕΣ \ Κ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
ΑΛ	✓	✓
ΚΛ	✓	✓
ΤΨ		✓

- Ας πάρουμε πρώτα το $EΣ = \{ΑΛ, ΚΛ, ΤΨ\}$ και το $Κ = \{ΝΑΙ, ΟΧΙ\}$.
- Παρατηρείστε ότι η δυάδα $ΤΨ, ΝΑΙ$ δεν μπορεί να οριστεί.
- Έτσι ορίζονται 5 δυάδες.



Σχέση σε πίνακα, παράδειγμα 2

Πίνακας 2: σχέση σε πίνακα

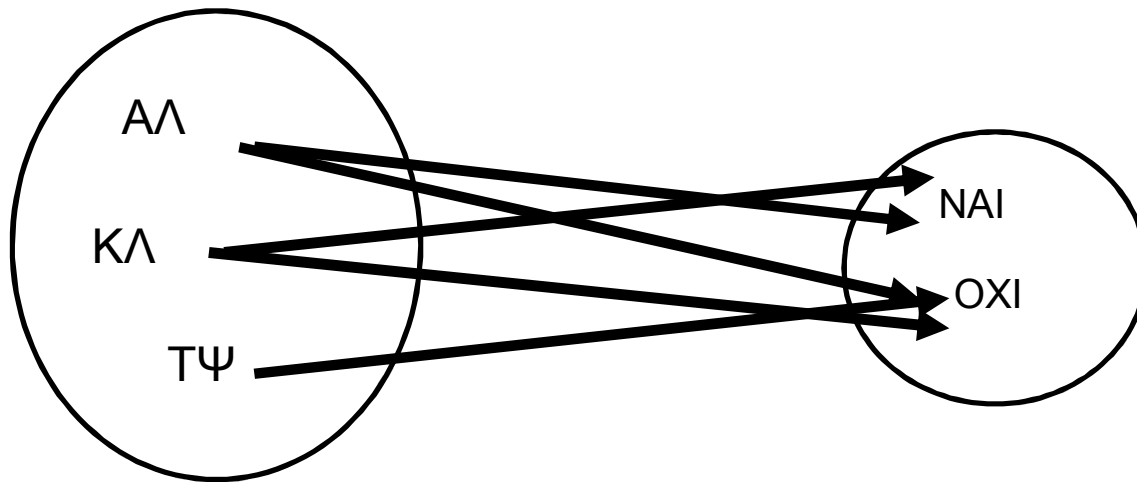
ΕΕ ΕΣ&Κ	1	<1
ΑΛ&Ν	✓	✓
ΚΛ&Ν	✓	✓
ΑΛ&Ο	✓	✓
ΚΛ&Ο	✓	✓
ΤΨ&Ο	✓	✓
ΑΛ&Ν	✓	✓

- Για να αποτυπώσουμε μια τριμελή σχέση (προσθέτοντας το ΕΕ) θα γράψαμε στον πίνακα 2.
- Έτσι ορίζονται 10 τριάδες.



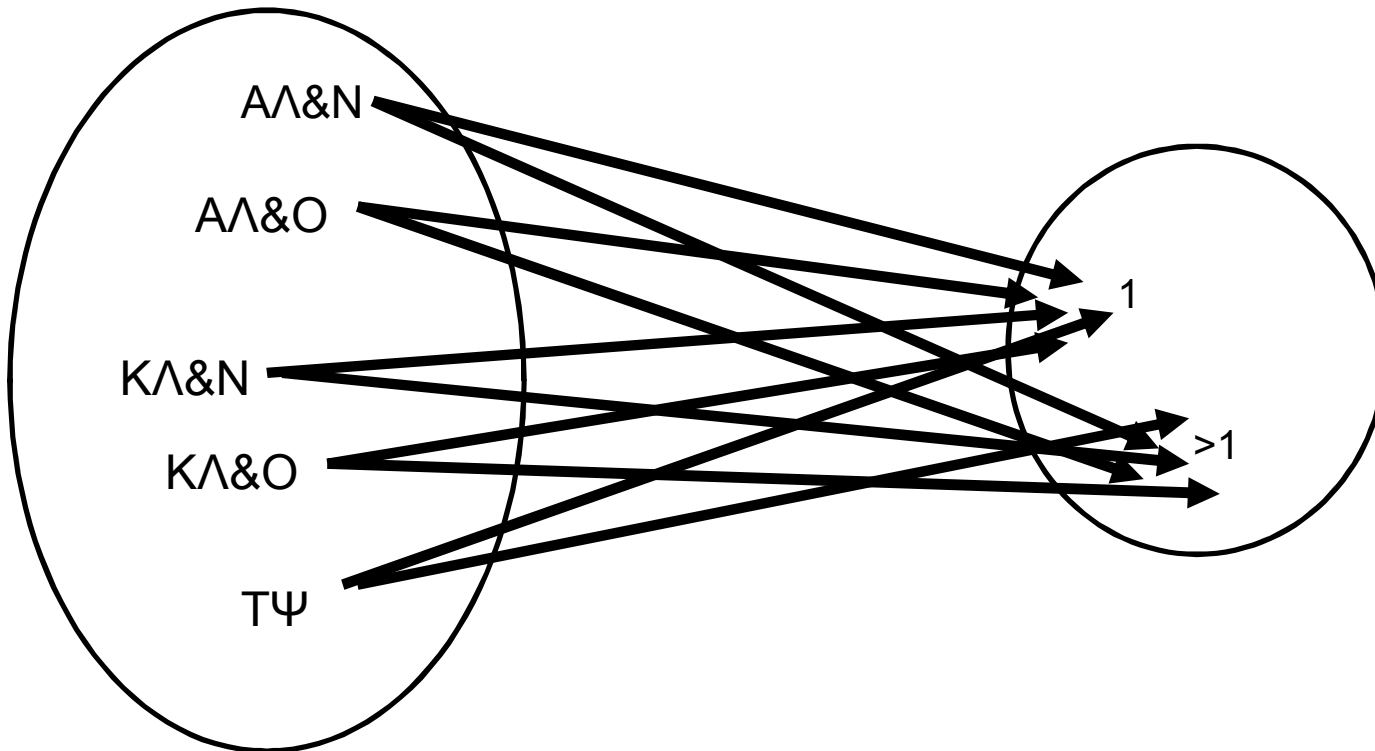
Σχέση σε διάγραμμα, παράδειγμα 1

Σχήμα 3: διμελής σχέση



Σχέση σε διάγραμμα, παράδειγμα 2

Σχήμα 4: τριμελής σχέση



Σχέση 2

- 2. Μια σχέση μπορεί να οριστεί επίσης στο εσωτερικό ενός συνόλου A . Τότε ασχολούμαστε με το $A \times A$ που είναι δυάδες που σχηματίζονται από το ίδιο σύνολο. Σε αυτή την περίπτωση τα στοιχεία του συνόλου συνδέονται μεταξύ τους αν έχουν σχέση ή δεν συνδέονται αν δεν έχουν. Πάλι μπορεί η σχέση να παρασταθεί με πίνακα ή διάγραμμα.
- Το διάγραμμα που προκύπτει ονομάζεται γράφημα και θα μας απασχολήσει αργότερα.



Σχέση σε ένα σύνολο

Αν πάρουμε μόνο τις χώρες της ζώνης του Ευρώ
 $E = \{\text{Αυστρία, Βέλγιο, Γαλλία, Γερμανία, Ελλάδα, Εσθονία, Ιρλανδία, Ισπανία, Ιταλία, Κύπρος, Λετονία, Λουξεμβούργο, Μάλτα, Ολλανδία, Πορτογαλία, Σλοβακία, Σλοβενία, Φινλανδία}\}$ και τα ορίσουμε τη σχέση $R =$
[δεν έχουν σύστημα ΑΛ]. Τότε:



Σύγκριση 2

Χάρτης 2: Χάρτης του Ευρώ.

Χάρτης της ζώνης του ευρώ 1999 – 2014



- Κράτος μέλος της ΕΕ που χρησιμοποιεί το ευρώ ως νόμισμά του
- Κράτος μέλος της ΕΕ που χρησιμοποιεί νόμισμα διαφορετικό του ευρώ
- Χώρα που δεν είναι μέλος της ΕΕ

- Χάρτης της ζώνης του Ευρώ 1999-2014, Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα.



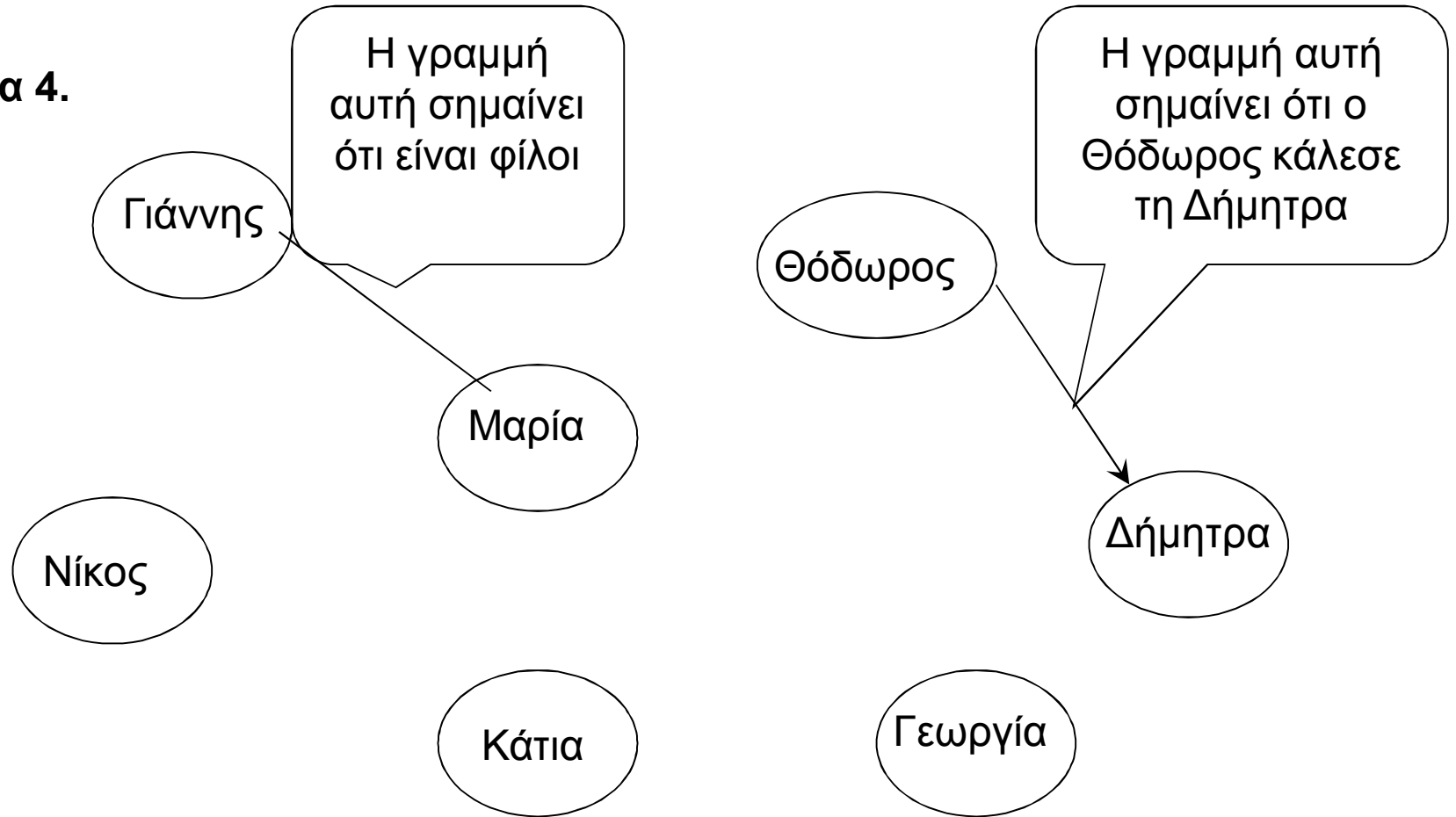
Σχέση, παράδειγμα

- Μια ομάδα 7 φοιτητών θέλει να αναπαραστήσει τη μεταξύ τους γνωριμία στο FB. Έτσι αποφασίζει να ορίσει σαν «σχέση» μεταξύ δύο μελών της ότι είναι φίλοι. Όμως κάποιος σκέφτηκε να σημειώσουν επιπλέον ποιος κάλεσε ποιον να τον δεχτεί σαν φίλο.



Σχέση, συνέχεια παραδείγματος 1

Σχήμα 4.



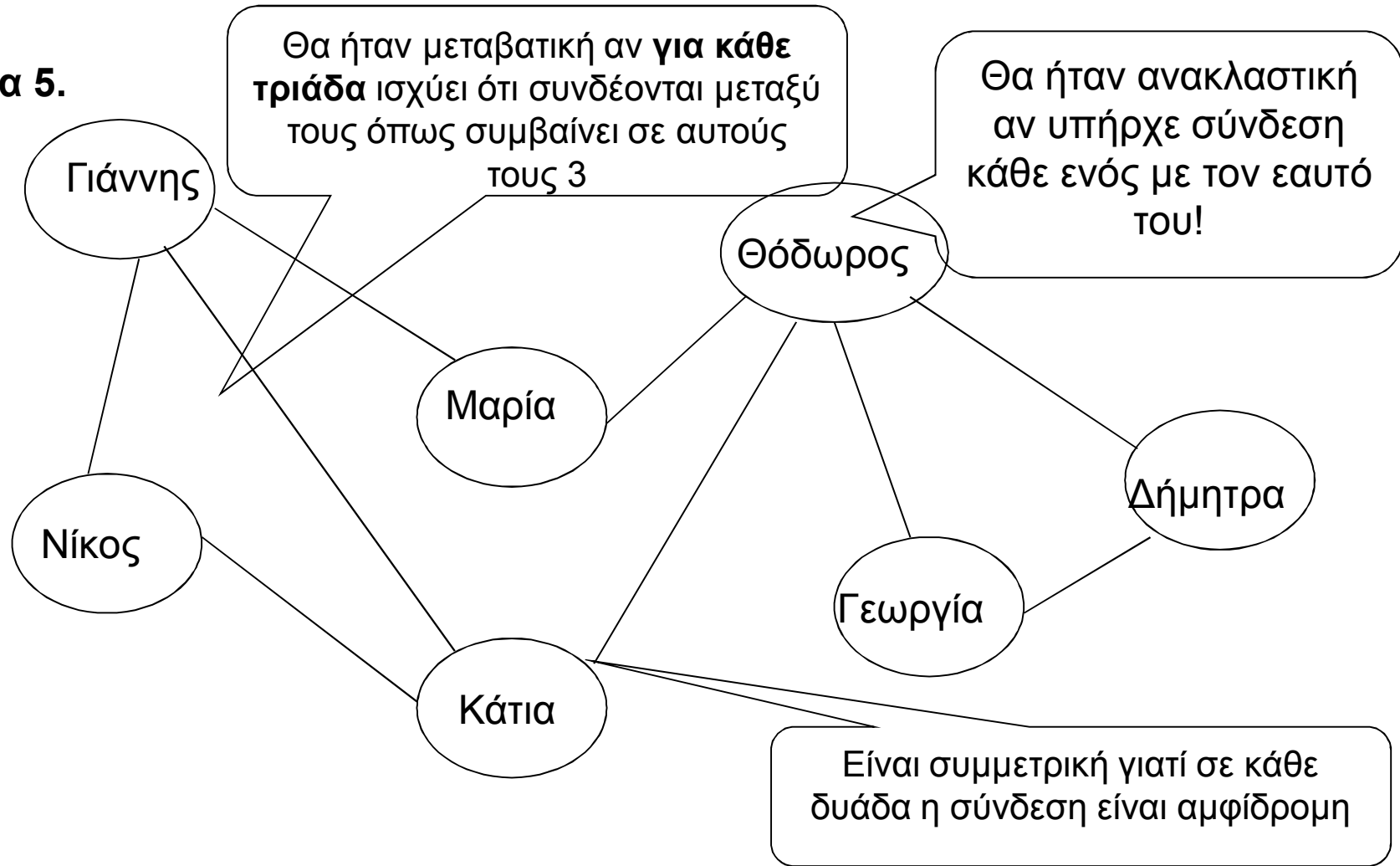
Η Σχέση μπορεί να είναι

- Η σχέση είναι **ανακλαστική** αν $(a, a) \in R$ για κάθε a [δηλαδή αν ισχύει για τον εαυτό του].
- Η σχέση είναι **συμμετρική** αν για κάθε $(a, \beta) \in R$ το $(\beta, a) \in R$ [δηλαδή αν δεν υπάρχει κατεύθυνση στη σχέση].
- Η σχέση είναι **αντισυμμετρική** αν για κάθε $(a, \beta) \in R$ το $(\beta, a) \notin R$ [δηλαδή υπάρχει κατεύθυνση στη σχέση].
- Η σχέση είναι **μεταβατική** αν για κάθε $(a, \beta), (\beta, \gamma) \in R$ το $(a, \gamma) \in R$ [δηλαδή σχετίζονται μέσω ενδιάμεσου].



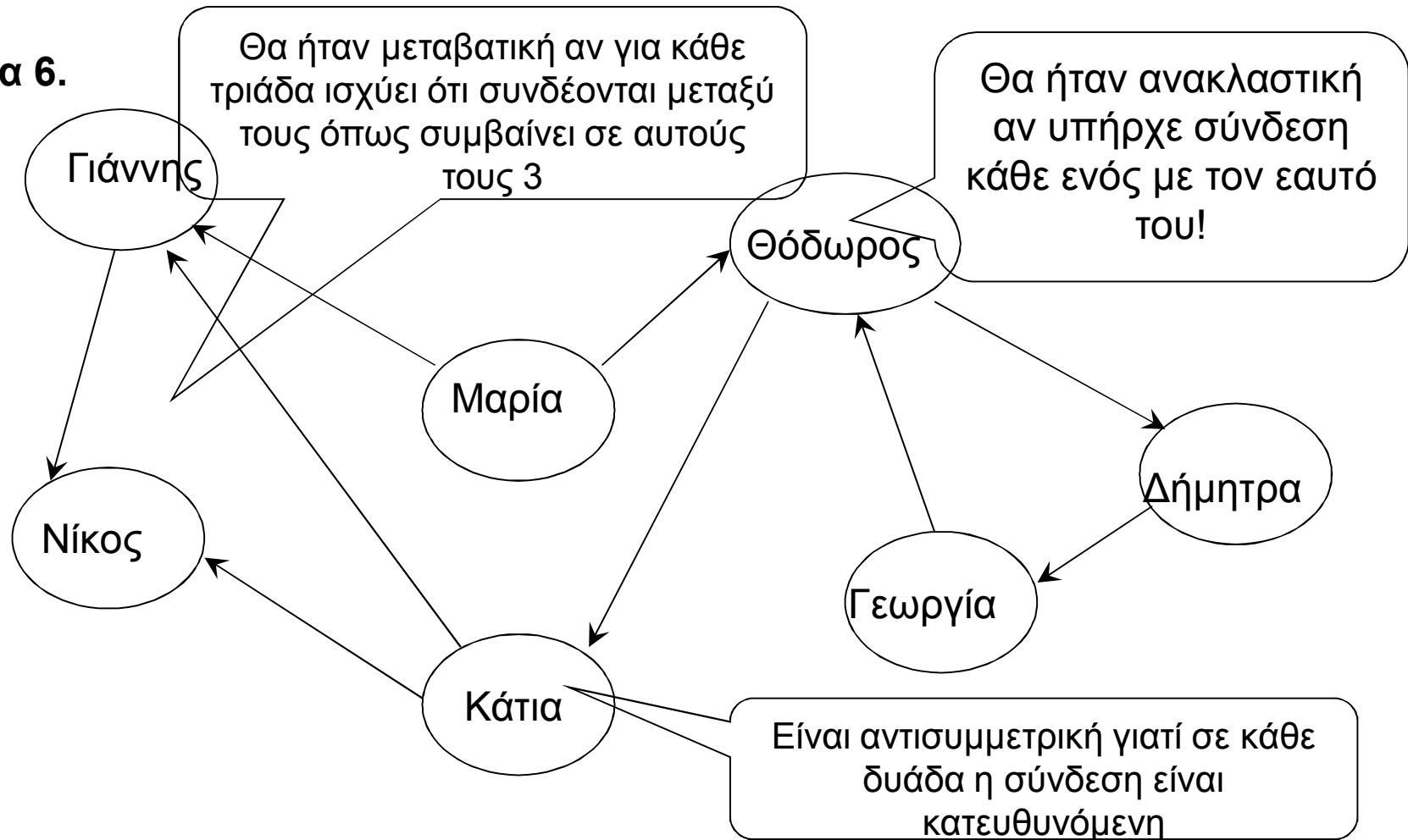
Σχέση, συνέχεια παραδείγματος 2

Σχήμα 5.



Σχέση, συνέχεια παραδείγματος 3

Σχήμα 6.



Συνάρτηση 1

- Μια σχέση μεταξύ δύο συνόλων (A : πεδίο ορισμού και B : πεδίο τιμών) για την οποία ισχύει ότι κάθε στοιχείο του A σχετίζεται με **ένα μόνο στοιχείο** του B ονομάζεται **συνάρτηση** και συμβολίζεται με το γράμμα f (ή ϕ). Γράφουμε $\phi:A \rightarrow B$ και αν το a είναι στοιχείο του A το $\phi(a)=\beta$ είναι στοιχείο του B .



Συνάρτηση 2

- Μπορεί –προφανώς- να υπάρχουν τιμές (στοιχεία του B) που δεν αντιστοιχούν σε στοιχεία του A . Αν πχ έχουμε μια συνάρτηση από ένα σύνολο 20 ατόμων στο σύνολο των κομμάτων που συμμετείχαν στις εκλογές είναι δυνατόν κάποιο κόμμα να μην το επέλεξε κανείς από τους 20. **Τότε το σύνολο τιμών $\phi(A)$ θα είναι υποσύνολο του B . Αν $\phi(A)=B$ τότε η συνάρτηση ονομάζεται «επί».**



Συνάρτηση 3

- Όπως είπαμε σε κάθε στοιχείο του A **αντιστοιχεί ένα μόνο** στοιχείο του B. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι μπορεί δύο ή περισσότερα στοιχεία του A να αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του B. **Παράδειγμα: σε μια έρευνα 1000 ατόμων περισσότεροι από ένας δηλώνουν ότι ψήφισαν κάποιο ή κάποια κόμματα.**



Συνάρτηση 4

- Αν συμβαίνει να αντιστοιχούν σε διαφορετικά στοιχεία του A διαφορετικά στοιχεία του B τότε η συνάρτηση λέγεται «αμφιμονοσήμαντη». Σε αυτή την περίπτωση αν είναι και «επί» λέγεται «ένα προς ένα». Δηλαδή σε κάθε στοιχεία του A αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο του B και αντίστροφα σε κάθε στοιχείο του B αντιστοιχεί ένα στοιχείο του A. Πχ αν A είναι το σύνολο των κομμάτων και B το σύνολο των αρχηγών των κομμάτων.



Συνάρτηση 5

- Με πεδίο ορισμού το $A = \{\text{χώρες ΕΕ}\}$ και πεδίο τιμών το $B = \{\text{τύποι εκλογικών συστημάτων}\}$ ορίζουμε μία συνάρτηση $f(X)=Y$, όπου X είναι στοιχείο του A και Y στοιχείο του B ,
- Παράδειγμα: $f(\text{Ελλάδας}) = (\text{ανοικτή λίστα, ΝΑΙ, 1})$.

Σημείωση: επειδή οι χώρες είναι 28 και οι τύποι 12 η συνάρτηση δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, επειδή όμως κάθε χώρα συμμετέχει στις εκλογές είναι «επί».



Η αρχή της συμπερίληψης-εξαίρεσης

- Όταν γνωρίζουμε τον πληθικό αριθμό του συνόλου A και τον πληθικό αριθμό του συνόλου B και θέλουμε να υπολογίσουμε τον πληθικό αριθμό του συνόλου $A \cap B$ (δηλαδή πόσα έχουν και τις δύο ιδιότητες) αρκεί να γνωρίζουμε πόσα έχουν τουλάχιστον μία από τις δύο (δηλαδή τον πληθικό αριθμό του συνόλου $A \cup B$).



Εφαρμογή

- Σε μια ομάδα 45 ατόμων οι οποίοι έχουν ή στυλό ή μολύβι ή και τα δύο, οι 30 έχουν μαζί τους στυλό και οι 25 μολύβι. Πόσοι έχουν και στυλό και μολύβι;
- Επειδή ισχύει $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ προκύπτει ότι $\#(A \cap B) = 30 + 25 - 45 = 10$
- Η αρχή αυτή γενικεύεται για 3 ή περισσότερα χαρακτηριστικά.
- Πράγματι: $\#(A \cup B \cup \Gamma) = \#A + \#B + \#\Gamma - \#(A \cap B) - \#(A \cap \Gamma) - \#(B \cap \Gamma) + \#(A \cap B \cap \Gamma)$.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ασκήσεις

Παραδείγματα

Άσκηση 1

- Έστω οι συλλογές αντικειμένων:
- $A_1 = \{1, \{1, 2\}, 2, 3, \{2, 3\}\}$ $A_2 = \{1, \{1, 2\}, 1, 3, \{2, 3\}\}$ $A_3 = \{1, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ $A_4 = \{1, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 1\}\}$ $A_5 = \{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ $A_6 = \{\{3, 1\}, \{2, 1\}, 1, \{3, 2\}\}$.
- Πόσες από τις παραπάνω συλλογές αντικειμένων είναι σύνολα; Από αυτά τα σύνολα ποια είναι ίσα μεταξύ τους;



Λύση Άσκησης 1

- Η συλλογή A_1 αποτελείται από τα εξής 5 διακεκριμένα αντικείμενα: $1, \{1, 2\}, 2, 3, \{2, 3\}$. Παρατηρούμε ότι 2 από τα αντικείμενα αυτά τα $\{1, 2\}$ και $\{2, 3\}$ είναι τα ίδια σύνολα, αλλά αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό του συνόλου. Άρα η συλλογή A_1 είναι ένα σύνολο. Η συλλογή A_2 αποτελείται από τα εξής 5 αντικείμενα: $1, \{1, 2\}, 1, 3, \{2, 3\}$. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο 1 εμφανίζεται περισσότερες από μία φορά στη συλλογή. Άρα η συλλογή A_2 δεν αποτελείται από διακεκριμένα αντικείμενα και δεν είναι ένα σύνολο. Η συλλογή A_3 αποτελείται από τα εξής 4 διακεκριμένα αντικείμενα: $1, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ εκ των οποίων 3 είναι τα ίδια σύνολα. Άρα η συλλογή A_3 είναι ένα σύνολο. Η συλλογή A_4 αποτελείται από τα εξής 4 αντικείμενα: $1, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 1\}$ εκ των οποίων 3 είναι τα ίδια σύνολα. Το αντικείμενο $\{1, 2\}$ είναι ίδιο με το αντικείμενο $\{2, 1\}$. Άρα η συλλογή A_4 δεν είναι σύνολο. Η συλλογή A_5 αποτελείται από τα εξής 5 διακεκριμένα αντικείμενα: $1, 2, 3, \{1, 2\}, \{2, 3\}$ εκ των οποίων 2 είναι τα ίδια σύνολα. Άρα η συλλογή A_5 είναι ένα σύνολο. Η συλλογή A_6 αποτελείται από τα εξής 4 διακεκριμένα αντικείμενα: $\{3, 1\}, \{2, 1\}, 1, \{3, 2\}$ εκ των οποίων 3 είναι τα ίδια σύνολα. Άρα η συλλογή A_6 είναι σύνολο. Το σύνολο $A_1 = \{1, \{1, 2\}, 2, 3, \{2, 3\}\}$ μπορεί να γραφεί και ως εξής: $\{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, δηλαδή όπως το σύνολο A_5 και συνεπώς τα δύο σύνολα είναι ίσα μεταξύ τους. Το σύνολο $A_6 = \{\{3, 1\}, \{2, 1\}, 1, \{3, 2\}\}$ μπορεί να γραφεί και ως εξής: $\{\{1, 3\}, \{1, 2\}, 1, \{2, 3\}\} = \{1, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ δηλαδή όπως το σύνολο A_3 και συνεπώς τα δύο σύνολα είναι ίσα μεταξύ τους.



Άσκηση 2

- Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;
- (i) $\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\} \in \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατσαφέρης}\}$ (ii) $\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\} \subseteq \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατσαφέρης}\}$ (iii) $\{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}\} \subseteq \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατσαφέρης}\}$ (iv) $\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\} \in \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατσαφέρης}\}\}$ (v) $\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\} \subseteq \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατσαφέρης}\}\}$ (vi) $\{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}\} \subseteq \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατσαφέρης}\}\}$.



Λύση Άσκησης 2

- Το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης} αποτελείται από τα εξής 5 στοιχεία: Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης και προφανώς το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} δεν είναι κανένα από αυτά. Η πρόταση λοιπόν δεν είναι αληθής.
- Το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} αποτελείται από τα εξής δύο στοιχεία: Καραμανλής, Παπανδρέου και καθένα από αυτά είναι και στοιχείο του συνόλου {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, οπότε η πρόταση είναι αληθής.
- Το σύνολο {{Καραμανλής, Παπανδρέου}} έχει μόνο ένα στοιχείο: το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} το οποίο δεν είναι στοιχείο του συνόλου {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, οπότε η πρόταση δεν είναι αληθής.
- Το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} αποτελεί ένα από τα δύο στοιχεία του συνόλου {{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}} και η πρόταση είναι αληθής.
- Το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} αποτελείται από τα εξής δύο στοιχεία: Καραμανλής, Παπανδρέου και κανένα από αυτά τα στοιχεία δεν ανήκει στο σύνολο {{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}}. Η πρόταση λοιπόν δεν είναι αληθής.
- Το σύνολο {{Καραμανλής, Παπανδρέου}} έχει μόνο ένα στοιχείο: το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} το οποίο είναι και στοιχείο του συνόλου {{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}} και η πρόταση είναι αληθής.



Άσκηση 3 και λύση

- 3. Έστω το σύνολο $A = \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}$. Να ορίσετε το δυναμοσύνολο $P(A)$ του συνόλου A .
- δυναμοσύνολο του A είναι $P(A) = \{\emptyset, \{\text{Καραμανλής}\}, \{\text{Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα}\}, \{\text{Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπαρήγα}\}, \{\text{Καραμανλής, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Παπανδρέου, Παπαρήγα}\}, \{\text{Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}\}$.



Άσκηση 4

- 4. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατσαφέρης}\}$ και $B = \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα}\}$. Να βρεθούν όλα τα υποσύνολα X του A για τα οποία ισχύει: $B \cap X = \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}$.



Λύση Άσκησης 4

- δυναμοσύνολο του συνόλου $A = \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}\}$ έχει ως εξής: $P(A) = \{\emptyset, \{\text{Καραμανλής}\}, \{\text{Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα}\}, \{\text{Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπαρήγα}\}, \{\text{Καραμανλής, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Καραμανλής, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Παπανδρέου, Παπαρήγα}\}, \{\text{Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Παπανδρέου, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Παπαρήγα, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπαρήγα, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Καραμανλής, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Παπανδρέου, Παπαρήγα, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}\}\}$ Θέλουμε να βρούμε τα σύνολα $X \in P(A)$ για τα οποία $B \cap X = \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}$, όπου $B = \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα}\}$. Συνεπώς το σύνολο X θα πρέπει οπωσδήποτε να περιέχει τα στοιχεία Καραμανλής, Παπανδρέου αλλά όχι το στοιχείο Παπαρήγα, οπότε το σύνολο X θα μπορούσε να είναι ένα από τα παρακάτω: $\{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Καρατζαφέρης}\}, \{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}\}\}$.



Άσκηση 5

- 5. Έστω τα σύνολα $A = \{\{\text{Καραμανλής}, \text{Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα}, \text{Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας}, \text{Καρατσαφέρης}\}\}$, $B = \{\{\text{Τσοβόλας}, \text{Καρατσαφέρης}\}\}$ και $\Gamma = \{\text{Τσοβόλας}, \text{Καρατσαφέρης}\}$. Να βρείτε τα σύνολα: $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $A \oplus B$, $A \cap \Gamma$, $A \cup \Gamma$, $A - \Gamma$, $A \oplus \Gamma$.



Λύση Άσκησης 5

- $A \cap B = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} \cap \{\{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} = \{\{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\}$
 $A \cup B = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} \cup \{\{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\}$
 $A - B = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} - \{\{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}\}$
 $A \oplus B = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} \oplus \{\{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}\}$
 $A \cap \Gamma = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} \cap \{\{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} = \emptyset$
 $A \cup \Gamma = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} \cup \{\{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\}$
 $A - \Gamma = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} - \{\{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}\}$
 $A \oplus \Gamma = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}, \{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} \oplus \{\{\text{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}\}\} = \{\{\text{Καραμανλής, Παπανδρέου}\}, \{\text{Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}\}\}$



Άσκηση 6

- 6. Έστω A το σύνολο όλων των Ελλήνων βουλευτών, B το σύνολο των βουλευτών του ΠΑ.ΣΟ.Κ., Γ το σύνολο των βουλευτών της Ν.Δ., Δ το σύνολο των βουλευτών του Κ.Κ.Ε., E το σύνολο των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Γρεβενών, Z το σύνολο των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Δράμας, και H το σύνολο των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Β΄ Θεσσαλονίκης. Να εκφράσετε με συμβολισμούς της θεωρίας συνόλων τις παρακάτω προτάσεις:
- Όλοι οι βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Γρεβενών ανήκουν στη Νέα Δημοκρατία.
- Το Κ.Κ.Ε. δεν έχει κανένα βουλευτή στη εκλογική περιφέρειας Δράμας.
- Όλοι οι βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Β΄ Θεσσαλονίκης ανήκουν είτε στη Νέα Δημοκρατία είτε στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. είτε στο Κ.Κ.Ε.
- Αν από τους βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Δράμας αφαιρέσουμε τους βουλευτές του ΠΑ.ΣΟ.Κ., όλοι οι υπόλοιποι βουλευτές ανήκουν στη Νέα Δημοκρατία.



Λύση Άσκησης 6

- Αφού όλοι οι βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Γρεβενών ανήκουν στη Νέα Δημοκρατία, τότε όλα τα στοιχεία του συνόλου E που είναι το σύνολο των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Γρεβενών θα πρέπει να είναι και στοιχεία του συνόλου Γ που είναι το σύνολο των βουλευτών της Ν.Δ., οπότε: $E \subseteq \Gamma$.
- Εφόσον το Κ.Κ.Ε. δεν έχει κανένα βουλευτή στη εκλογική περιφέρεια Δράμας τότε το σύνολο Δ που είναι το σύνολο των βουλευτών του Κ.Κ.Ε. δεν έχει κανένα κοινό στοιχείο με το σύνολο Z που είναι το σύνολο των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Δράμας, οπότε $\Delta \cap Z = \emptyset$. Ένας άλλος τρόπος για να συμβολίσουμε την παραπάνω πρόταση θα μπορούσε να είναι ο εξής: Αφού το Κ.Κ.Ε. δεν έχει κανένα βουλευτή στη εκλογική περιφέρεια Δράμας, τότε όλοι οι βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Δράμας ανήκουν στο συμπληρωματικό του συνόλου Δ ως προς το σύνολο A δηλαδή το σύνολο όλων των Ελλήνων βουλευτών, οπότε $Z \subseteq CA\Delta$.
- Το σύνολο H των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Β΄ Θεσσαλονίκης θα πρέπει να είναι υποσύνολο της ένωσης των συνόλων B που είναι το σύνολο των βουλευτών του ΠΑ.ΣΟ.Κ., Γ που είναι το σύνολο των βουλευτών της Ν.Δ. και Δ που είναι το σύνολο των βουλευτών του Κ.Κ.Ε., οπότε $H \subseteq B \cup \Gamma \cup \Delta$.
- Οι βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Δράμας που απομένουν μετά την αφαίρεση των βουλευτών του ΠΑ.ΣΟ.Κ. αποτελούν το σύνολο $Z-B$. Όλα τα στοιχεία αυτού του συνόλου θα πρέπει να ανήκουν στη Νέα Δημοκρατία δηλαδή στο σύνολο Γ , οπότε $Z-B \subseteq \Gamma$.



Άσκηση 7 και λύση

- 7. Αν τα σύνολα A , B , Γ , Δ , E , Z , και H ορίζονται όπως παραπάνω, πως θα ερμηνεύατε τα σύνολα CAB , $CAB \cap H$, $CAB \cap CA\Delta \cap Z$ και $(B \cup \Gamma) \cap Z$.

Το σύνολο CAB αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο A και δεν ανήκουν στο B δηλαδή αποτελείται από όλους τους βουλευτές όλης της επικράτειας οι οποίοι δεν ανήκουν στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. Το σύνολο $CAB \cap H$, αποτελείται από τους βουλευτές οι οποίοι δεν ανήκουν στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. και εκλέχθηκαν στη Β΄ Θεσσαλονίκης Το σύνολο $CAB \cap CA\Delta \cap Z$ αποτελείται από τους βουλευτές οι οποίοι δεν ανήκουν ούτε στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. ούτε στο Κ.Κ.Ε. και εκλέχθηκαν στην εκλογική περιφέρεια Δράμας. Το σύνολο $(B \cup \Gamma) \cap Z$ αποτελείται από τους βουλευτές οι οποίοι ανήκουν είτε στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. είτε στη Ν.Δ. και εκλέχθηκαν στην εκλογική περιφέρεια Δράμας.



Άσκηση 8

- 8. Έστω το σύνολο $A = \{\text{ΚΑΣΤΑΝΙΔΗΣ, ΒΕΝΙΖΕΛΟΣ, ΑΡΑΠΟΓΛΟΥ, ΤΣΟΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ, ΜΑΓΚΡΙΩΤΗΣ, ΓΚΙΟΥΛΕΚΑΣ, ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ, ΟΡΦΑΝΟΣ, ΠΑΠΑΘΕΜΕΛΗΣ, ΡΑΠΤΗ, ΣΠΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ, ΚΑΛΑΦΑΤΗΣ, ΚΟΚΚΟΡΗΣ, ΧΟΥΡΜΟΥΖΙΑΔΗΣ, ΞΗΡΟΤΥΡΗ}\}$ και το σύνολο $B = \{\text{ΠΑ.ΣΟ.Κ., Ν.Δ., Κ.Κ.Ε., ΣΥΝ}\}$. Έστω ο μηχανισμός ϕ που αντιστοιχίζει καθέναν από τους βουλευτές του συνόλου A στο πολιτικό κόμμα στο οποίο ανήκει, δηλαδή σε κάποιο από τα στοιχεία του συνόλου B . Είναι η ϕ συνάρτηση; Αν η ϕ είναι συνάρτηση είναι ένα προς ένα;



Λύσης Άσκησης 8

- Έχουμε $\phi(\text{ΚΑΣΤΑΝΙΔΗΣ})=\text{ΠΑ.ΣΟ.Κ.}$ $\phi(\text{ΒΕΝΙΖΕΛΟΣ})=\text{ΠΑ.ΣΟ.Κ.}$
 $\phi(\text{ΑΡΑΠΟΓΛΟΥ})=\text{ΠΑ.ΣΟ.Κ.}$ $\phi(\text{ΤΣΟΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ})=\text{ΠΑ.ΣΟ.Κ.}$
 $\phi(\text{ΜΑΓΚΡΙΩΤΗΣ})=\text{ΠΑ.ΣΟ.Κ.}$ $\phi(\text{ΚΑΣΤΑΝΙΔΗΣ})=\text{ΠΑ.ΣΟ.Κ.}$
 $\phi(\text{ΓΚΙΟΥΛΕΚΑΣ})=\text{Ν.Δ.}$ $\phi(\text{ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ})=\text{Ν.Δ.}$ $\phi(\text{ΟΡΦΑΝΟΣ})=\text{Ν.Δ.}$
 $\phi(\text{ΠΑΠΑΘΕΜΕΛΗΣ})=\text{Ν.Δ.}$ $\phi(\text{ΡΑΠΤΗ})=\text{Ν.Δ.}$ $\phi(\text{ΣΠΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ})=\text{Ν.Δ.}$
 $\phi(\text{ΚΑΛΑΦΑΤΗΣ})=\text{Ν.Δ.}$ $\phi(\text{ΚΟΚΚΟΡΗΣ})=\text{Ν.Δ.}$
 $\phi(\text{ΧΟΥΡΜΟΥΖΙΑΔΗΣ})=\text{Κ.Κ.Ε.}$ $\phi(\text{ΞΗΡΟΤΥΡΗ})=\text{ΣΥΝ.}$
- Η ϕ είναι μία συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B αφού όλα το κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του B . Η ϕ είναι συνάρτηση επί του B καθώς για κάθε στοιχείο του B υπάρχει ένα πρότυπο στοιχείο στο A . Η αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση καθώς μπορούμε να βρούμε δύο διαφορετικά πρότυπα που αντιστοιχούν στην ίδια εικόνα και συνεπώς η ϕ δεν είναι ένα προς ένα.



Άσκηση 9

- 9. Έστω ένα σύνολο A ψηφοφόρων και ένα σύνολο B πολιτικών κομμάτων. Ποια πιθανή ερμηνεία θα μπορούσατε να δώσετε στο καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$; Έστω R_1 και R_2 δύο διμελείς σχέσεις από το A στο B . Αν η διμελής σχέση $R_1 = \{(\alpha, \beta) \mid \text{ο ψηφοφόρος } \alpha \text{ έβλεπε θετικά το πολιτικό κόμμα } \beta \text{ το } 2000\}$ και $R_2 = \{(\alpha, \beta) \mid \text{ο ψηφοφόρος } \alpha \text{ βλέπει θετικά το πολιτικό κόμμα } \beta \text{ το } 2004\}$ να ερμηνεύσετε τις παρακάτω διμελείς σχέσεις: $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $C_A \times B \setminus R_1$ και $R_1 \setminus R_2$.



Λύση Άσκησης 9

- Αν θεωρήσουμε ότι το διατεταγμένο ζεύγος (α, β) σημαίνει ότι ο ψηφοφόρος α ψηφίζει το πολιτικό κόμμα β , τότε μια πιθανή ερμηνεία που θα μπορούσε να δοθεί στο καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι ότι συμπεριλαμβάνει όλους τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους οι ψηφοφόροι του συνόλου A θα μπορούσαν να ψηφίσουν τα κόμματα του συνόλου B . Η διμελής σχέση $R_1 \cap R_2$ περιλαμβάνει τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) για τα οποία ο ψηφοφόρος α έβλεπε θετικά το πολιτικό κόμμα β και το 2000 και το 2004. Η διμελής σχέση $R_1 \cup R_2$ περιλαμβάνει τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) για τα οποία ο ψηφοφόρος α έβλεπε θετικά το πολιτικό κόμμα β ή το 2000 ή το 2004. Η διμελής σχέση $C \times B - R_1$ περιλαμβάνει τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) για τα οποία ο ψηφοφόρος α δεν έβλεπε θετικά το πολιτικό κόμμα β το 2000. Η διμελής σχέση $R_1 - R_2$ περιλαμβάνει τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) για τα οποία ο ψηφοφόρος α έβλεπε θετικά το πολιτικό κόμμα β το 2000 αλλά δεν βλέπει θετικά το πολιτικό κόμμα β το 2004.



Άσκηση 10 και λύση

- Να προσδιοριστεί ο αριθμός των ακεραίων μεταξύ 1 και 100 οι οποίοι διαιρούνται από καθέναν από τους ακεραίους 3,4 και 7.
- Έστω A_1 το σύνολο ακεραίων που διαιρούνται με το 3, A_2 το σύνολο ακεραίων που διαιρούνται με το 4 και A_3 το σύνολο ακεραίων που διαιρούνται με το 7. Είναι προφανές ότι ο αριθμός που αναζητούμε είναι το $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Έχουμε τα παρακάτω: $|A_1| = [100/3] = 33$, $|A_2| = [100/4] = 25$, $|A_3| = [100/7] = 14$, $|A_1 \cap A_2| = [100/(3 \times 4)] = 8$, $|A_1 \cap A_3| = [100/(3 \times 7)] = 4$, $|A_2 \cap A_3| = [100/(4 \times 7)] = 3$, και $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = [100/(3 \times 4 \times 7)] = 1$. Εφαρμόζοντας την αρχή του εγκλεισμού και του αποκλεισμού: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ οδηγούμαστε στο παρακάτω αποτέλεσμα: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 33 + 25 + 14 - 8 - 4 - 3 + 1 = 58$.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Χάρτης 2: Χάρτης της ζώνης του Ευρώ 1999-2014, Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα,
(<https://www.ecb.europa.eu/euro/intro/html/map.el.html>).
- Σχήμα 1-6: Σχήματα για διδακτικούς σκοπούς του μαθήματος.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Πίνακες
- Πίνακας 1-2 :Παραδείγματα.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεόδωρος Χατζηπαντελής. «Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή. Σύνολα, Σχέσεις, Συναρτήσεις (II)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS376/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>





Σύνολα, Σχέσεις, Συναρτήσεις

Επεξεργασία: Σωτήρογλου Μαρίνα
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

