



Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή

Ενότητα 3.1 : Απαρίθμηση – Συνδυαστική (I).

Θεόδωρος Χατζηπαντελής
Τμήμα Πολιτικών Επιστημών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Απαρίθμηση - Συνδυαστική

Μέρος Ι



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα ενότητας

1. Συνδυασμοί, Μεταθέσεις, Διατάξεις και Απαρίθμηση.
 - i. Συνδυαστική.
 - ii. Συνδυασμοί.
 - iii. Απαρίθμηση.
 - iv. Διατάξεις.



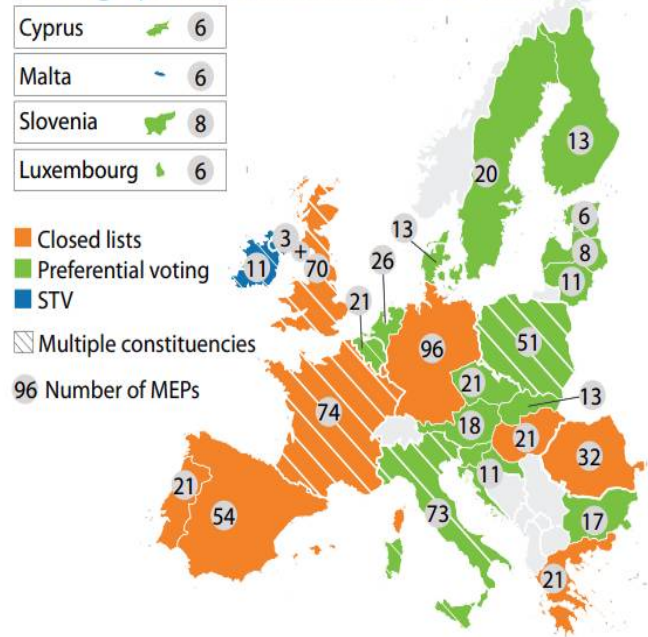
Εκλογικό Σύστημα

Χάρτης 1: εκλογικό σύστημα κρατών μελών.

Voting system and number of MEPs

PUBLISHED ON NOVEMBER 13, 2013 IN 2014 EUROPEAN ELECTIONS: NATIONAL RULES - FULL SIZE IS 606 x 558 PIXELS - LEAVE A COMMENT

Voting system and number of MEPs



- Evarts Anosovs, Eva-Maria Poptcheva, Giulio Sabbati Members' Research Service 2014 European elections: national rules, Voting system and number of MEPs, November 13, 2013.

Voting system and number of MEPs



Συνδυαστική 1

- Ας πάρουμε το υποσύνολο των χωρών που χρησιμοποιούν το σύστημα κλειστής λίστας. Αυτό είναι $KL = \{\text{Βουλγαρία, Ουγγαρία, Γερμανία, Γαλλία, UK, Ισπανία, Πορτογαλία}\}$. Αν θέλουμε να διαλέξουμε 3 από αυτές τις χώρες για να μελετήσουμε το σύστημα τους, αναρωτιόμαστε πόσες είναι οι επιλογές που έχουμε.



Συνδυαστική 2

- Αρκεί να σκεφτούμε ότι πρέπει να σχηματίσουμε όλα τα υποσύνολα μεγέθους 3 από το αρχικό σύνολο που έχει 7 στοιχεία και να μετρήσουμε τον αριθμό τους. Οι δύο αυτοί αριθμοί παίζουν κεντρικό ρόλο στην επιλογή μας. Συμβολίζουμε **τον ένα με n** (τον πληθικό αριθμό του συνόλου μας, 7 στο παράδειγμα) **και τον άλλο με k** (ο πληθικός αριθμός του υποσυνόλου, 3 στο παράδειγμα μας).



Συνδυασμοί 1

- Όπως θα δούμε λίγο παρακάτω, ο πληθικός αριθμός του συνόλου όλων των υποσυνόλων μεγέθους 3 από το σύνολο αναφοράς μας μεγέθους 7 (γενικά των υποσυνόλων μεγέθους k από ένα σύνολο μεγέθους n) είναι ίσος με τον αριθμό **των συνδυασμών n ανά k** [7 ανά 3 στο παράδειγμα] και συμβολίζεται **$C(n,k)$** .



Συνδυασμοί 2

- Ένας συνδυασμός είναι το υποσύνολο {Βουλγαρία, Ουγγαρία, Γερμανία}. Ένας άλλος το {Βουλγαρία, Γερμανία, Γαλλία}. Υπάρχουν γενικά 35 συνδυασμοί, όπως θα μπορούσαμε να μετρήσουμε **αν τους απαριθμήσουμε έναν προς έναν αναλυτικά**.



Απαρίθμηση 1

- Για να «απαριθμήσουμε», δηλαδή να μετρήσουμε έναν-έναν τους συνδυασμούς n ανά k (στο παράδειγμα μας υποσύνολα μεγέθους 3 ενός συνόλου μεγέθους 7), ξεκινάμε γράφοντας όλα τα υποσύνολα στα οποία περιέχεται ένα από τα στοιχεία. Έστω η **Βουλγαρία**.
- Δεύτερο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα άλλα 6 και άρα υπάρχουν 6 επιλογές. Γράφουμε τις έξη αυτές δυνατότητες. Για κάθε μία από τις έξη υπάρχουν 5 επιλογές για την θέση (αφού η Βουλγαρία και ότι από τα 6 έχουμε επιλέξει για δεύτερο δεν μπορεί να επαναληφθούν).



Απαρίθμηση 2

- Έτσι από το $KL = \{\text{Βουλγαρία, Ουγγαρία, Γερμανία, Γαλλία, UK, Ισπανία, Πορτογαλία}\}$ προκύπτουν τα εξής υποσύνολα που περιέχουν τη **Βουλγαρία**:
- $\{\text{Bo, Ου, Γε}\}, \{\text{Bo, Ου, Γα}\}, \{\text{Bo, Ου, UK}\}, \{\text{Bo, Ου, Ισ}\}, \{\text{Bo, Ου, Πο}\}, \{\text{Bo, Γε, Γα}\}, \{\text{Bo, Γε, UK}\}, \{\text{Bo, Γε, Ισ}\}, \{\text{Bo, Γε, Πο}\}, \{\text{Bo, Γα, UK}\}, \{\text{Bo, Γα, Ισ}\}, \{\text{Bo, Γα, Πο}\}, \{\text{Bo, UK, Ισ}\}, \{\text{Bo, UK, Πο}\}, \{\text{Bo, Ισ, Πο}\}.$



Απαρίθμηση 3

- Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο στο σύνολο {Ουγγαρία, Γερμανία, Γαλλία, UK, Ισπανία, Πορτογαλία} και προκύπτουν τα εξής υποσύνολα (μεγέθους 3) που περιέχουν την **Ουγγαρία**:
 - {Ου, Γε, Γα}, {Ου, Γε, UK}, {Ου, Γε, Ισ}, {Ου, Γε, Πο}, {Ου, Γα, UK}, {Ου, Γα, Ισ}, {Ου, Γα, Πο}, {Ου, UK, Ισ}, {Ου, UK, Πο}, {Ου, Ισ, Πο}.



Απαρίθμηση 4

- Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο στο σύνολο {Γερμανία, Γαλλία, UK, Ισπανία, Πορτογαλία} και προκύπτουν τα εξής υποσύνολα (μεγέθους 3) που περιέχουν την **Γερμανία** :
- {Γε, Γα, UK}, {Γε, Γα, Ισ}, {Γε, Γα, Πο}, {Γε, UK, Ισ}, {Γε, UK, Πο}, {Γε, Ισ, Πο}.



Απαρίθμηση 5

- Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο στο σύνολο {Γαλλία, UK, Ισπανία, Πορτογαλία} και προκύπτουν τα εξής υποσύνολα (μεγέθους 3) που περιέχουν την **Γαλλία**:

{Γα, UK, Ισ}, {Γα, UK, Πο}, {UK, Ισ, Πο}.

Και τέλος έχουμε το σύνολο {UK, Ισπανία, Πορτογαλία} που είναι το ίδιο μεγέθους 3. Συνολικά μετρώντας τα υποσύνολα που σχηματίσαμε έχουμε $15+10+6+3+1=35$.



Οι Συνδυασμοί

- Ακόμη και αν οι δύο αριθμοί (N και k) διαιρούνται ακριβώς, **δηλαδή αν N/k κάνει p** , αυτό δεν σημαίνει όπως λανθασμένα πιστεύουν κάποιοι ότι υπάρχουν p συνδυασμοί. Η διαίρεση του συνόλου N στοιχείων σε υποσύνολα μεγέθους k , ξένα μεταξύ τους, ορίζει μια διαμέριση του συνόλου που αποτελείται από p σύνολα.



Διατάξεις 1

- Έστω ότι η χώρα που θα διαλέξουμε πρώτη θα αναλάβει την προεδρία της τριμελούς επιτροπής, η χώρα που θα διαλέξουμε δεύτερη θα αναλάβει την αντιπροεδρία και η τρίτη θα αναλάβει την γραμματεία της επιτροπής. **Έχει δηλαδή σημασία η σειρά επιλογής.**
- Και κατά συνέπεια σχηματίζουμε διατεταγμένες τριάδες (και όχι υποσύνολα). Διαλέγουμε πρώτα μία από τις 7 χώρες. Όποια και αν διαλέξουμε, για την επόμενη (δεύτερη) θέση της τριάδας έχουμε 6 επιλογές και κατά συνέπεια όποια και αν έχουμε διαλέξει για δεύτερη, για την επόμενη (τρίτη) θέση έχουμε 5 επιλογές.



Διατάξεις 2

- Δηλαδή, αν έχουμε τρεις θέσεις έχουμε $7*6*5=210$ διαφορετικές επιλογές. Ο πληθικός αριθμός του συνόλου των **διατεταγμένων υποσυνόλων** μεγέθους 3 από τα 7 στοιχεία του συνόλου μας είναι ίσος με τον αριθμό των **διατάξεων** n ανά k στοιχείων και συμβολίζεται με $P(n,k)$.



Μεταθέσεις 1

- Αν $n=k$ τότε έχουμε να σχηματίσουμε τις διατάξεις n ανά n στοιχείων. Στο παράδειγμα μας για το σύνολο {Βουλγαρία, Γερμανία, Γαλλία} αν μας ενδιαφέρει η σειρά θα έχουμε τρεις επιλογές για την προεδρία της επιτροπής, για κάθε μία από αυτές δυο επιλογές για την αντιπροεδρία και για κάθε μία από αυτές 1 επιλογή για την γραμματεία.



Μεταθέσεις 2

Έτσι οι διατάξεις 3 ανά 3 στοιχείων (μεταθέσεις)
θα είναι $3*2*1=6$:

- ✓ {Βουλγαρία, Γερμανία, Γαλλία}.
- ✓ {Βουλγαρία, Γαλλία, Γερμανία}.
- ✓ {Γερμανία, Βουλγαρία, Γαλλία}.
- ✓ {Γερμανία, Γαλλία, Βουλγαρία}.
- ✓ {Γαλλία, Βουλγαρία, Γερμανία}.
- ✓ {Γαλλία, Γερμανία, Βουλγαρία}.



Μεταθέσεις 3

- Οι διατάξεις n ανά n στοιχείων ονομάζονται **μεταθέσεις n στοιχείων**. Ο αριθμός τους είναι ίσος με το γινόμενο $1*2*\dots*n$. Προσέξτε ότι ο συμβολισμός είναι \dots που σημαίνει ότι συνεχίζουμε να πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς από το 2 μέχρι το n . Το γινόμενο αυτό λέγεται n παραγοντικό και συμβολίζεται με $n!$.



Οι Διατάξεις 1

- Αν σκεφτούμε ότι οι διατάξεις των n ανά k είναι το γινόμενο $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ (γινόμενο k όρων ξεκινώντας από το n) (παρατηρήστε ότι για 7 ανά 3 έχουμε $7 \cdot 6 \cdot 5$) μπορούμε να γράψουμε με τη βοήθεια του παραγοντικού τον αριθμό των διατάξεων ως εξής:

$$P(n,k) = n! / (n-k)!$$



Οι Διατάξεις 2

- Πράγματι γιατί αφού:

$n! = 1 * 2 * \dots * n$ και $(n-k)! = 1 * 2 * \dots * (n-k)$ αν
διαιρέσουμε το $n!$ με το $(n-k)!$ θα μείνουν
στον αριθμητή οι όροι:

$$n * (n-1) * \dots * (n-k+1).$$

Στο παράδειγμα μας:

$$7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7, \quad (7-3)! = 4! = 1 * 2 * 3 * 4 \quad \text{και} \\ 7! / 4! = 7 * 6 * 5.$$



Πως Προκύπτει ο αριθμός συνδυασμών

- $P(n,n)=n!/(n-n)!=n!/0!$ και επειδή εξ ορισμού $0!=1$, $P(n,n)=n!$.
- Αν παρατηρήσουμε ότι από κάθε συνδυασμό k στοιχείων (δηλαδή από ένα σύνολο μεγέθους k) προκύπτουν $k!$ μεταθέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των συνδυασμών των n ανά k στοιχείων αρκεί να διαιρέσουμε τον αριθμό των διατάξεων των n ανά k με τον αριθμό των μεταθέσεων των k στοιχείων.



Παρατηρούμε

- Πράγματι ισχύει:

$$C(n,k)=P(n,k)/P(k,k)=n!/[(n-k)!k!].$$

- Παρατηρήστε ότι στο παράδειγμα μας για κάθε μη διατεταγμένη τριάδα έχουμε έξι διατεταγμένες τριάδες. Έτσι:

$$C(7,3)=P(7,3)/P(3,3)=7!/[(7-3)!3!]=$$

$$=1*2*...*7/1*2*...*4*1*2*3=$$

$$=7*5=35.$$



Συνδυασμοί, Μεταθέσεις, Διατάξεις

- Συνδυασμός είναι ένα **υποσύνολο** μεγέθους k από ένα σύνολο μεγέθους n στο οποίο **δεν** έχει σημασία η σειρά των στοιχείων του.
[συνδυασμοί k από n ή συνδυασμοί n ανά k].
- Διάταξη είναι ένα **διατεταγμένο υποσύνολο** μεγέθους k από ένα σύνολο μεγέθους n στο οποίο έχει σημασία η σειρά των στοιχείων του.
[διατάξεις k από n ή διατάξεις n ανά k].
- Μετάθεση είναι ένα υποσύνολο μεγέθους k από ένα σύνολο μεγέθους k στο οποίο έχει σημασία η σειρά των στοιχείων του.
[διατάξεις k από k].



Συνδυασμοί (παράδειγμα)

- Στις εκλογές του 2012 στην Α΄ Θεσσαλονίκης το ψηφοδέλτιο κάθε κόμματος είχε μέχρι 20 ονόματα. Ο εκλογέας είχε τη δυνατότητα να σημειώσει την προτίμηση του σε μέχρι 4 υποψήφιους στο ψηφοδέλτιο που επέλεξε. Για παράδειγμα, στο ψηφοδέλτιο του ΚΚΕ μπορούσε να επιλέξει μέχρι 4 από τους 19 (εκτός από την επικεφαλής του κόμματος).



Συνδυασμοί (παράδειγμα ΚΚΕ)

Εικόνα 1: Ψηφοδέλτιο ΚΚΕ 2012.

ΠΑΠΑΡΗΓΑ ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ του ΝΙΚΟΛΑΟΥ		
ΑΓΑΘΑΓΓΕΛΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΣ του ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ		
ΒΑΛΑΝΑΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ του ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ		
ΒΑΡΔΑΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ του ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ		
ΒΕΛΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ του ΣΑΡΑΝΤΗ		
ΖΙΩΓΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ του ΗΛΙΑ		
ΔΕΛΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ του ΙΩΑΝΝΗ		
ΚΑΠΕΤΑΝΓΙΩΡΓΗ ΟΥΡΑΝΙΑ (ΡΑΝΙΑ) του ΓΕΩΡΓΙΟΥ		
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ του ΝΙΚΟΛΑΟΥ		
ΜΑΓΓΟΥ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ του ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ		
ΜΑΛΛΙΑ – ΣΤΟΛΙΔΟΥ ΧΡΥΣΑΦΕΝΙΑ του ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ		
ΜΗΤΣΙΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ του ΑΣΤΕΡΙΟΥ		
ΜΩΨΣΙΔΟΥ – ΠΟΥΛΟΥ ΣΟΦΙΑ του ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ		
ΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΔΟΥ ΠΑΡΘΕΝΑ (ΝΕΝΑ) του ΝΑΠΟΛΕΟΝΤΟΣ		
ΠΑΠΑΕΠΑΜΕΙΝΩΝΔΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ του ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗ		
ΡΑΪΖΗ ΗΛΕΚΤΡΑ του ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ		
ΤΗΛΙΚΙΔΟΥ ΕΙΡΗΝΗ του ΙΩΑΝΝΗ		
ΤΣΑΜΠΟΥΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ του ΘΕΟΔΩΡΟΥ		
ΤΣΙΑΟΥΣΗΣ ΚΥΡΙΑΚΟΣ του ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ		
ΧΑΤΖΗ ΑΘΑΝΑΣΙΑ του ΝΙΚΟΛΑΟΥ		



Συνδυασμοί (σταυροδοσία)

- Έτσι μπορούσε να σημειώσει 0, 1, 2, 3 ή 4 επιλογές (σταυρούς) χωρίς να έχει σημασία η σειρά επιλογής του. Όπως είναι φανερό αναζητούμε τα υποσύνολα μεγέθους 0, μεγέθους 1, μεγέθους 2, μεγέθους 3 και μεγέθους 4 από τη λίστα των 19 υποψηφίων που είναι ο αντίστοιχος αριθμός των συνδυασμών 19 ανά 0, 19 ανά 1, 19 ανά 2, 19 ανά 3 και 19 ανά 4.



Άρα

- 19 ανά 0 που αντιστοιχεί στα διαφορετικά ψηφοδέλτια χωρίς σταυρό **κάνει 1**.
- 19 ανά 1 που αντιστοιχεί στα διαφορετικά ψηφοδέλτια με ένα σταυρό **κάνει 19**.
- Εκεί που είχαμε δισταυρίες υπάρχουν 19 ανά 2 [$19 \cdot 9 = 171$] διαφορετικές περιπτώσεις.
- Για τις τρισταυρίες έχουμε $19 \cdot 18 \cdot 17 / 1 \cdot 2 \cdot 3 = 19 \cdot 3 \cdot 17 = 969$ διαφορετικές περιπτώσεις και για τις τετρασταυρίες έχουμε $19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 19 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 4 = 3876$ περιπτώσεις.



Ο κανόνας του αθροίσματος

- Για να υπολογίσουμε το σύνολο όλων των συνδυασμών (δηλαδή για 0, 1, 2, 3 και 4 σταυρούς) παρατηρούμε ότι μπορεί να συμβεί μία μόνο από αυτές τις περιπτώσεις (η πραγματοποίηση μιας αποκλείει όλες τις άλλες) και έτσι το σύνολο είναι το άθροισμα:

$$1+19+171+969+3.876=5.036.$$



Ο κανόνας του γινομένου 1

- Όπως έχουμε πει υπάρχουν 7 χώρες που χρησιμοποιούν σύστημα κλειστής λίστας, 2 που χρησιμοποιούν STV, και 19 που χρησιμοποιούν σύστημα ανοικτής λίστας. Αν θέλουμε να επιλέξουμε 3 χώρες από την πρώτη ομάδα, 1 από την δεύτερη και 4 από την τρίτη για να επιλέξουμε 8 χώρες τότε παρατηρούμε ότι η επιλογή των 3 από την πρώτη ομάδα δεν επηρεάζει την επιλογή 1 από τη δεύτερη που δεν επηρεάζει την επιλογή 4 από την τρίτη.



Ο κανόνας του γινομένου 2

- Ο αριθμός των συνδυασμών 7 ανά 3 είναι 35.
- Ο αριθμός των συνδυασμών 2 ανά 1 είναι 2.
- Ο αριθμός των συνδυασμών 19 ανά 4 είναι 3.876.

Έτσι ο συνολικός αριθμός είναι το γινόμενο των αριθμών $35 * 2 * 3876 = 271.320$.



Ο κανόνας του γινομένου 3

- Γενικά αν $n=n_1+n_2$ και $k=k_1+k_2$ και θέλουμε να διαλέξουμε k_1 από τα n_1 και k_2 από τα n_2 ο συνολικός αριθμός συνδυασμών (διατάξεων) είναι το γινόμενο των επιμέρους. Πχ για συνδυασμούς είναι $C(n_1, k_1) * C(n_2, k_2)$. Αυτό γενικεύεται για περισσότερες από δύο ομάδες.



Άθροισμα ή γινόμενο;

- Ο κανόνας του αθροίσματος χρησιμοποιείται όταν έχουμε **ξένα** μεταξύ τους γεγονότα (δηλαδή η πραγματοποίηση ενός αποκλείει τα άλλα).
- Ο κανόνας του γινομένου χρησιμοποιείται όταν έχουν **ανεξάρτητα** μεταξύ τους γεγονότα (δηλαδή όταν η πραγματοποίηση ενός δεν επηρεάζει τα άλλα).



Διατάξεις (παράδειγμα)

- Στις εκλογές του 2007 για την εκλογική περιφέρεια Carlow Kilkenny (με 5 έδρες) στην Ιρλανδία συμμετείχαν 11 υποψήφιοι (**3 από το Fianna Fáil, 3 από το Fine Gael, 1 από το Sinn Féin, 2 από το Labour Party, 1 από το Green Party και 1 από το Progressive Democrats**).



Διατάξεις (ανά κόμμα)

- Στις εκλογές του 2007 για την εκλογική περιφέρεια Carlow Kilkenny (με 5 έδρες) στην Ιρλανδία συμμετείχαν 11 υποψήφιοι (**3 από το Fianna Fáil, 3 από το Fine Gael, 1 από το Sinn Féin, 2 από το Labour Party, 1 από το Green Party και 1 από το Progressive Democrats**).



Διατάξεις (ανά κόμμα/Υποψήφιοι)

Εικόνα 2 : Υποψήφιοι.

Carlow Kilkenny

Bobby Aylward	FF
Fergal Browne	FG
Kathleen Funchion	SF
Phil Hogan	FG
Walter Lacey	PD
John McGuinness	FF
M J Nolan	FF
Michael O'Brien	LAB
John Paul Phelan	FG
Jim Townsend	LAB
Mary White	G



Διατάξεις (επιλογές)

- Στις εκλογές ο κάθε εκλογέας μπορεί να δηλώσει από 1 μέχρι 11 επιλογές (βάζοντας τους αριθμούς από το 1 μέχρι την μέγιστη επιλογή του δίπλα στο όνομα κάθε υποψηφίου). Αν πχ θέλει να δηλώσει 5 υποψηφίους πρέπει να βάλει τον αριθμό 1 σε κάποιον, 2 σε κάποιον άλλο, 3 σε κάποιον άλλο, 4 σε κάποιον άλλο και 5 σε κάποιον άλλο.



Διατάξεις (σειρά επιλογής)

- Επειδή έχει σημασία η σειρά επιλογής (υπάρχει **διάταξη** στις επιλογές του) για να βρούμε όλες τις πεντάδες υπολογίζουμε πόσες είναι οι διατάξεις των 11 ανά 5.

$$P(11,5)=11!/6!=55.440$$

Σημείωση: Αν θέλουμε και υπολογίσουμε όλες τις διατάξεις πρέπει να προσθέσουμε

$$P(11,1)+P(11,2)+\dots+P(11,11).$$



Διατάξεις (ο κανόνας αθροίσματος)

- Αυτό γιατί ο εκλογέας δεν είναι υποχρεωμένος να σημειώσει 11 επιλογές. Μπορεί να σημειώσει όσες θέλει από 1 μέχρι 11. Αν δεν σημειώσει καμία τότε το ψηφοδέλτιο δεν μετρά προφανώς. Ο αριθμός των διαφορετικών ψηφοδελτίων που μπορεί να προκύψουν υπολογίζεται με τον κανόνα του αθροίσματος.



Ο περιστερώνας 1

- Μία από τις πολύ απλές «αρχές» αλλά και πολύ χρήσιμη είναι η αρχή του περιστερώνα. Αν έχουμε 10 περιστέρια και 9 φωλιές είναι σίγουρο ότι σε κάποια από αυτές θα μπουν τουλάχιστον 2 περιστέρια. Πράγματι αφού αν σε κάθε μία μπει ένα, τότε σε κάποια θα μπει το 10^ο που περισσεύει. Προσέξτε ότι δεν ξέρουμε σε ποια από τις φωλιές θα μπει.



Ο περισσότερων 2

- Σε κάθε ομάδα 13 ατόμων είναι βέβαιο ότι 2 τουλάχιστον από αυτούς έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα. Κάποιο μήνα, όχι κάποιον συγκεκριμένο μήνα! Σε μια παρέα 8 ατόμων δύο τουλάχιστον έχουν γεννηθεί την ίδια μέρα της εβδομάδας.
- Η συνηθισμένη σύγχυση είναι η λανθασμένη πεποίθηση ότι έχουν γεννηθεί μια συγκεκριμένη μέρα (πχ Δευτέρα) ή ότι έχουν γενέθλια τον ίδιο συγκεκριμένο μήνα (πχ Σεπτέμβριο).



Μερικές χρήσιμες λέξεις

- **Τουλάχιστον** k : σημαίνει ότι ο αριθμός που προκύπτει είναι μεγαλύτερος ή το πολύ ίσος με k .
- **Ακριβώς** k : σημαίνει ότι ο αριθμός που προκύπτει είναι ίσος με k .
- **Το πολύ** k : σημαίνει ότι ο αριθμός που προκύπτει είναι μικρότερος ή το πολύ ίσος με k .



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνα 1-2: Παράδειγμα.
- Χάρτης 1 : Evarts Anosovs, Eva-Maria Poptcheva, Giulio Sabbati Members' Research Service 2014 European elections: national rules, Voting system and number of MEPs, November 13, 2013, (<http://www.europarl.europa.eu/eplibrary/InfoGraphic-2014-European-elections-national-rules.pdf> ,European Parliamentary Research Service).



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, . Θεόδωρος Χατζηπαντελής. «Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή. Απαρίθμηση – Συνδυαστική (I)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS376/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Σωτήρογλου Μαρίνα
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
πρόγραμμα για την ανάπτυξη



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

