ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αυτοματοποιημένη χαρτογραφία

Ενότητα # 13: Αλγοριθμικές μέθοδοι παρεμβολής

Ιωάννης Γ. Παρασχάκης
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σκοποί ενότητας

- Κατανόηση των αλγοριθμικών μεθόδων παρεμβολής στα ψηφιακά χαρτογραφικά δεδομένα

Αλγοριθμικές μέθοδοι παρεμβολής

Περιεχόμενα ενότητας

- Πιστή και εξομαλυντική παρεμβολή με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής
- Η συνάρτηση συμμεταβλητότητας
- Απλή και κεντροβαρική κινητή μέση τιμή και δυναμικό

Πιστή εξομαλυντική παρεμβολή με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής (1/7)

Όπως ήδη αναφέραμε οι άγνωστες παράμετροι a_i, $i=1,2,3,\dots,m$ μπορούν να θεωρηθούν ως στοχαστικές μεταβολές που χαρακτηρίζονται από στατιστικές ποσότητες. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας βάρους **R** των αγνώστων παραμέτρων, μπορεί να οριστεί ως ο αντίστροφος κάποιου πίνακα συμμεταβλητότητας των a_i. Θεωρώντας ότι οι παράμετρες a_i είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους και μεταβλητότητα σ_i^2, ο πίνακας **R** είναι διαγώνιος με στοιχεία:

$$R_{ii} = \frac{1}{\sigma_i^2}, i = 1,2,3,\dots,m$$

Πιστή εξομαλυντική παρεμβολή με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής (2/7)

Θεωρώντας δύο σημεία P_1 και P_2 , καθώς και τις τιμές της συνάρτησης παρεμβολής $f(P_1)$ και $f(P_2)$ στα παραπάνω σημεία, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Νόμο Μετάδοσης των Μεταβλητοτήτων στην f(x,y) και να υπολογίσουμε τη συμμεταβλητότητα $\sigma(f(P_1),f(P_2))$:

$$\sigma(f(P),f(P)) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f(P_1)}{\partial a_i} \frac{\partial f(P_2)}{\partial a_j} \sigma(a_i,a_j)$$

Επειδή οι παράμετροι a_i είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους ισχύει ότι:

$$\sigma(a_i,a_j) = \begin{cases} \sigma_i^2 \ \text{για}\ i=j \\ 0\ \text{για}\ i \neq j \end{cases}$$

Πιστή εξομαλυντική παρεμβολή με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής (3/7)

Επίσης
έχουμε :

$$\frac{\partial f(P_1)}{\partial a_i} = \varphi_i(P_1), \frac{\partial f(P_2)}{\partial a_j} = \varphi_i(P_2)$$

Οπότε
καταλήγουμε :

$$\sigma(f(P), f(P)) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f(P_1)}{\partial a_i} \frac{\partial f(P_2)}{\partial a_j} \sigma(a_i, a_j) = \sum_{i,j=1}^{m} \varphi_i(P_1)\, \varphi_j(P_2)\, \sigma_i^2$$

Πιστή εξομαλυντική παρεμβολή με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής (4/7)

Μετά τον υπολογισμό των παραμέτρων $\hat{a}_i$ η τιμή της συνάρτησης $\hat{f}$ για κάποιο τυχαίο σημείο P, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{f}(P) = \hat{a}_1\,\varphi_1(P) + \hat{a}_2\,\varphi_2(P) + \ldots + \hat{a}_m\,\varphi_m(P) =$$

$$= [\varphi_1(P)\ \ \varphi_2(P)\ \ \ldots\ \ \varphi_m(P)]\ [a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_m]^T\ =\ \varphi^T\,\hat{a}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση το $\hat{a}$:

$$\hat{f}(P) = \varphi^T\,\hat{a} = \varphi^T\,R^{-1}\,\Phi^T(\Phi\,R^{-1}\Phi^T)^{-1}\,z$$

Θέτοντας

$$C = \Phi\,R^{-1}\Phi^T \text{ και } c_P = \Phi\,R^{-1}\varphi$$

έχουμε

$$\hat{f}(P) = c_P^T\,C^{-1}\,z$$

Πιστή εξομαλυντική παρεμβολή με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής (5/7)

Οι πίνακες C και c_P έχουν στοιχεία

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(P_i)\,\varphi_k(P_j)\,\sigma_k^2 = \sigma(P_i, P_j)$$

και

$$c_{P_i} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(P_i)\,\varphi_k(P)\,\sigma_k^2 = \sigma(P, P_I)$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πιστή εξομαλυντική παρεμβολή με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής (6/7)

Η λύση της $\widehat{f}(P) = c_P^T\, C^{-1}\, z$ μπορεί να βρεθεί αν ξέρουμε

τη συνάρτηση συμμεταβλητότητας της f(x,y) χωρίς να είναι ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις βάσης και χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους.

Αν αντί της συνθήκης ελαχιστοποίησης $\mathbf{a^T\, R\, a = min}$, εφαρμόσουμε την $v^T\, P\, v + a^T\, R\, a = \min$, τότε θεωρώντας ότι $P = \Sigma^{-1}$, όπου Σ ο πίνακας συμμεταβλητότητας των αποκλίσεων v_i από την επιφάνεια παρεμβολής, έχουμε:

$$\widehat{f}(P) = \varphi^T\, R^{-1}\, \Phi^T\, (\Phi\, R^{-1}\, \Phi^T + \Sigma)^{-1}\, z = c_P^T\, (C + \Sigma)^{-1}\, z$$

Πιστή εξομαλυντική παρεμβολή με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής (7/7)

Η μέθοδος $\widehat{f}(P) = c_P^T \, C^{-1} \, z$

ονομάζεται **Πιστή Σημειακή Προσαρμογή με τη ΜΕΤ** (Least Squares Collocation), γιατί προσαρμόζει την επιφάνεια παρεμβολής στις αρχικές τιμές του φαινομένου. Αντιθέτως η μέθοδος

$$\widehat{f}(P) = c_P^T \, (C + \Sigma)^{-1} \, z$$

ονομάζεται **Εξομαλυντική Σημειακή Προσαρμογή με τη ΜΕΤ** γιατί δίνει καινούργιες τιμές στην επιφάνεια δεδομένων

Η συνάρτηση συμμεταβλητότητας (1/2)

Η συνάρτηση συμμεταβλητότητας παίζει σπουδαίο ρόλο. Άλλωστε σ’ αυτήν στηρίζεται όλη η φιλοσοφία της μεθόδου. Συνήθως χρησιμοποιούμε ως συνάρτηση συμμεταβλητότητας μια εμπειρική συνάρτηση. Τέτοιου είδους συναρτήσεις είναι της μορφής:

$$\sigma(r) = (1 - f)\, e^{-\frac{r}{m^2}}$$

όπου η φυσική σημασία των παραμέτρων είναι η παρακάτω:

f επιδρά στο βαθμό εξομάλυνσης. Μεγάλη τιμή f μεγάλη εξομάλυνση

m επιδρά στην κλίση της συνάρτηση και τέλος

$$r = \sqrt{(x_P + x_{P_i}) + (y_P - y_{P_i})}$$

Η συνάρτηση συμμεταβλητότητας (2/2)

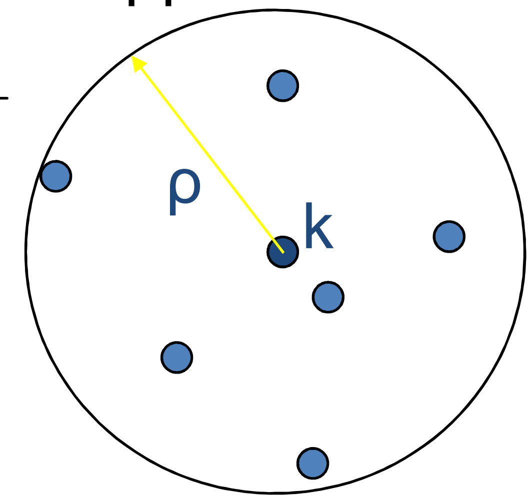
Οι παράμετροι της συνάρτησης σ(r) μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια των τιμών της επιφάνειας δεδομένων, μέσω της διαδικασίας κατασκευής ιστογράμματος.

Εάν τέλος η συνάρτηση συμμεταβλητότητας που επιλέξαμε είναι ικανοποιητική, αυτό θα φανεί από τα αποτελέσματα της παρεμβολής.

Απλή και κεντροβαρική κινητή μέση τιμή και δυναμικό (1/4)

Θεωρώντας ό,τι έχουμε γνωστές τιμές ενός φαινομένου z_i, i=1,2,3, … , n η τιμή του φαινομένου σε κάποιο σημείο **k** υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των σημείων των γνωστών τιμών, που τυχαίνει να βρίσκονται εντός ενός κύκλου με κέντρο το k και ακτίνα **ρ** την οποία επιλέγουμε εμείς:

$\widehat{f}_k = \frac{1}{M}\sum_{r_i \le \rho} f_i$, όπου M το πλήθος των σημείων που βρίσκονται εντός του κύκλου και $r = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$



Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **κινητή μέση τιμή**

Απλή και κεντροβαρική κινητή μέση τιμή και δυναμικό (2/4)

Αν δεν πάρουμε απλά το μέσο όρο αλλά δώσουμε και κάποιο βάρος στις τιμές του φαινομένου, τότε έχουμε τον **κεντροβαρικό κινητό μέσο όρο** :

$$\widehat{f}_k = \sum_i p_i \, f_i$$

όπου

$$p_i = \frac{p'}{\sum_i p'_i}$$

και $p_i' = p'(r_i)$, δηλαδή εξαρτάται από την απόσταση r

Απλή και κεντροβαρική κινητή μέση τιμή και δυναμικό (3/4)

Η έννοια του **δυναμικού** που χρησιμοποιείται στη Χαρτογραφία δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας κινητός μέσος όρος που δίνεται από τη σχέση:

$$p = \begin{cases} 1 \ \text{για} \ i = j \\ z_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j}{r_{ij}} \ \text{για} \ i \neq j \end{cases}$$

όπου p_i το δυναμικό στο σημείο i, z_i η τιμή του φαινομένου στο σημείο i και r_{ij} η απόσταση ανάμεσα στα σημεία I και j. Γράφοντας την παραπάνω σχέση με μορφή πινάκων έχουμε:

Απλή και κεντροβαρική κινητή μέση τιμή και δυναμικό (4/4)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{r_{12}} & . & \frac{1}{r_{1m}} \\ \frac{1}{r_{21}} & 1 & . & \frac{1}{r_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{r_{n1}} & \frac{1}{r_{n2}} & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ z_m \end{bmatrix}$$

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δημήτριος Σαραφίδης
Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2012-13