



# Ακτομηχανική και λιμενικά έργα

Διάλεξη 2<sup>η</sup>. Επιφανειακοί κυματισμοί- κύματα

Γιάννης Ν. Κρεσενίτης  
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Επιφανειακοί κυματισμοί - κύματα

Ως κυματισμός ορίζεται:

κάθε **περιοδική** ή **μη περιοδική** διαταραχή της επιφάνειας της θάλασσας.

Η **χρονική κλίμακα μεταβολής** της στάθμης της επιφάνειας (περίοδος  $T$ , για τους περιοδικούς κυματισμούς) ποικίλει ανάλογα με την προέλευση γένεσης του κυματισμού, από μερικά sec σε μερικές ώρες.

Παλιρροιακά κύματα  $T=43000$  sec

ανεμογενή κύματα  $T=2-15$ sec



# Επιφανειακοί κυματισμοί - κύματα

April 24, 2005  
Waves at Presque Isle Park  
Marquette

1



2

Breakwater at Presque Isle Park  
Marquette



3

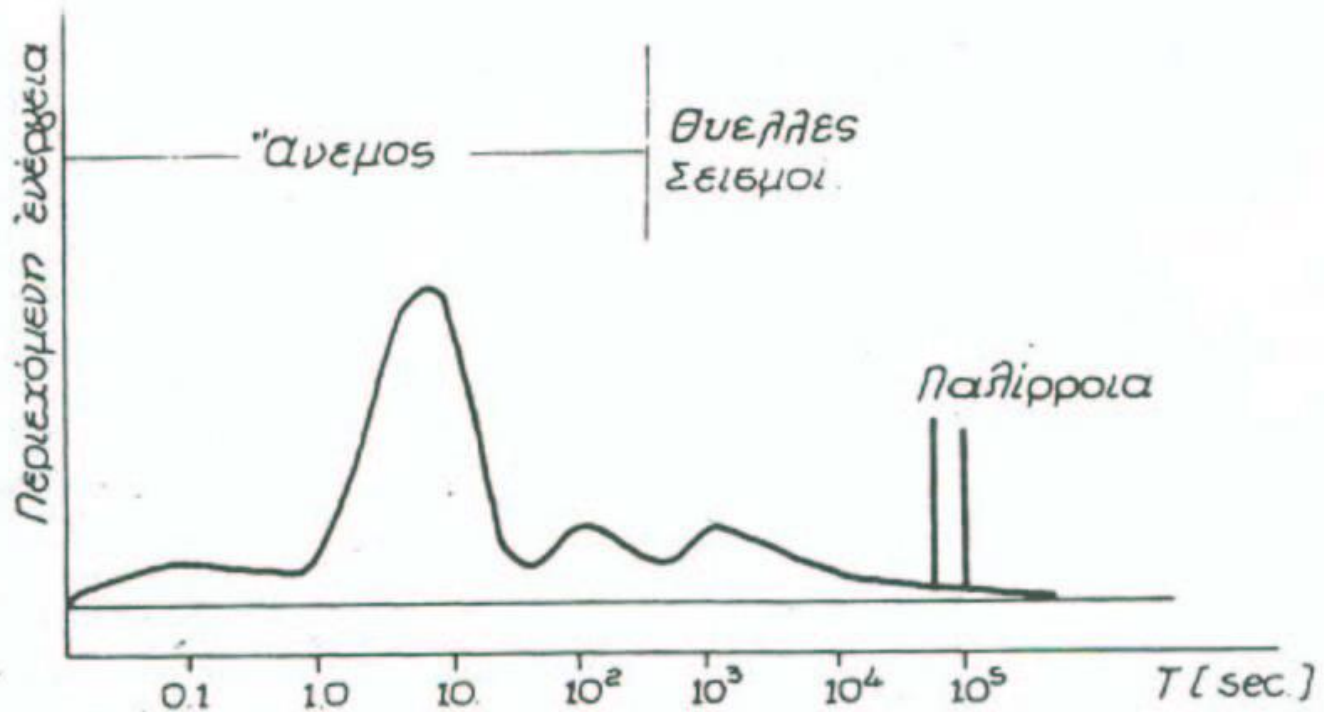


April 24, 2005  
Waves at Presque Isle Park  
Marquette

4



# Επιφανειακοί κυματισμοί - κύματα

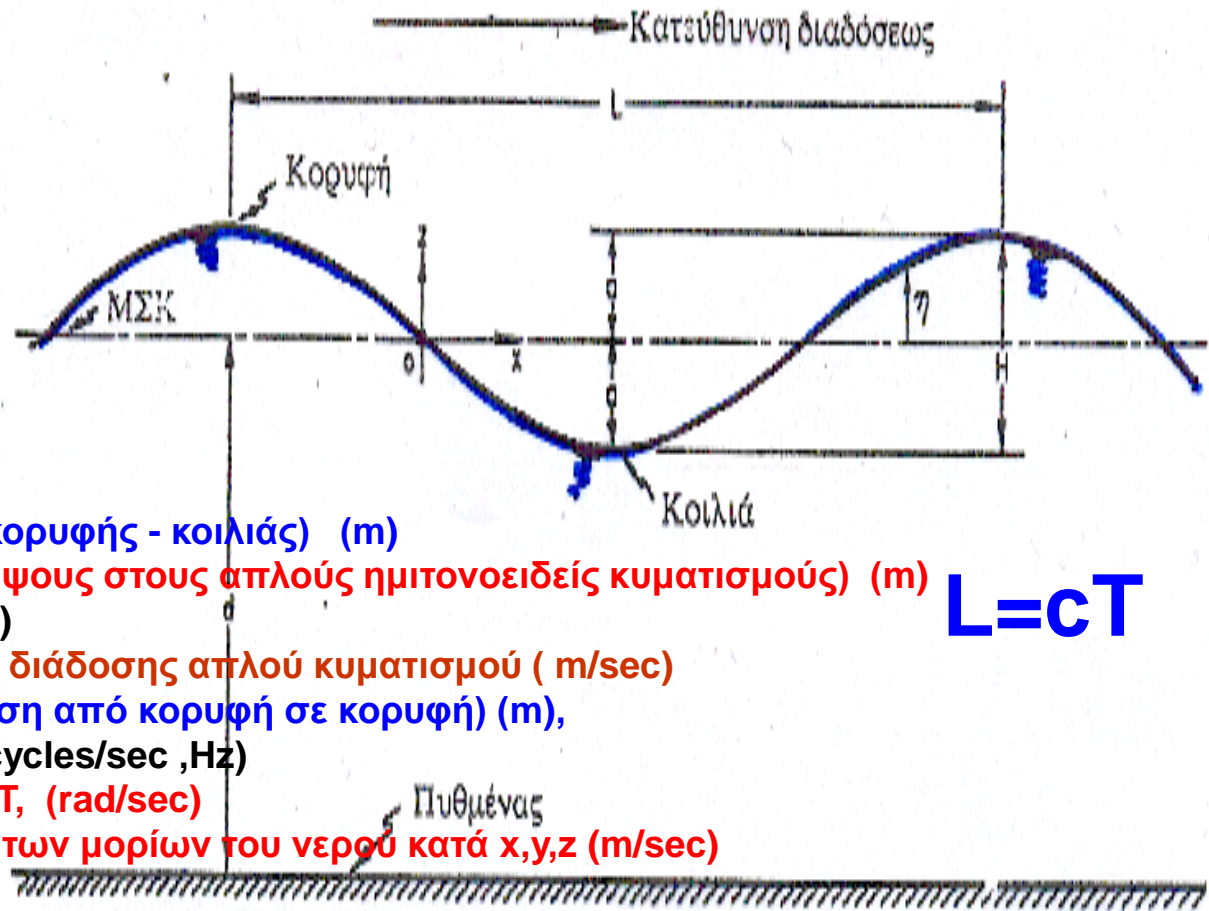


Περιεχόμενη ενέργεια σε διάφορες περιόδους



# ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$\eta, \zeta$  = υψόμετρο στάθμης ελεύθερης επιφάνειας πάνω από τη ΜΣΚ (m)  
 $d, h$  = βάθος του νερού από ΜΣΚ ως τον πυθμένα (m)



$H$  = ύψος κύματος (απόσταση κορυφής - κοιλιάς) (m)

$\alpha$  = πλάτος κύματος (μισό του ύψους στους απλούς ημιτονοειδείς κυματισμούς) (m)

$T$  = περίοδος του κύματος (sec)

$c$  = ταχύτητα φάσης ή ταχύτητα διάδοσης απλού κυματισμού ( m/sec)

$L$  = μήκος του κύματος (απόσταση από κορυφή σε κορυφή) (m),

$f$  = κυκλική συχνότητα =  $1/T$ , (cycles/sec ,Hz)

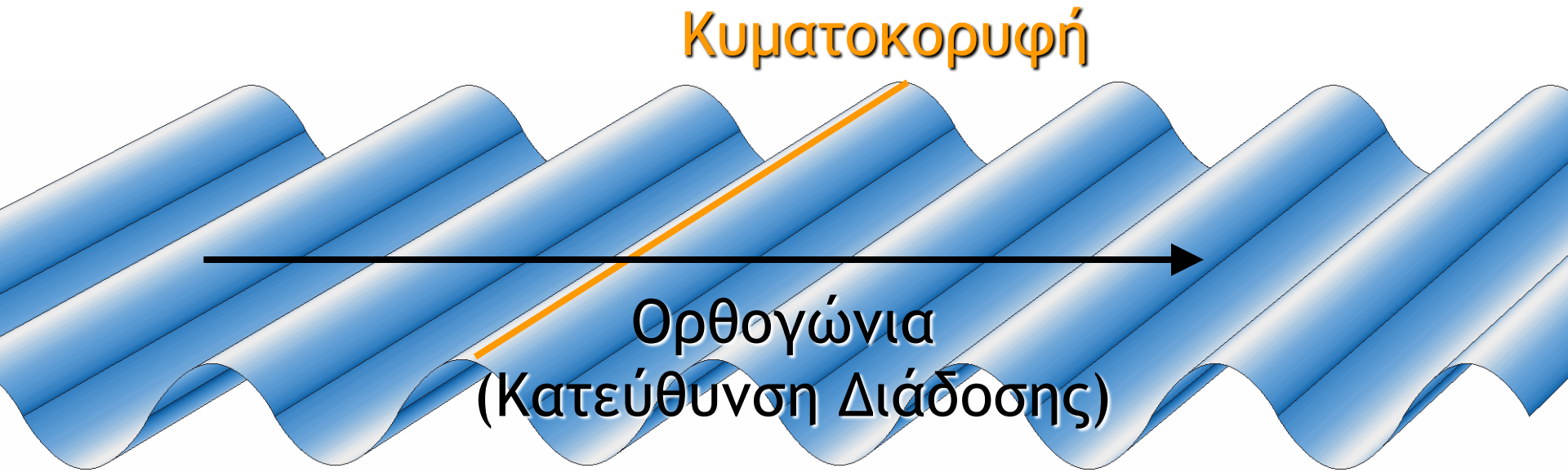
$\sigma, \omega$  = γωνιακή συχνότητα =  $2\pi/T$ , (rad/sec)

$u, v, w$  = συνιστώσες ταχύτητας των μορίων του νερού κατά  $x, y, z$  (m/sec)

$$L=cT$$



# Διάδοση κυματισμών



Κυματοκορυφή

Ορθογώνια  
(Κατεύθυνση Διάδοσης)



# Παράμετροι χαρακτηρισμού κύματος

$\epsilon = H/d$ , ό λόγος ύψους κύματος ως προς το βάθος της θάλασσας.

- κυματισμοί **απειροστού πλάτους** αν  $\epsilon < 10^{-1}$
- **πεπερασμένου πλάτους**, αν  $\epsilon > 10^{-1}$

$\beta = d/L$ , ό λόγος του βάθους της θάλασσας ως προς το μήκος κύματος

- **βραχείς κυματισμοί** όταν  $\beta < 10^{-2}$
- **μακροί κυματισμοί** όταν  $\beta > 10^{-2}$

$r = H/L$  η καμπυλότητα κύματος,

χαρακτηρίζει την ευστάθεια της ελεύθερης επιφάνειας του νερού



# Ανεμογενείς κυματισμοί – Επιφανειακοί κυματισμοί Κύματα



[http://media.trevorsbirding.com/wp-content/uploads/2009/02/duesbury-beach-dalmeny\\_20090105\\_006-1024x768.jpg](http://media.trevorsbirding.com/wp-content/uploads/2009/02/duesbury-beach-dalmeny_20090105_006-1024x768.jpg)



# Γραμμικοί κυματισμοί απειροστού πλάτους

κλασική θεωρία των κυματισμών

θεωρία κυματισμών Airy

θεωρία κυματισμών Stokes 1<sup>ης</sup> τάξης

παραδοχές:

1. Οι παράμετροι χαρακτηρισμού  $\varepsilon=H/d$  και  $r=H/L$  έχουν μικρές τιμές.
2. Σταθερό βάθος θάλασσας και δισδιάστατο φαινόμενο (μεταβολές μόνο κατά τις κατευθύνσεις  $Ox$  και  $Oz$ )
3. Τέλειο ρευστό, αστρόβιλη κίνηση  $\text{rot}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$ ,
4. Ασυμπίεστο ρευστό  $\text{div}(\mathbf{V}) = 0$



Η ταχύτητα  $\mathbf{V} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$  μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση της συνάρτησης δυναμικού  $\Phi$  ( $\text{m}^2/\text{sec}$ ),

$$\mathbf{V} = \text{grad}(\Phi)$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Στο πεδίο ροής ισχύει και η εξίσωση Laplace

$$\text{div}(\text{grad}(\Phi)) = \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

οριακές συνθήκες

στην επιφάνεια:  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz = \text{σταθερό} = 0 \Big|_{z=\eta}$  και  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = w = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{z=\eta}$

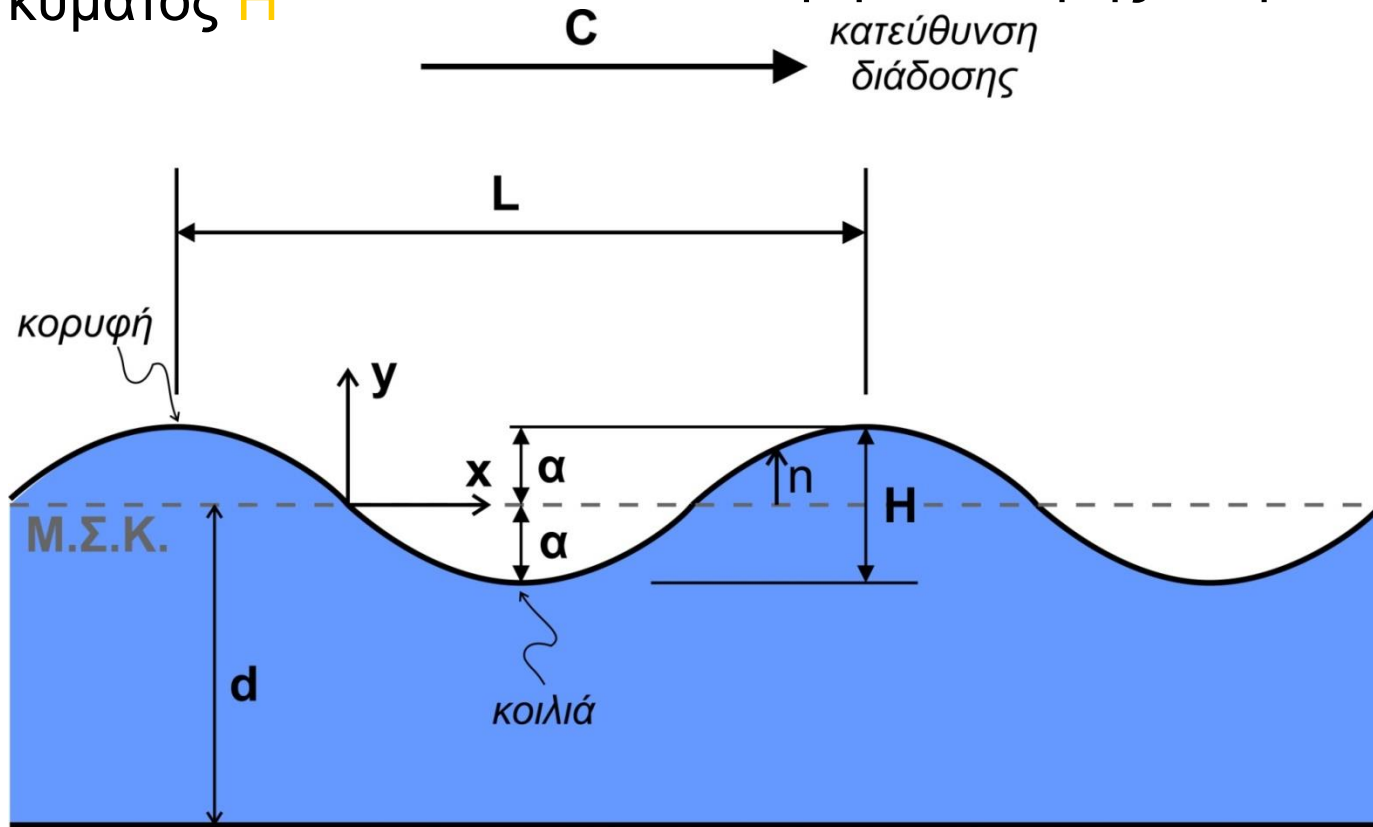
στον πυθμένα:  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = w = 0 \Big|_{z=-d}$



# Βασικά χαρακτηριστικά γραμμικών κυματισμών

Φασική ταχύτητα  $C$   
Περίοδος κύματος  $T$   
Ύψος κύματος  $H$

Πλάτος κύματος  $\alpha$  ( $=H/2$ )  
Μήκος κύματος  $L$   
Στάθμη ελεύθερης επιφάνειας  $n$  (ή  $\zeta$ )



# Εξίσωση δυναμικού χαρακτηριστικά επιφανειακού κυματισμού

$$\Phi = \frac{Hg}{2\sigma} \frac{\cosh(k(d+z))}{\cosh(kd)} \sin(kx - \sigma t)$$

## Εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$$

απλό ημιτονοειδές κύμα προωθούμενο με ταχύτητα  $C$  και περίοδο  $T$

$k = 2\pi/L$ , ο αριθμός κύματος

$\sigma = 2\pi/T$ , η γωνιακή συχνότητα

$$\theta = \text{γωνία φάσης} = (kx - \sigma t) = (2\pi x/L - 2\pi t/T)$$



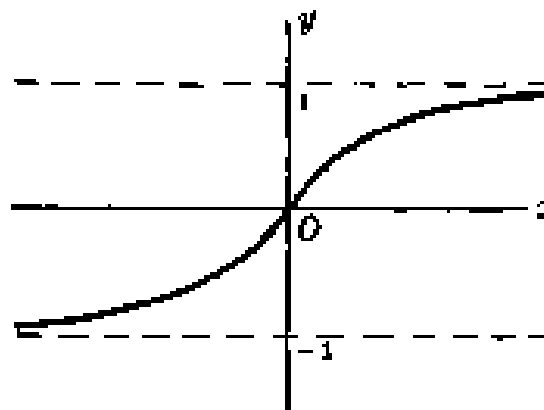
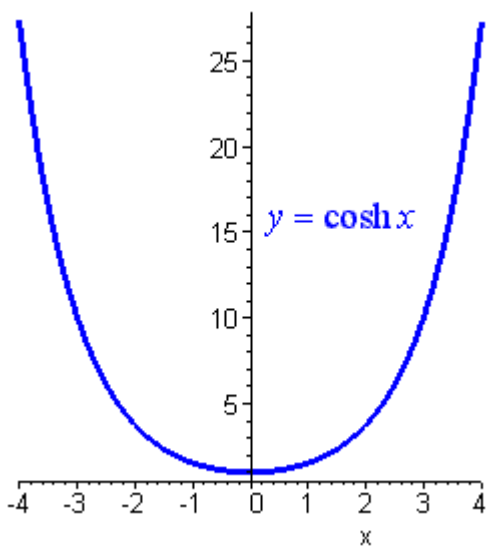
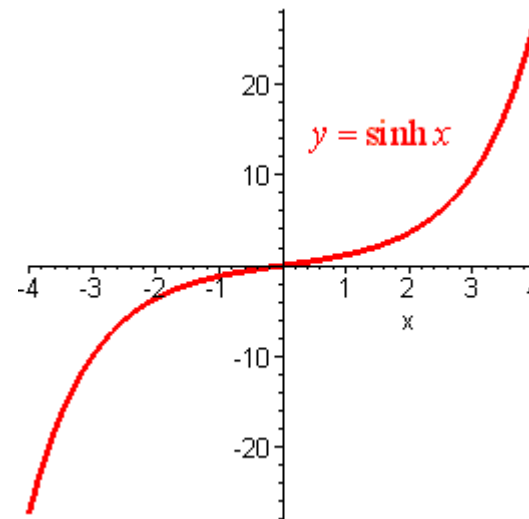


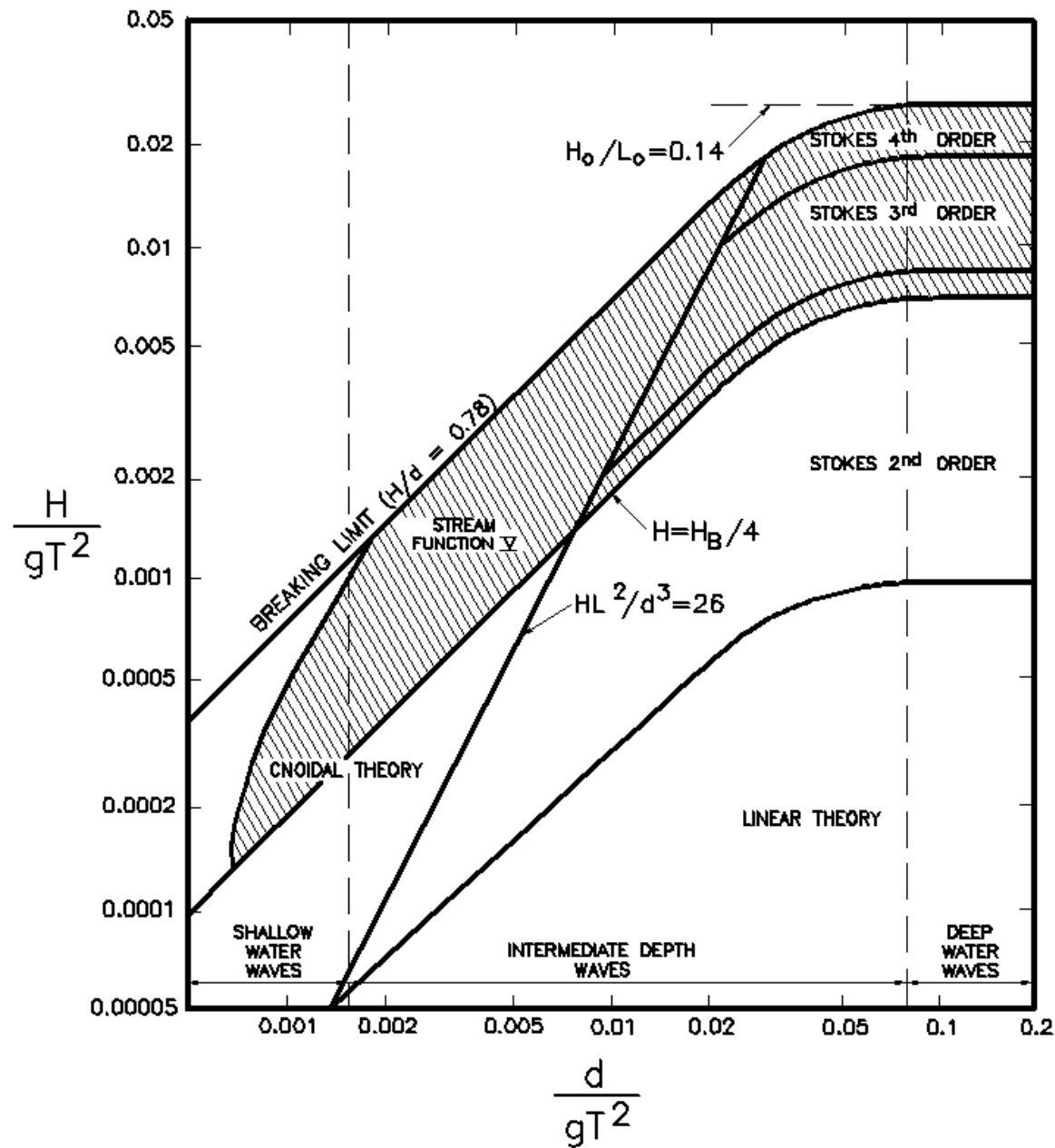
# Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$$





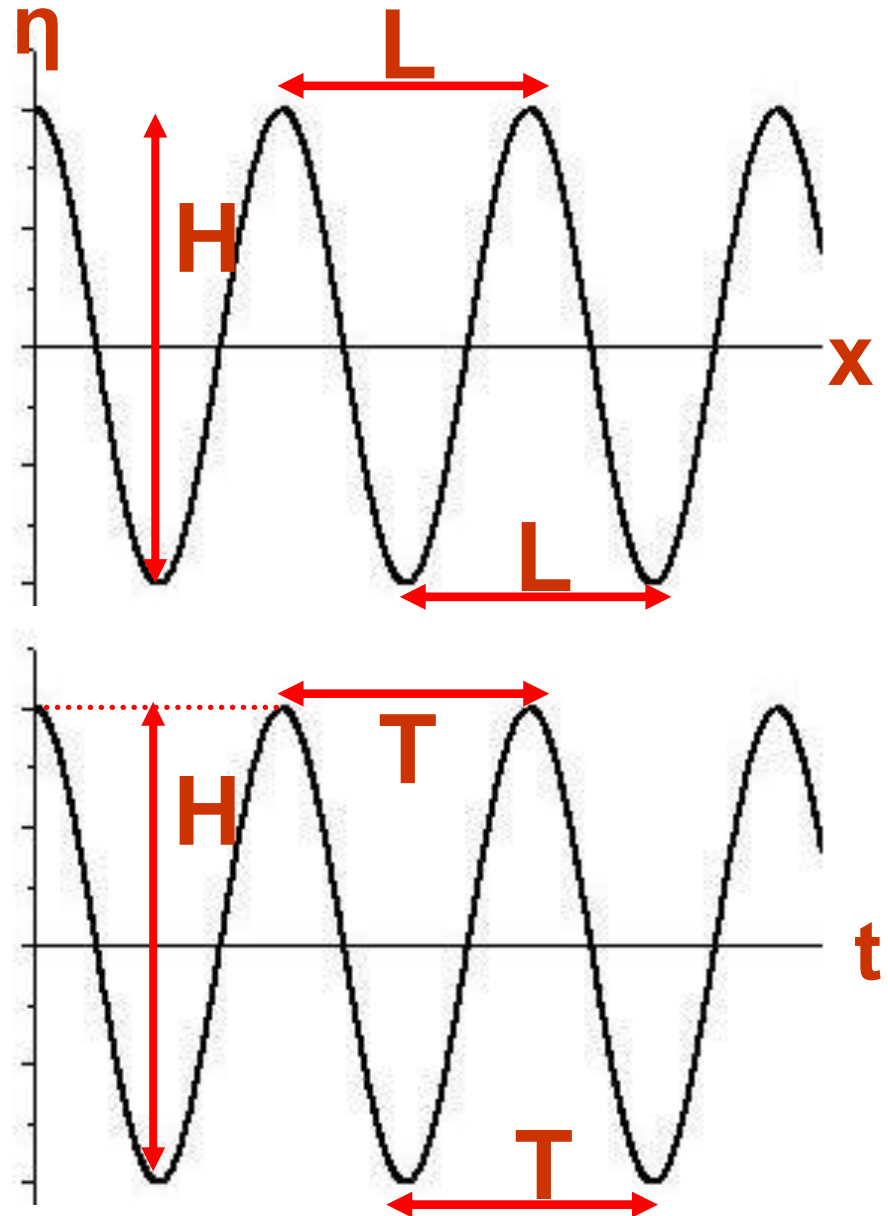
## Περιοχές ισχύος των κυματικών θεωριών

# Γραφική απεικόνιση γραμμικού κυματισμού

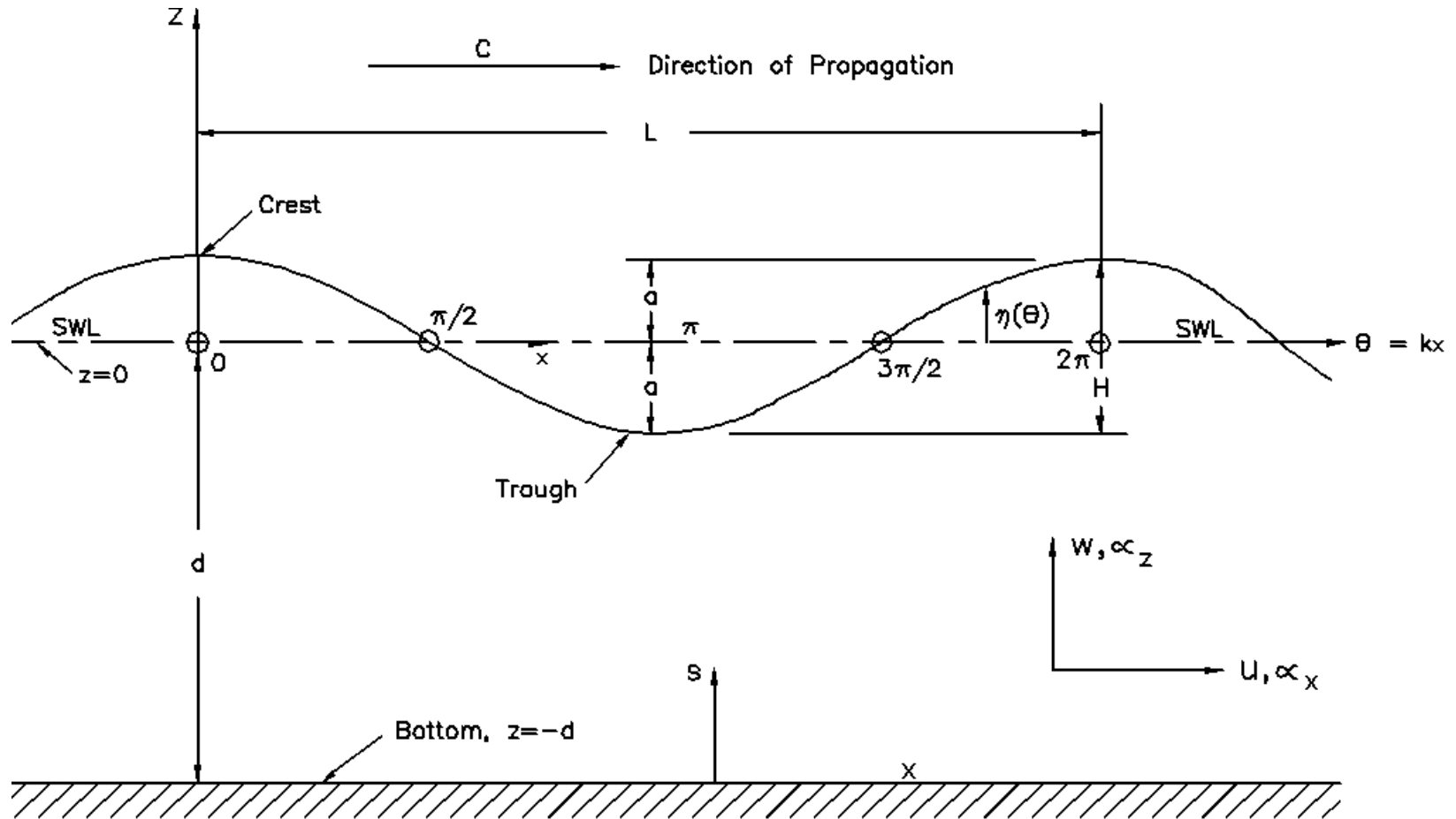
$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$$

$$k = 2\pi/L$$

$$\sigma = 2\pi/T$$



# Χωρική μεταβολή κυματισμού



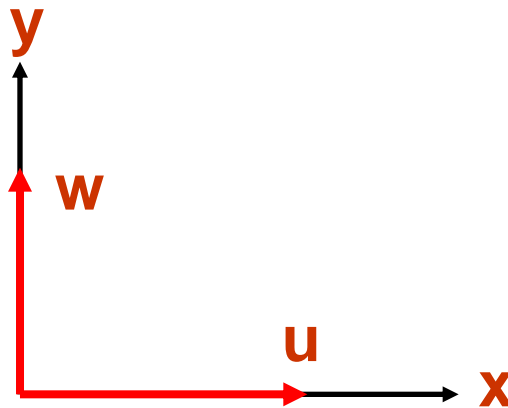
$$\theta = \text{γωνία φάσης} = (kx - \sigma t) = (2\pi x/L - 2\pi t/T)$$



# Συνιστώσες της ταχύτητας των μορίων του νερού

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\cosh(2\pi(d+z)/L)}{\cosh(2\pi d/L)} \cos(kx - \sigma t)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\sinh(2\pi(d+z)/L)}{\cosh(2\pi d/L)} \sin(kx - \sigma t)$$



# Συνιστώσες επιτάχυνσης

$$a_x = \frac{g\pi H}{L} \frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} \sin \theta = \frac{\partial u}{\partial t}$$

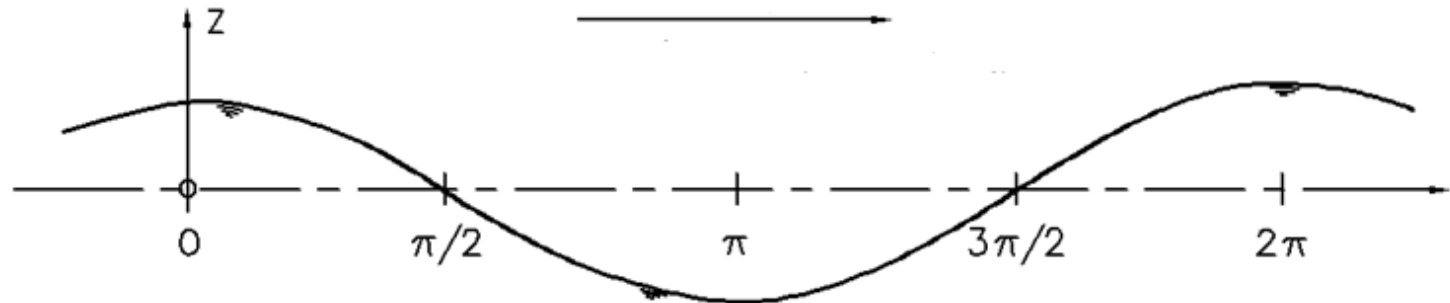
$$a_z = -\frac{g\pi H}{L} \frac{\sinh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} \cos \theta = \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\theta = \text{γωνία φάσης} = (kx - \sigma t) = (2\pi x/L - 2\pi t/T)$$





# Μεταβολές ταχυτήτων & επιταχύνσεων



ταχύτητα

επιτάχυνση

	$u=+; w=0$	$u=0; w=+$	$u=-; w=0$	$u=0; w=-$	$u=+; w=0$
	$\alpha_x=0; \alpha_z=-$	$\alpha_x=+; \alpha_z=0$	$\alpha_x=0; \alpha_z=+$	$\alpha_x=-; \alpha_z=0$	$\alpha_x=0; \alpha_z=-$
$\theta$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$

# Συνιστώσες της ταχύτητας των μορίων του νερού

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\cosh(2\pi(d+z)/L)}{\cosh(2\pi d/L)} \cos(kx - \sigma t)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\sinh(2\pi(d+z)/L)}{\cosh(2\pi d/L)} \sin(kx - \sigma t)$$

**Μετατοπίσεις των μορίων του νερού γύρω από τη θέση ισορροπίας**

$$\xi = \int u \cdot dt = -\frac{HgT^2}{4\pi L} \frac{\cosh(2\pi(d+z)/L)}{\cosh(2\pi d/L)} \cos(kx - \sigma t)$$

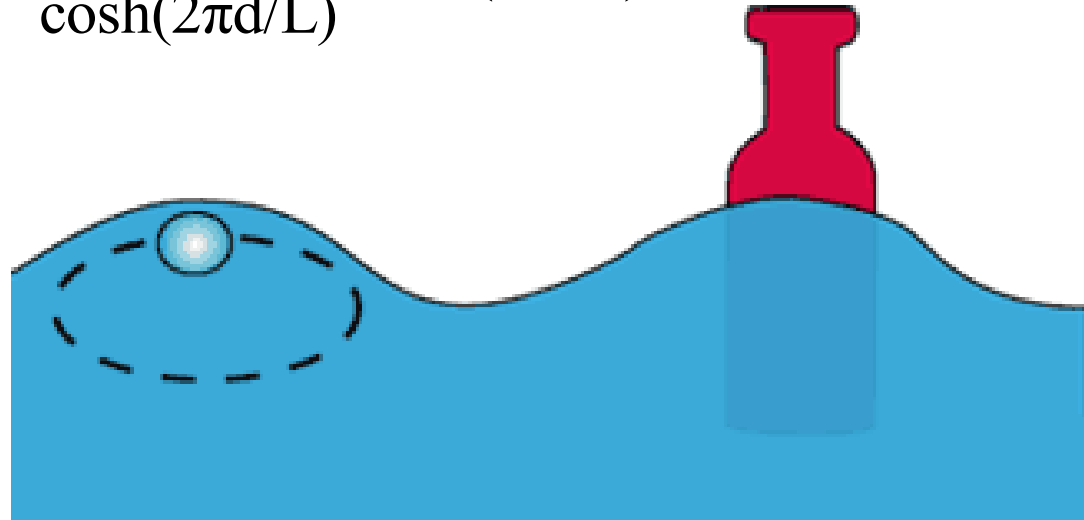
$$\zeta = \int w \cdot dt = \frac{HgT^2}{4\pi L} \frac{\sinh(2\pi(d+z)/L)}{\cosh(2\pi d/L)} \sin(kx - \sigma t)$$



# Οι μετατοπίσεις των μορίων του νερού γύρω από τη θέση ισορροπίας

$$\xi = \int u \cdot dt = -\frac{HgT^2}{4\pi L} \frac{\cosh(2\pi(d+z)/L)}{\cosh(2\pi d/L)} \cos(kx - \sigma t)$$

$$\zeta = \int w \cdot dt = \frac{HgT^2}{4\pi L} \frac{\sinh(2\pi(d+z)/L)}{\cosh(2\pi d/L)} \sin(kx - \sigma t)$$



**Οι τροχιές είναι κλειστές**

**Άρα δεν υπάρχει μεταφορά μάζας κατά τη φορά διάδοσης του κυματισμού**



# Σχέση «διασποράς»

Συσχετίζει την ταχύτητα φάσης και το μήκος κύματος με την περίοδο ή την συχνότητα του κύματος

$$\sigma^2 = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = g \frac{2\pi}{L} \tanh\left(\frac{2\pi}{L} d\right)$$

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi}{L} d\right)$$

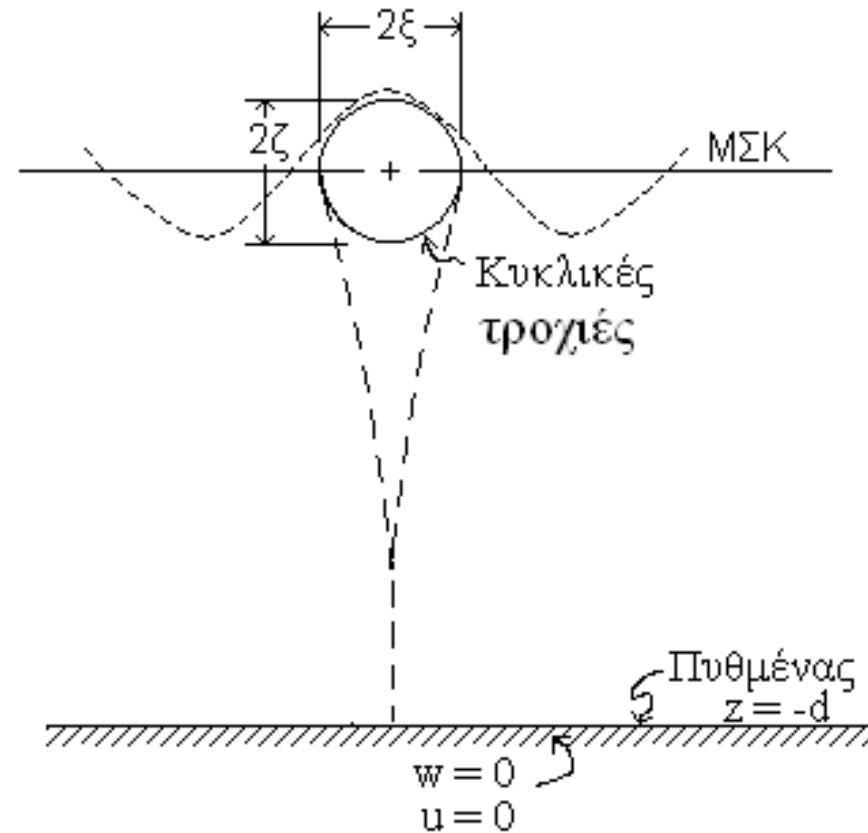
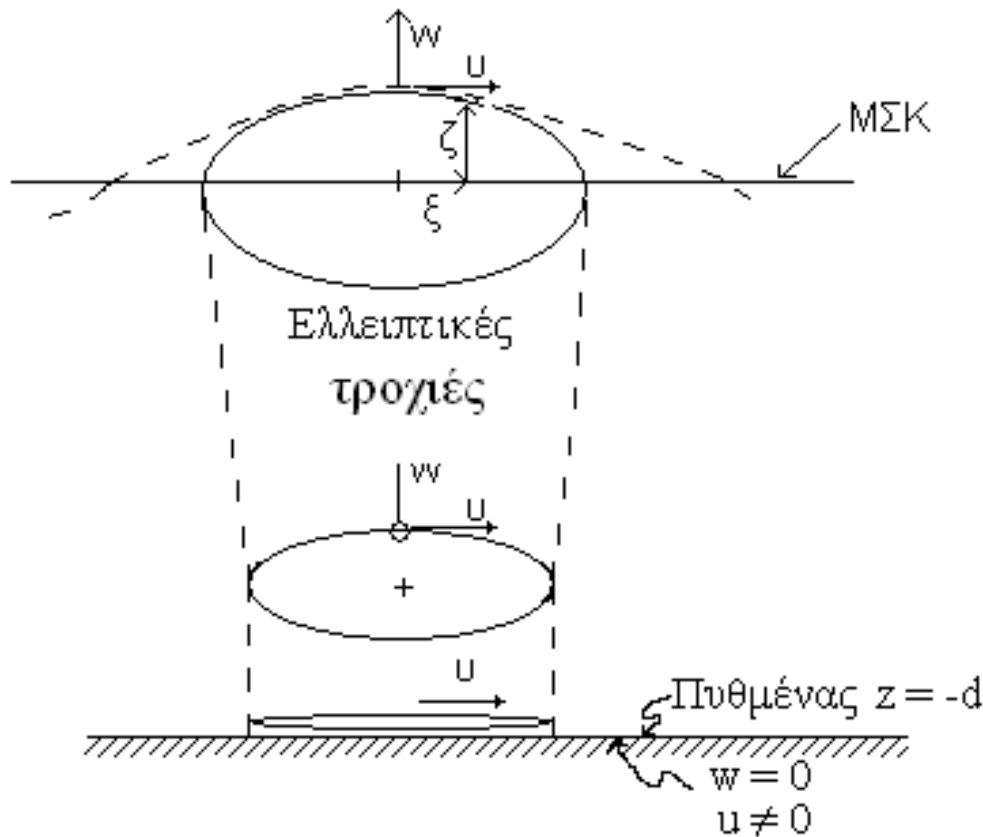
$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi}{L} d\right)$$

Η φασική ταχύτητα είναι αύξουσα συνάρτηση της περιόδου του κύματος. Ένας κυματισμός διαδίδεται ταχύτερα από άλλον με μικρότερη περίοδο.

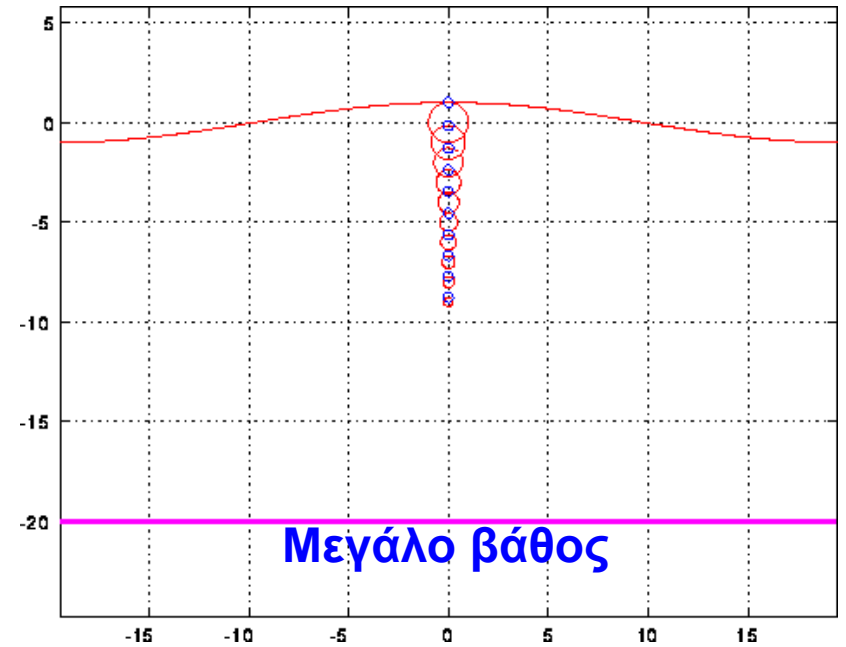
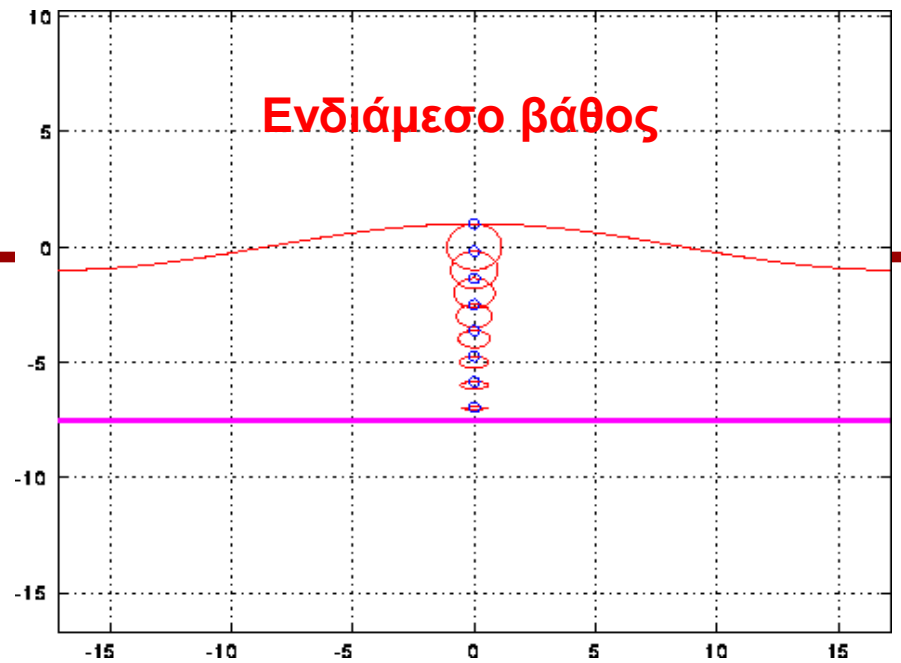
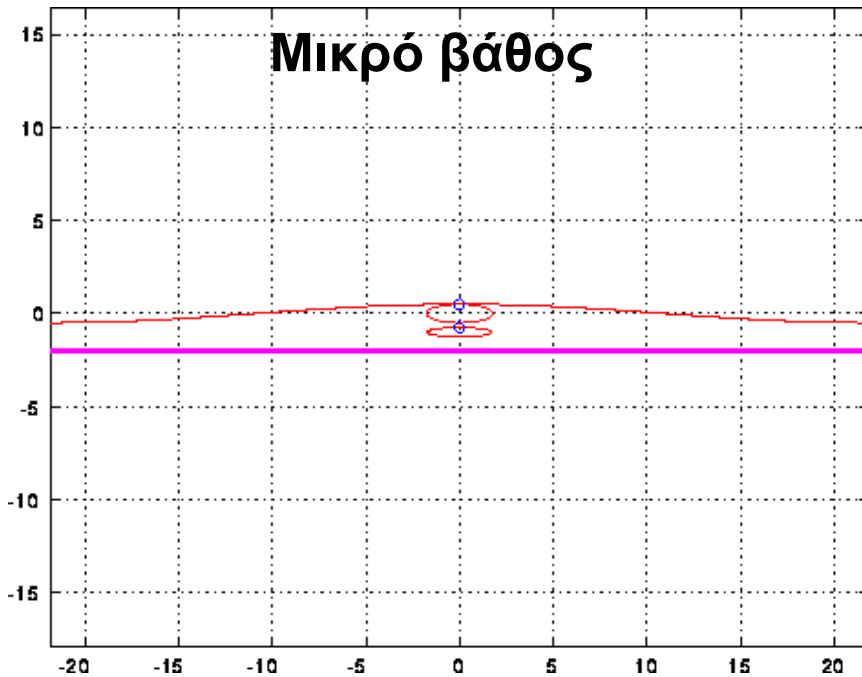


Ρηχά νερά  
ή  
ενδιάμεσου βαθους  
 $d/L < 1/2$

Βαθεία νερά  
 $d/L > 1/2$



# Μεταβολή της κίνησης των μορίων του νερού ανάλογα με το βάθος





# Ρηχά νερά $d/L < 0.05$

$\tanh(kd) \rightarrow kd$  άρα από την εξίσωση διασποράς:

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kd) \Rightarrow C = \sqrt{gd}$$

# Βαθιά νερά $d/L > 0.5$

$\tanh(kd) \rightarrow 1$ , άρα από την εξίσωση διασποράς:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kd) \rightarrow L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$$



# Ρηχά νερά $d/L < 0.05$

$$C = \sqrt{gd} \quad \text{και} \quad L = T\sqrt{gd}$$

$$u = \frac{H}{2} \sqrt{g/d} \cos(kx - \sigma t) \quad \text{και} \quad w = \frac{\pi H}{T} \left(1 + \frac{z}{d}\right) \sin(kx - \sigma t)$$

$$\xi = \frac{H}{2} \frac{1}{kd} \sin(kx - \sigma t) \quad \text{και} \quad \zeta = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{z}{d}\right) \cos(kx - \sigma t)$$

## Βαθιά νερά $d/L > 0.5$

$$C_0 = \frac{gT}{2\pi} \quad \text{και} \quad L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$$

$$u = \frac{\pi H}{T} e^{kz} \cos(kx - \sigma t) \quad \text{και} \quad w = \frac{\pi H}{T} e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$$

$$\xi = \frac{H}{2} e^{kz} \sin(kx - \sigma t) \quad \text{και} \quad \zeta = \frac{H}{2} e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$$



	$d/L$	$Kd$	$\tanh(kd)$
<b>Βαθειά νερά</b>	$0,5 \div \infty$	$\pi \div \infty$	$\approx 1$
<b>Ενδιάμεσα νερά</b>	$0.05 \div 0,5$	$\pi/10 \div \pi$	$\tanh(kd)$
<b>Ρηχά νερά</b>	$0 \div 0,05$	$0 \div \pi/10$	$\approx kd$

$$k=2\pi/L, \quad n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right)$$

βαθειά νερά:  $(4\pi d/L)/\sinh(4\pi d/L) \approx 0$ , επομένως  $n = \frac{1}{2}$

ρηχά νερά:  $\sinh(4\pi d/L) \approx 4\pi d/L$ , επομένως  $n = 1$



# Υπολογισμός των χαρακτηριστικών του κυματισμού

## ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

$T$  = η περίοδος του κυματισμού

Επίλυση της εξίσωσης διασποράς:

$$L = gT^2/2\pi * \tanh(kd)$$

Για βαθιά νερά:

$$L_0 = gT^2/2\pi$$

## ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ:

1. Το μήκος του κύματος στα βαθιά νερά
2. Το μήκος του κύματος σε βάθος  $d$

Για το βάθος  $d$ :

$$L = gT^2/2\pi * \tanh(2\pi d/L)$$

Επίλυση με δοκιμές ή



# Χρήση του διαγράμματος Σχ. 2.4 (σελ. 20) για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών του κυματισμού

1. Υπολογισμός του

$$L_0 = gT^2/2\pi$$

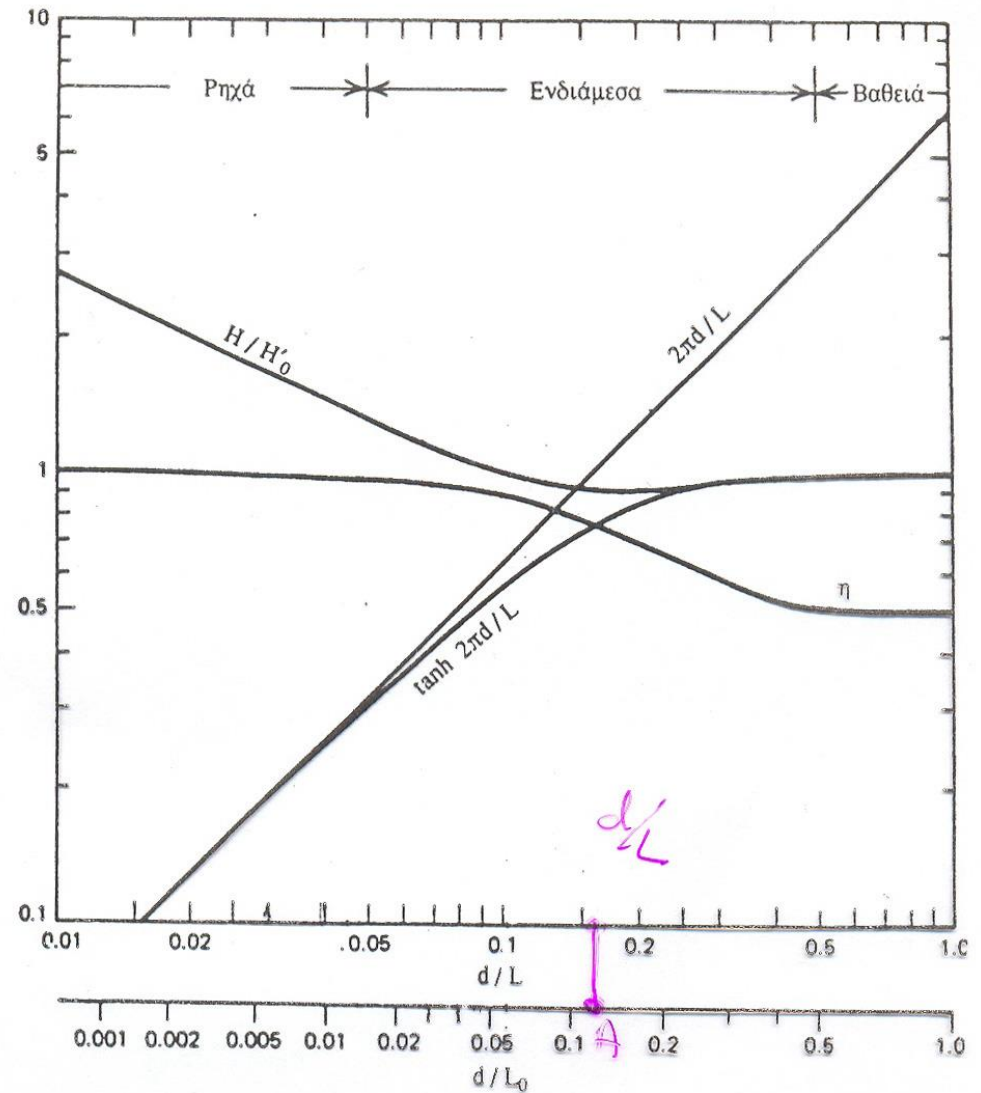
2. Με γνωστό το βάθος  $d$  γίνεται ο υπολογισμός του λόγου

$$\lambda_1 = d/L_0$$

3. Από τον κάτω άξονα των  $X$  φέρουμε την κάθετο στη θέση  $\lambda_1$

4. Από τον αμέσως ανώτερο άξονα των  $X$  εκτιμάται ο λόγος  $\lambda_2 (=d/L)$

$$\text{Άρα } L = d/\lambda_2$$



Σχ. 2.4.



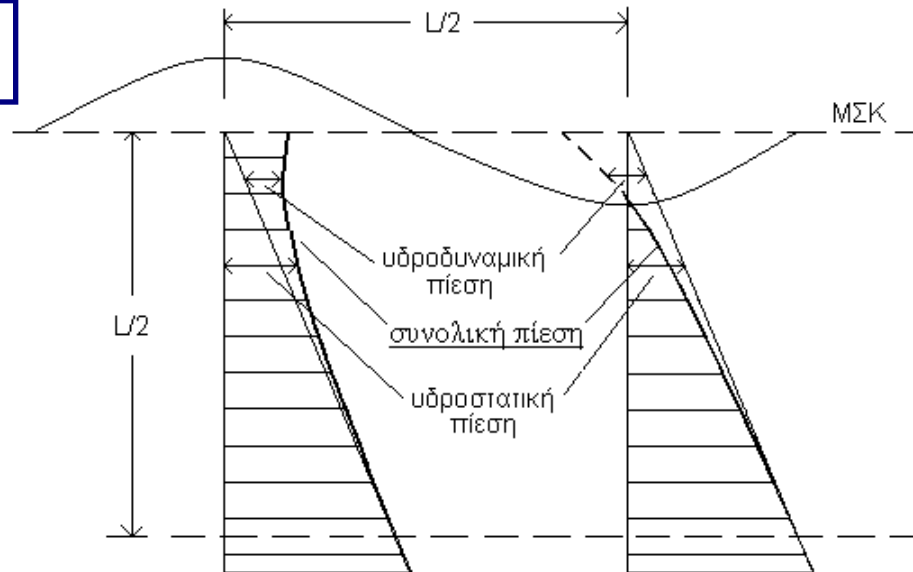
## Εξίσωση Bernoulli

στην επιφάνεια:  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz = \text{σταθερό} = 0 \Big|_{z=\eta}$



# Κατανομή της πίεσης με το βάθος

$$p = \underbrace{-\rho g z}_{\text{υδροστατική}} + \frac{\rho g H}{2} \frac{\cosh(k(d+z))}{\cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \quad \text{υδροδυναμική}$$



Η υδροδυναμική πίεση μειώνεται από την θαλάσσια επιφάνεια προς τον πυθμένα για να μηδενιστεί σε απόσταση  $L/2$  από την επιφάνεια.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Διαφάνεια 5

1. <http://www.crh.noaa.gov/images/mqt/webpics/shorepics/Big/Presque%20Isle%20Park%2013.jpg>
2. <http://www.crh.noaa.gov/Image/mqt/webpics/shorepics/Big/breakwater%2020.jpg>
3. <http://www.crh.noaa.gov/Image/mqt/webpics/shorepics/Big/Presque%20Isle%20Park%2024.jpg>
4. [http://static.wixstatic.com/media/e8159e\\_079af0740dd94f49888c14e7560df0e6.png\\_srz\\_979\\_432\\_85\\_22\\_0.50\\_1.20\\_0.00\\_png\\_srz](http://static.wixstatic.com/media/e8159e_079af0740dd94f49888c14e7560df0e6.png_srz_979_432_85_22_0.50_1.20_0.00_png_srz)





# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Κρεστενίτης Ν. Γιάννης.  
«Ακτομηχανική και λιμενικά έργα. Επιφανειακοί κυματισμοί». Έκδοση: 1.0.  
Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<https://opencourses.auth.gr/courses/OCRS425/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: <Μαυρίδου Σοφία>  
Θεσσαλονίκη, <Χειμερινό Εξάμηνο 2013-2014>



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

# Σημειώματα

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

