ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αυτοματοποιημένη χαρτογραφία

Ενότητα # 12: Αναλυτικές μέθοδοι παρεμβολής

Ιωάννης Γ. Παρασχάκης
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αναλυτικές μέθοδοι παρεμβολής

Περιεχόμενα ενότητας

1. Πιστή αναλυτική παρεμβολή και πιστή αναλυτική του ελαχίστου μέτρου με τη ΜΕΤ
2. Εξομαλυντική αναλυτική παρεμβολή και υβριδική εξομαλυντική αναλυτική παρεμβολή με τη ΜΕΤ

Σκοποί ενότητας

- Κατανόηση των αναλυτικών μεθόδων παρεμβολής στα ψηφιακά χαρτογραφικά δεδομένα

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Αναλυτικές μέθοδοι παρεμβολής

Πιστή αναλυτική παρεμβολή και πιστή αναλυτική του ελαχίστου μέτρου με τη ΜΕΤ (1/6)

Μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα **R** μέσα από τη διαδικασία της ελαχιστοποίησης του τετραγώνου του μέτρου (νόρμα) της συνάρτησης **f(x,y)** ως ακολούθως:

$$||f||^2 = \frac{1}{A}\int_A (f - f_o)^2 \, dA = \min$$

Όπου Α είναι η περιοχή που γίνεται η παρεμβολή και f_o η μέση τιμή της συνάρτησης σ' αυτήν την περιοχή. Η f_o δίνεται ως εξής:

$$f_o = \frac{1}{A}\int_A f \, dA$$

Πιστή αναλυτική παρεμβολή και πιστή αναλυτική του ελαχίστου μέτρου με τη ΜΕΤ (2/6)

Θεωρώντας ό,τι

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \, \varphi_i$$

έχουμε

$$f_o = \frac{1}{A} \int_A \sum_{i=1}^{m} a_i \, \varphi_i \, dA = \sum_{i=1}^{m} a_i \, \frac{1}{A} \int_A \varphi_i \, dA$$

θέτοντας $q_i = \frac{1}{A} \int_A \varphi_i dA$

έχουμε $f_o = \sum_{i=1}^{m} a_i \, q_i = a^T q$

Πιστή αναλυτική παρεμβολή και πιστή αναλυτική του ελαχίστου μέτρου με τη ΜΕΤ (3/6)

Η αρχική συνθήκη ελαχίστου μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i \quad \text{και} \quad f = \sum_{j=1}^{m} a_j \varphi_j$$

Επίσης γράφοντας την f ως

$$\| f \|^2 = \frac{1}{A} \int_A f^2 \, dA - f_o^2 = \min$$

όπου τα φ_i και φ_j αναφέρονται στην ίδια συνάρτηση βάσης έχουμε

$$\frac{1}{A} \int_A f^2 dA = \sum_{i,j=1}^{m} [a_i \, a_j \, (\frac{1}{A} \int_A \varphi_i \, \varphi_j \, dA)] \quad \text{και θέτοντας} \quad Q = \frac{1}{A} \int_A \varphi_i \, \varphi_j \, dA$$

Πιστή αναλυτική παρεμβολή και πιστή αναλυτική του ελαχίστου μέτρου με τη ΜΕΤ (4/6)

καταλήγουμε λοιπόν

$$\frac{1}{A}\int_A f^2\, dA = a_i\, a_j\, Q_{ij} = a^T Q\, a$$

Επίσης

$f = (a^T q)^2 = (a^T q)^T (a^T q) = a^T q\, q^T a$

Ακόμη

$||f||^2 = a^T (Q – q\, q^T)\, a = \min$ και αντιστοιχώντας με την

$a^T R\, a = \min$ προκύπτει ό,τι ο πίνακας

$R = Q - q\, q^T$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πιστή αναλυτική παρεμβολή και πιστή αναλυτική του ελαχίστου μέτρου με τη ΜΕΤ (5/6)

Ένας άλλος τρόπος ορισμού της συνθήκης ελαχίστου είναι:

$$\| f \|^2 = \frac{1}{A} \int_A (f - f_o)^2 \, dA + \lambda \frac{1}{A} \int_A \| \text{grad}\, f \|^2 \, dA = \min$$

Η συνθήκη είναι ίδια με την προηγούμενη με επιπλέον όρο αυτόν που συμπεριλαμβάνει το

$$\lambda \frac{1}{A} \int_A \| \text{grad}\, f \|^2 \, dA$$

ο οποίος είναι η **μέση τετραγωνική κλίση** της συνάρτησης f στην περιοχή της παρεμβολής A

Πιστή αναλυτική παρεμβολή και πιστή αναλυτική του ελαχίστου μέτρου με τη ΜΕΤ (6/6)

Η συνθήκη ελαχίστου καταλήγει ως εξής:

$||f||^2 = a^T (Q - q\, q^T + \lambda\, G)\, a = a^T R\, a = \min$

Όπου G είναι πίνακας με στοιχεία

$$G = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dA$$

και ο πίνακας $R = Q\, q\, q^T + \lambda\, G$

Το μοντέλο της πιστής παρεμβολής είναι ντετερμινιστικό και οι άγνωστοι παράμετροι a_i είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Μέσω του πίνακα R μας δίνεται η δυνατότητα να ελέγξουμε τη μορφή του πολυωνύμου.

Εξομαλυντική αναλυτική παρεμβολή και υβριδική εξομαλυντική αναλυτική παρεμβολή με τη ΜΕΤ (1/3)

Όταν ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων **m** είναι μικρότερος από τον αριθμό των παρατηρήσεων **n (m<n)**, τότε το σύστημα δεν έχει καμιά λύση. Για να ξεπεράσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι να δεχθούμε ό,τι η συνάρτηση **f(χ,y)** δεν περνάει ακριβώς από τα σημεία παρατηρήσεων z_i, αλλά για κάθε ένα από τα σημεία αυτά ισχύει η σχέση:

$$v_i = z_i - f(x_i, y_i)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να θεωρηθεί αντίστοιχη με μια εξίσωση παρατήρησης της ΜΕΤ, όπου ο όρος $\mathbf{v_i}$ ερμηνεύεται ως κάποια εξομάλυνση.

Εξομαλυντική αναλυτική παρεμβολή και υβριδική εξομαλυντική αναλυτική παρεμβολή με τη ΜΕΤ (2/3)

Εφαρμόζοντας την ΜΕΤ έχουμε τη συνθήκη ελαχιστοποίησης:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, v_i^2 = v^T \, P \, v = \min$$

Όπου P πίνακας βάρους, συνήθως διαγώνιος. Το σύστημα των εξισώσεων γίνεται

$z = \Phi\, a + v$

Η λύση δίνεται από τη σχέση

$$\hat{a} = (\Phi^T \, P \, \Phi)^{-1} \, \Phi^T \, P \, z$$

Ο πίνακας $\Phi^T \, P \, \Phi$ είναι συμμετρικός με διαστάσεις $m \times m$, εφόσον ο P είναι μοναδιαίος

Εξομαλυντική αναλυτική παρεμβολή και υβριδική εξομαλυντική αναλυτική παρεμβολή με τη ΜΕΤ (3/3)

Αν για συνθήκη ελαχίστου θεωρήσουμε την

$\mathbf{v^T\, P\, v + a^T\, R\, a = min}$

η μέθοδος ονομάζεται αναλυτική υβριδική εξομαλυντική παρεμβολή και αντιστοιχεί στο μοντέλο εξισώσεων παρατηρήσεων με βάρη στις παραμέτρους. Ελαχιστοποιεί ταυτόχρονα και τις αποχές $\mathbf{v_i}$ **i=1,2,3, … ,n** και τις παραμέτρους $\mathbf{a_j}$ **j=1,2,3, … m**

Η λύση του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{a} = R^{-1}\,\Phi^T\,(\Phi\,R^{-1}\,\Phi^T + P^{-1})^{-1}\,z$$

ή

$$\hat{a} = (\Phi^T\,P\,\Phi + R)^{-1}\,\Phi^T\,P\,z$$

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δημήτριος Σαραφίδης
Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2012-13