



# Συμβολικές Γλώσσες Προγραμματισμού

**Ενότητα 1:** Από την Άλγεβρα των Υπολογισμών στα Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας

**Νικόλαος Καραμπετάκης**  
Τμήμα Μαθηματικών



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Περιεχόμενα ενότητας

1. Αριθμητική Ανάλυση.
2. Υπολογιστική Άλγεβρα.
3. Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας.
  - i. Κατηγορίες ΥΣΑ.
  - ii. Από τι επηρεάστηκε η εξέλιξη των ΥΣΑ;
  - iii. Ιστορική εξέλιξη των ΥΣΑ.
  - iv. Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ.
  - v. Μειονεκτήματα των ΥΣΑ.
  - vi. Τα ΥΣΑ στην έρευνα.
  - vii. Τα ΥΣΑ στην εκπαίδευση.
  - viii. Το μέλλον των ΥΣΑ.



# Σκοποί ενότητας

- Μελέτη των Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας.



# Ιστορική εξέλιξη των Η/Υ (1/2)



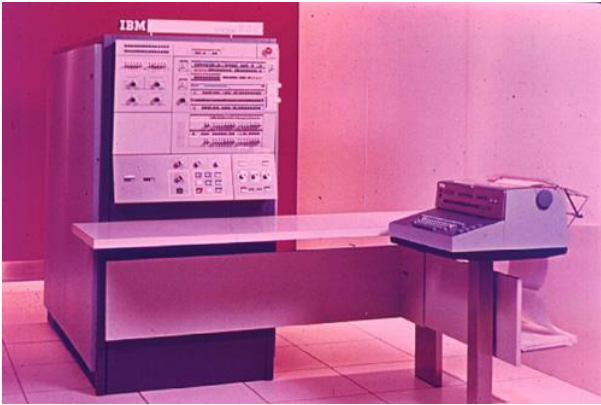
Εικόνα 1



Εικόνα 2



# Ιστορική εξέλιξη των Η/Υ (2/2)



Εικόνα 3



Εικόνα 4



Εικόνα 5



# Μαθηματικοί υπολογισμοί

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ



**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΙ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ**



**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

**ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ή ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΙ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ**



**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ**





# Αριθμητική Ανάλυση

**Αριθμητική Ανάλυση:** Κλάδος των Μαθηματικών και της Επιστήμης Υπολογιστών που ασχολείται με την δημιουργία, ανάλυση και εφαρμογή υπολογιστικών μεθόδων οι οποίες αναλύουν σύνθετους μαθηματικούς υπολογισμούς σε απλές πράξεις εκτελέσιμες από έναν Η/Υ.

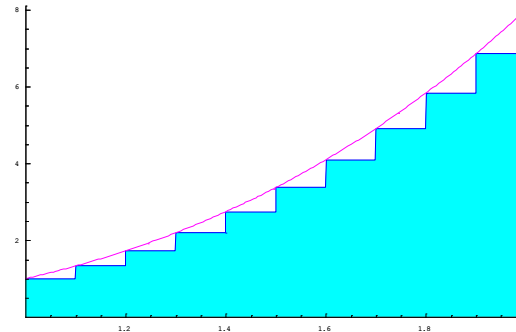
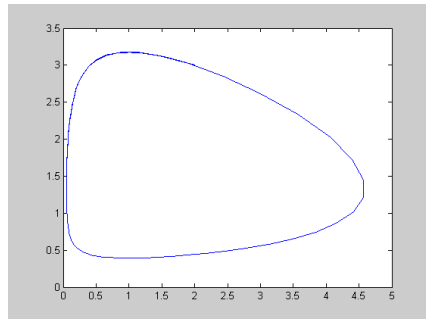
$$(0.1)_{10} = (0.0001100110011\dots)_2$$

ΣΦΑΛΜΑ



# Εφαρμογές Αριθμητικής Ανάλυσης (1)

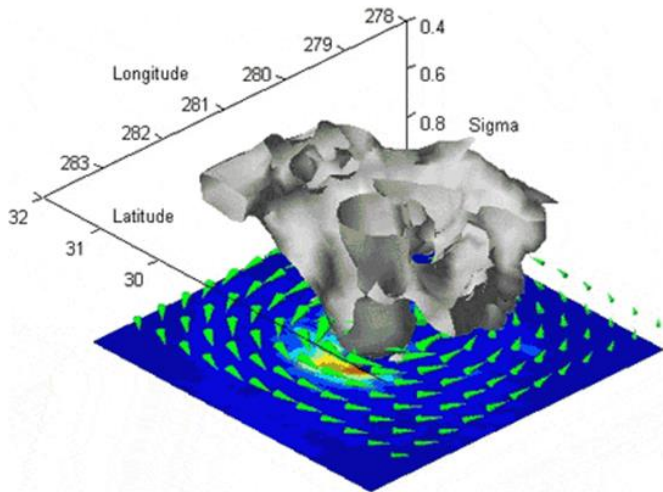
- Προβλήματα στα οποία δεν υπάρχει τρόπος εύρεσης της ακριβούς λύσεως π.χ. επίλυση διαφορικών εξισώσεων, υπολογισμός ολοκληρωμάτων.



- Προβλήματα των οποίων η διάσταση είναι μεγάλη και ο χρόνος στον οποίο απαιτείται η λύση είναι κρίσιμος π.χ. επίλυση εξισώσεων σε προβλήματα μετεωρολογίας, πυρηνικής φυσικής, γεωλογίας κ.λ.π. όπου το πλήθος των μεταβλητών είναι πολύ μεγάλο.

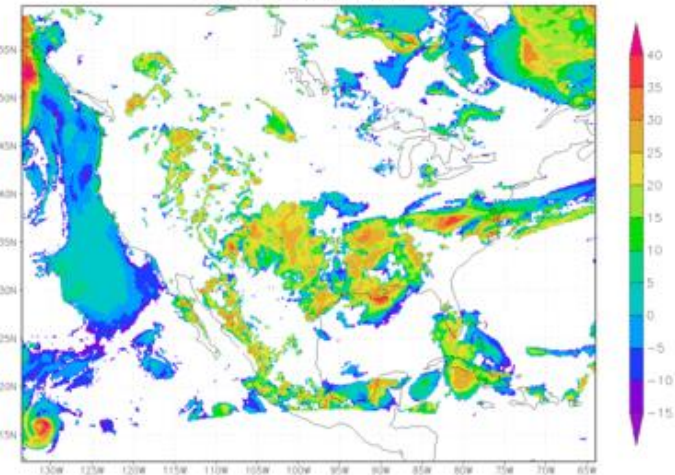


# Εφαρμογές Αριθμητικής Ανάλυσης (2)

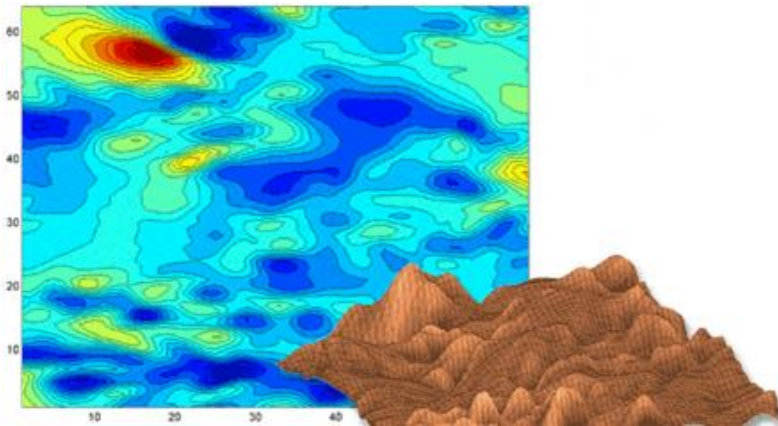


Προσομοίωση τυφώνα  
Εικόνα 6

NAM Atmospheric Column Maximum Composite Radar Reflectivity [dbZ]  
00Z10JUL2012+000Hrs



Πρόγνωση καιρού  
Εικόνα 7



Χαοτική κίνηση στα υγρά  
Εικόνα 8



# Υπολογιστική Άλγεβρα

Μαθηματικά

Επιστήμη Υπολογιστών

Υπολογιστική Άλγεβρα

Η Υπολογιστική Άλγεβρα έχει ως στόχο την ανάπτυξη :

- α) συμβολικών αλγορίθμων για την επίλυση μαθηματικά τυποποιημένων προβλημάτων,
- β) συστημάτων (υλικό (hardware) ή λογισμικό (software)) για συμβολικές πράξεις.



# Θέματα Υπολογιστικής Άλγεβρας (1)

- a) Πλήρης ακρίβεια.
- b) Πολυώνυμα.
- c) Γραμμική Άλγεβρα.
- d) Θεωρία αριθμών.
- e) Μεταθετική Άλγεβρα και Αλγεβρική Γεωμετρία.
- f) Θεωρία Ομάδων.
- g) Θεωρία Αναπαράστασης.
- h) Αθροίσματα και ολοκληρώματα.
- i) Διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών.
- j) Δυναμικά συστήματα.
- k) Υβριδικές μέθοδοι.
- l) Αλγεβρική θεωρία πολυπλοκότητας.

- Σχετικά με Μαθηματικά



# Πολλαπλασιασμός μεγάλων ακεραίων αριθμών

$$X = \sum_{i=0}^n x_i B^i, Y = \sum_{i=0}^n y_i B^i$$

↓

$$X \times Y = \sum_{i=0}^{2n} z_i B^i, z_i = \sum_{k+l=i} x_k y_l$$

Πολυπλοκότητα αλγορίθμου  $\Theta(n^2)$



# Αλγόριθμος Karatsuba

$$X = X_0 + \tilde{B}X_1, Y = Y_0 + \tilde{B}Y_1$$

↓

$$X \times Y = (X_0 + \tilde{B}X_1)(Y_0 + \tilde{B}Y_1) =$$

$$= (X_0Y_0) + \tilde{B}(X_1Y_0 + X_0Y_1) + \tilde{B}^2(X_1Y_1)$$

$$X_1Y_0 + X_0Y_1 = (X_0 + X_1)(Y_0 + Y_1) - (X_0Y_0) - (X_1Y_1)$$

$$X_1Y_0 + X_0Y_1 = (2 + 3)(4 + 3) - (3 \times 3) - (2 \times 4) = 18$$

↓

$$\begin{aligned} 23 \times 43 &= 9 + 10 \times 18 + 10^2 \times 8 \\ &= 9 + 10 \times 8 + 10^2 \times 9 = 989 \end{aligned}$$

$$X = 23 = 3 + 10 \times 2, Y = 43 = 3 + 10 \times 4$$

↓

$$\begin{aligned} 23 \times 43 &= (3 + 10 \times 2)(3 + 10 \times 4) = \\ &= (3 \times 3) + 10(X_1Y_0 + X_0Y_1) + 10^2(2 \times 4) \end{aligned}$$

↓

Πολυπλοκότητα αλγορίθμου  $\Theta(n^{1.5})$



# Θέματα Υπολογιστικής Άλγεβρας (2)

## Σχετικά με Η/Υ

- m) Αναπαράσταση γνώσης και αφηρημένοι τύποι δεδομένων.
- n) Σχεδιασμός υπολογιστικών συστημάτων άλγεβρας.
- ο) Παράλληλα υπολογιστικά συστήματα άλγεβρας.
- ρ) Μέσα αλληλεπίδρασης (interfaces) και προτυποποίηση.
- q) Υλοποίηση σε hardware των υπολογιστικών συστημάτων άλγεβρας.

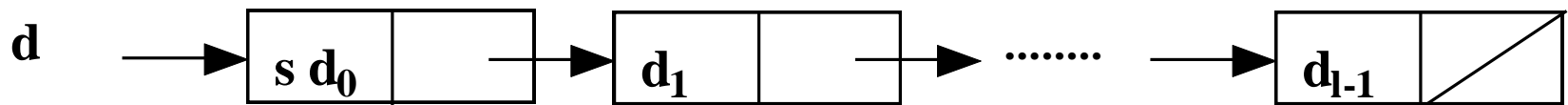




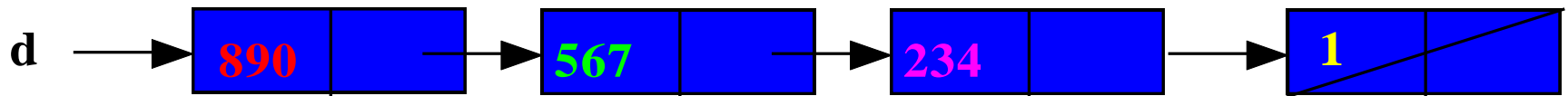
# Θέματα Υπολογιστικής Άλγεβρας (3)

- Τρόποι Αναπαράστασης Ακεραίων-Ρητών

## Ακέριοι

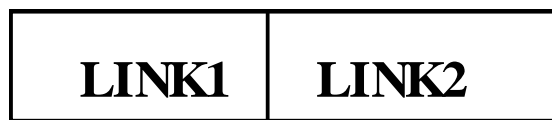


1234567890



$$[s \ d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{l-1}] \longrightarrow [4 \ 890 \ 567 \ 234 \ 1]$$

## Ρητοί



## Μειονεκτήματα:

- περισσότερη μνήμη,
- μικρότερη ταχύτητα σε υπολογισμούς.



# Εφαρμογές Υπολογιστικής Άλγεβρας

- **Φυσική.**
  - Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων, Θεωρία Βαρύτητας, Διαφορική Γεωμετρία, Διαφορικές Εξισώσεις κ.α.
- **Μαθηματικά.**
- **Επιστήμη των υπολογιστών.**
  - Θεωρία κωδίκων και κρυπτογραφία, σχεδιασμός VLSI κυκλωμάτων, επεξεργασία σήματος, συστήματα αναπαράστασης γνώσης στα Μαθηματικά κ.α.
- **Μηχανική.**
  - Ρομποτική, σχεδίαση και μοντελοποίηση με βοήθεια Η/Υ, ψηφιακή επεξεργασία ήχου κ.α.
- **Εκπαίδευση.**
  - Ως βοηθητικό μέσο διδασκαλίας, αλλά και ως αντικείμενο διδασκαλίας.



# Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας

**Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας (ΥΣΑ)** (Computer Algebra Systems): Προγράμματα τα οποία κάνουν χρήση των μεθόδων της Υπολογιστικής Άλγεβρας.



# Κατηγορίες Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας

## Υπολογιστικά Σύστημα Άλγεβρας

### Γενικού Σκοπού (general purpose CAS )

Εμπεριέχουν συναρτήσεις για τα περισσότερα πεδία των Μαθηματικών.

Macsyma, Reduce, Maple, Mathematica, Derive, κ.α..

### Ειδικού Σκοπού (special purpose CAS)

Ειδικεύονται σε συγκεκριμένες περιοχές των μαθηματικών.

PARI (Θεωρία Αριθμών), DELiA (Διαφορικές Εξισώσεις) κ.α..



# Από τι επηρεάστηκε η εξέλιξη των Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας

- **Συστήματα.**
  - Ανάπτυξη γλωσσών προγραμματισμού και λογισμικού για συμβολικές πράξεις.
- **Αλγόριθμοι.**
  - Ανάπτυξη αποδοτικών μαθηματικών αλγορίθμων για τον χειρισμό πολυωνύμων, ρητών συναρτήσεων και ακόμα πιο γενικών συναρτήσεων.
- **Εφαρμογές.**
  - Το πλήθος των εφαρμογών που δημιούργησε την τεράστια ώθηση στην ανάπτυξη συστημάτων και αλγορίθμων.



# Η εξέλιξη των Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας (1/3)

Χρόνος	Υπολογιστικό Σύστημα Άλγεβρας
1961	SAINT (Αόριστα Ολοκληρώματα )
1964-66	ALTRAN, MATHLAB (Χειρισμός πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων )
1966-67	SIN (Συμβολική ολοκλήρωση )
1968 - σήμερα	REDUCE <a href="http://www.rrz.uni-koeln.de/REDUCE">http://www.rrz.uni-koeln.de/REDUCE</a> (Ξεκίνησε για υπολογισμούς στην Φυσική. Επιλύει προβλήματα μεγάλης κλίμακας σε Μαθηματικά, Φυσικές Επιστήμες, και στην Επιστήμη των Μηχανικών.)
1968	MATHLAB-68 (Νέα έκδοση του Matlab )
1968 - σήμερα	MACSYMA <a href="http://www.macsyoma.com">http://www.macsyoma.com</a> (Γενικού σκοπού ΥΣΑ)
Τέλη 1970's	muMATH
1980	MAPLE <a href="http://www.maplesoft.com">http://www.maplesoft.com</a> (Γενικού σκοπού ΥΣΑ)



# Η εξέλιξη των Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας (2/3)

Χρόνος	Υπολογιστικό Σύστημα Άλγεβρας
Αρχές 1980's	DERIVE (Γενικού σκοπού ΥΣΑ, νέα έκδοση του muMath)
1984 – σήμερα	SINGULAR <a href="http://www.mathematik.uni-kl.de/pub/~zca/Singular">http://www.mathematik.uni-kl.de/pub/~zca/Singular</a> (ΥΣΑ για πολυωνυμικούς υπολογισμούς)
1988 – σήμερα	SMP, MATHEMATICA <a href="http://www.wolfram.com">http://www.wolfram.com</a> (Γεν. σκ. ΥΣΑ)
1989 - σήμερα	MuPAD <a href="http://www.mupad.de">http://www.mupad.de</a> <a href="http://www.sciface.com">http://www.sciface.com</a> (Γεν. Σκ. ΥΣΑ )
1991 - σήμερα	AXIOM <a href="http://www.nag.co.uk">http://www.nag.co.uk</a> (Ο διάδοχος του Stratchpad. Γενικού σκοπού ΥΣΑ, το οποίο επιτρέπει τους χρήστες να γράφουν αλγορίθμους πάνω σε γενικά πεδία ορισμού)
	CAYLEY (Θεωρία ομάδων)



# Η εξέλιξη των Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας (3/3)

Χρόνος	Υπολογιστικό Σύστημα Άλγεβρας
Τέλη 1980's	MAGMA <a href="http://www.maths.usyd.edu.au:8000/u/magma">http://www.maths.usyd.edu.au:8000/u/magma</a> (Γενικού σκοπού ΥΣΑ για Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Αλγεβρική Γεωμετρία, Αλγεβρική Τοπολογία, Αλγεβρική Συνδιαστική κ.α.)
1986-1997	GAP, GAP 2 (2000) <a href="http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap">http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap</a> (Ομάδες, αλγόριθμοι και προγραμματισμός, υπολογιστική διακριτή άλγεβρα)
	FORM (Υπολογισμοί σε Φυσική Υψηλών Ενεργειών)
1990-1996	LiE <a href="http://www.mathlabo.univ-poitiers.fr/~maavl/LiE">http://www.mathlabo.univ-poitiers.fr/~maavl/LiE</a> (Υπολογισμούς σε Lie άλγεβρα )
1992	MACAULAY 2 <a href="http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2">http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2</a> (Αλγεβρική Γεωμετρία και Μεταθετική Άλγεβρα )
Μέσα 1980's - 2000	PARI <a href="ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/pari">ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/pari</a> (Θεωρία Αριθμών )





# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (1)

## α) Ακριβείς Υπολογισμοί

```
program fibonacci
```

```
implicit none ! Variables
```

```
INTEGER*4::f, f1, f2, i ! Body of fibonacci
```

```
f1 = 1;      f2 = 1;      i = 3; f = f1 + f2;
```

```
Do While (Mod (f, 100) /= 0)
```

```
f1 = f2; f2 = f; f = f1 + f2; i = i + 1
```

```
End Do
```

```
Print *, f, i
```

```
end program fibonacci
```



708252800 96

Press any key to continue

Integer\*8 [-2^63 -2^63-1]



8284360270132553400

522

Press any key to continue



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (2)

## α) Ακριβείς Υπολογισμοί

```
f1 = 1;  
f2 = 1;  
i = 3; f = f1 + f2;  
While[Mod[f, 100] ≠ 0,  
  f1 = f2;  
  f2 = f;  
  f = f1 + f2;  
  ++i];
```

f  
i

9969216677189303386214405760200

150



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (3)

α) Ακριβείς Υπολογισμοί

$$\text{In}[1]:= 30! / 2^{26} + 20^{20}$$

$$\text{Out}[1]= 108810175621190533915703125$$

$$\text{In}[2]:= 30! / (2^{30} - 1)$$

$$\text{Out}[2]= \frac{382760259469251166863360000000}{1549411}$$



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (4)

β) Διαδραστικότητα (interactivity)

```
In[1]:= A = { {1, 2, 3} , {2, 3, 1} , {3, 2, 1} }
```

```
Out[1]= { {1, 2, 3} , {2, 3, 1} , {3, 2, 1} }
```

```
In[2]:= MatrixForm[A]
```

```
Out[2]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[3]:= Eigenvalues[A]
```

```
Out[3]= { 6, -2, 1 }
```



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (5)

γ) Συμβολικοί υπολογισμοί

γ1) απλοποιήσεις

```
In[1]:= Simplify[x (x - 2 y) ^3 + y (2 x - y) ^3]
```

```
Out[1]= (x - y) (x + y) ^3
```

γ2) αλλαγή μορφής εκφράσεων

```
In[2]:= Expand[(x - y) (x + y) ^3]
```

```
Out[2]= x^4 + 2 x^3 y - 2 x y^3 - y^4
```



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (6)

γ) Συμβολικοί υπολογισμοί

γ3) επίλυση γραμμικών εξισώσεων

In[5]:= **Solve**[ $x^2 - b * x + 6 == 0$ ,  $x$ ]

Out[5]=  $\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} \left( b - \sqrt{-24 + b^2} \right) \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} \left( b + \sqrt{-24 + b^2} \right) \right\} \right\}$

In[4]:= **Reduce**[ $a * x + b == 0$ ,  $x$ ]

Out[4]=  $(b == 0 \ \&\& \ a == 0) \ || \ \left( a \neq 0 \ \&\& \ x == -\frac{b}{a} \right)$



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (7)

γ) Συμβολικοί υπολογισμοί

γ3) επίλυση γραμμικών εξισώσεων

```
In[6]:= Solve[{  
  x1 - x2 + 2 * x3 + x4 == -2,  
  -2 * x1 + x2 - 3 * x3 - 5 * x4 == 4,  
  x1 - x2 + x3 + 6 * x4 == 0,  
  2 * x1 + 3 * x2 + 5 * x3 - 7 * x4 == 1}, {x1, x2, x3, x4}]
```

```
Out[6]= {{x1 -> -51/2, x2 -> 11/3, x3 -> 73/6, x4 -> 17/6}}
```

```
In[7]:= Solve[{  
  x1 + x2 - x3 + x5 == 1,  
  -x1 - x2 + 2 * x3 - x4 + x5 == 2,  
  2 * x1 + 2 * x2 - 3 * x3 + 3 * x4 + x5 == 0,  
  x1 + x2 - 3 * x4 + 2 * x5 == 3}, {x1, x2, x3, x4, x5}]
```

Solve :: svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables . [More...](#)

```
Out[7]= {{x1 -> 9/2 - x2 - 7 x5/2, x3 -> 7/2 - 5 x5/2, x4 -> 1/2 - x5/2}}
```



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (8)

γ) Συμβολικοί υπολογισμοί

γ4) πράξεις πινάκων

```
In[1]:= A = {  
    {1, 1, 1},  
    {a, b, c},  
    {a2, b2, c2}}
```

```
Out[1]= {{1, 1, 1}, {a, b, c}, {a2, b2, c2}}
```

```
In[2]:= Inverse[A] // Simplify
```

```
Out[2]= { {  $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}$ ,  $-\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}$ ,  $\frac{1}{(a-b)(a-c)}$  },  
  {  $-\frac{ac}{(a-b)(b-c)}$ ,  $\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}$ ,  $-\frac{1}{(a-b)(b-c)}$  },  
  {  $\frac{ab}{(a-c)(b-c)}$ ,  $-\frac{a+b}{(a-c)(b-c)}$ ,  $\frac{1}{(a-c)(b-c)}$  } }
```





# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (9)

γ) Συμβολικοί υπολογισμοί

γ5) υπολογισμός ορίων

$$\text{In[11]:= Limit}\left[\frac{\text{Sin}[x]}{x}, x \rightarrow 0\right]$$

$$\text{Out[11]= } 1$$

$$\text{In[13]:= Limit}\left[\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}, x \rightarrow 3, \text{Direction} \rightarrow -1\right]$$

$$\text{Out[13]= } 1$$

$$\text{In[14]:= Limit}\left[\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}, x \rightarrow 3, \text{Direction} \rightarrow 1\right]$$

$$\text{Out[14]= } -1$$



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (10)

γ) Συμβολικοί υπολογισμοί

γ6) υπολογισμός σειρών

```
In[15]:= Sum[ $\frac{1}{k^2}$ , {k, 1, Infinity}]
```

```
Out[15]=  $\frac{\pi^2}{6}$ 
```

$$\leftarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

```
In[16]:= Sum[ $\frac{1}{k}$ , {k, 1, Infinity}]
```

```
Sum::div : Sum does not converge . More..
```

```
Sum::div : Sum does not converge . More..
```

```
Out[16]=  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 
```

$$\leftarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$



# Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος κατά Riemann (1)

```
In[1]:= f[x_] := x3;
```

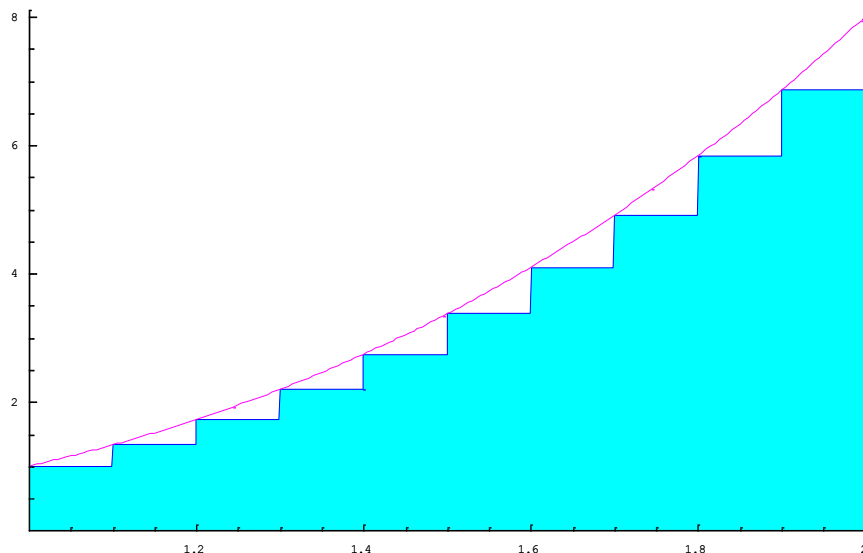
```
In[2]:= LeftRiemannSum[a0_, b0_, n0_] :=  
Module[{a = a0, b = b0, ΔX, k, n = n0, X},  
ΔX =  $\frac{b - a}{n}$  ;  
Xk = a + k ΔX ;  
Return[  $\sum_{k=1}^n f[X_{k-1}] \Delta X$  ] ; ] ;
```

```
In[3]:= LeftRiemannSum[1, 2, k]
```

```
Out[3]=  $\frac{(-1 + 3k)(-3 + 5k)}{4k^2}$ 
```

```
In[4]:= Limit[%, k → Infinity]
```

```
Out[4]=  $\frac{15}{4}$ 
```



# Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος κατά Riemann (2)

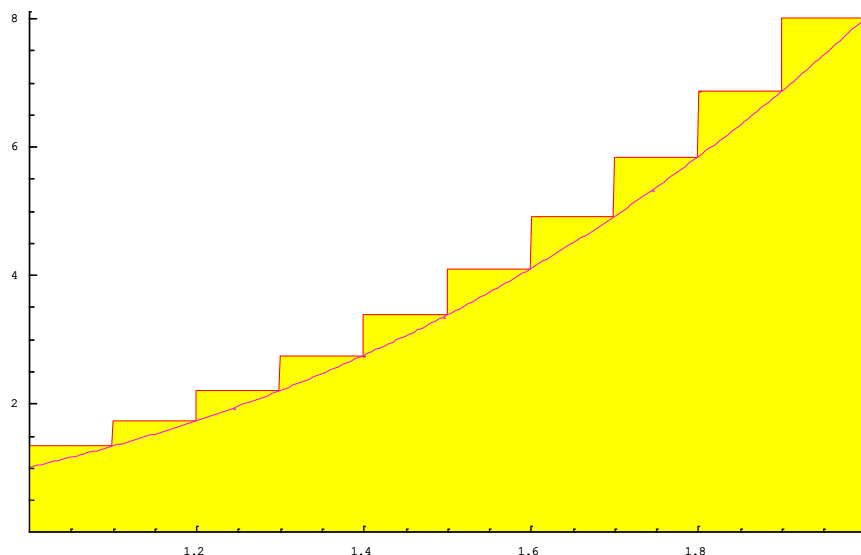
```
In[18]:= RightRiemannSum[a0_, b0_, n0_] :=  
  Module[{a = a0, b = b0, ΔX, k, n = n0, X},  
    ΔX =  $\frac{b - a}{n}$  ;  
    Xk = a + k ΔX ;  
    Return[  $\sum_{k=1}^n f[X_k] \Delta X$  ] ; ] ;
```

```
In[19]:= RightRiemannSum[1, 2, k]
```

```
Out[19]=  $\frac{(1 + 3 k) (3 + 5 k)}{4 k^2}$ 
```

```
In[20]:= Limit[%, k → Infinity]
```

```
Out[20]=  $\frac{15}{4}$ 
```



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (11)

γ) Συμβολικοί υπολογισμοί

γ7) διαφόριση και ολοκλήρωση συναρτήσεων

$$\text{In}[19]:= \partial_{\mathbf{x}} \left( \mathbf{x}^2 - 5 \mathbf{x} + \frac{6}{\mathbf{x} - 1} \right)$$

$$\text{Out}[19]= -5 - \frac{6}{(-1 + \mathbf{x})^2} + 2 \mathbf{x}$$

$$\text{In}[21]:= \int \frac{\mathbf{x} - 1}{\mathbf{x}^2 - 5 \mathbf{x} + 6} d\mathbf{x}$$

$$\text{Out}[21]= 2 \text{Log}[-3 + \mathbf{x}] - \text{Log}[-2 + \mathbf{x}]$$



# Υπολογισμός σειρών Fourier μιας συνάρτησης (1)

$$a[0] := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[x] dx$$

$$\text{In}[2]:= a[k_] := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[x] \text{Cos}[kx] dx$$

$$\text{In}[3]:= b[k_] := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[x] \text{Sin}[kx] dx$$

$$\text{In}[4]:= F[x_, K_] := a[0] + \sum_{k=1}^K (a[k] \text{Cos}[kx] + b[k] \text{Sin}[kx])$$

$$\text{In}[5]:= p[K_, a_] := \text{Plot}[\text{Evaluate}[F[x, K], \{x, -a, a\}], \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{PlotPoints} \rightarrow 200]$$

$$\text{In}[6]:= f[x_] := \text{Exp}[x]$$

$$\text{In}[7]:= a[0]$$

$$\text{Out}[7]= \frac{-e^{-\pi} + e^{\pi}}{2\pi}$$

$$\text{In}[8]:= \text{Simplify}[a[k]]$$

$$\text{Out}[8]= \frac{2k \text{Cosh}[\pi] \text{Sin}[k\pi] + 2 \text{Cos}[k\pi] \text{Sinh}[\pi]}{\pi + k^2 \pi}$$

$$\text{In}[9]:= \text{Simplify}[b[k]]$$

$$\text{Out}[9]= \frac{2 \text{Cosh}[\pi] \text{Sin}[k\pi] - 2k \text{Cos}[k\pi] \text{Sinh}[\pi]}{\pi + k^2 \pi}$$



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (12)

γ) Συμβολικοί υπολογισμοί

**γ8) επίλυση διαφορικών εξισώσεων**

```
In[23]:= DSolve[y''[x] == a y'[x] + y[x], y, x]
```

```
Out[23]= {{y -> Function[{x}, e^(1/2 (a - sqrt(4 + a^2)) x) C[1] + e^(1/2 (a + sqrt(4 + a^2)) x) C[2]]}}
```

**και εξισώσεων διαφορών**

```
In[25]:= RSolve[{F[n + 2] == F[n + 1] + F[n], F[1] == 1, F[2] == 1}, F[n], n] // FullSimplify
```

```
Out[25]= {{F[n] -> (-(1/2 (1 - sqrt(5)))^n + (1/2 (1 + sqrt(5)))^n) / sqrt(5)}}
```



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (13)

## δ) Χρήση επιλεγμένης ακρίβειας

```
In[3]:= N[Pi, 200]
```

```
Out[3]= 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105:  
8209749445923078164062862089986280348253421170679821:  
4808651328230664709384460955058223172535940812848111:  
74502841027019385211055596446229489549303820
```



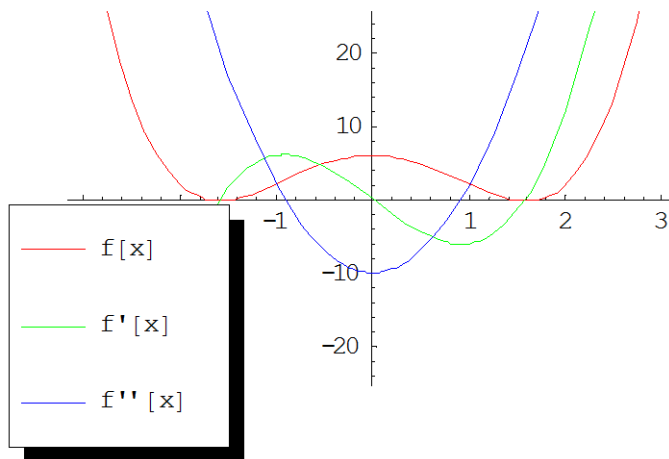


# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (14)

ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

## ε1) Διδιάστατα γραφικά

```
In[3]:= Plot[{f[x], f'[x], f''[x]}, {x, -3, 3},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0],  
RGBColor[0, 0, 1]},  
PlotLegend -> {"f[x]", "f'[x]", "f''[x]"}]
```



```
In[1]:= << Graphics`
```

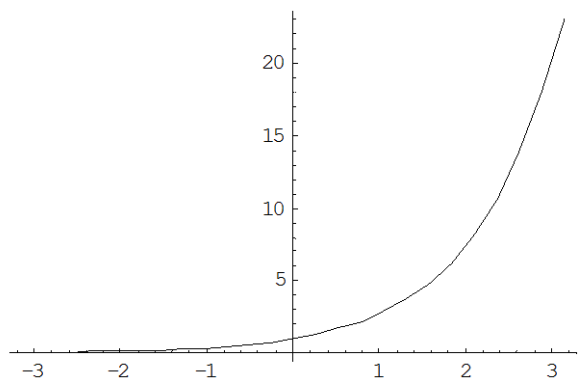
```
In[2]:= f[x_] := x4 - 5x2 + 6
```

```
Out[3]= - Graphics -
```



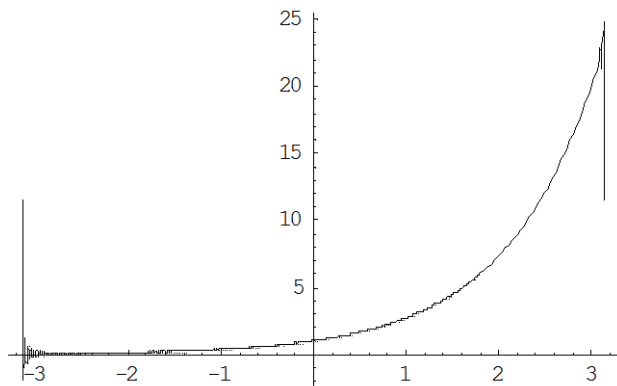
# Υπολογισμός σειρών Fourier μιας συνάρτησης (2)

```
In[10]:= Plot[Exp[x], {x, -Pi, Pi}, PlotRange -> All]
```



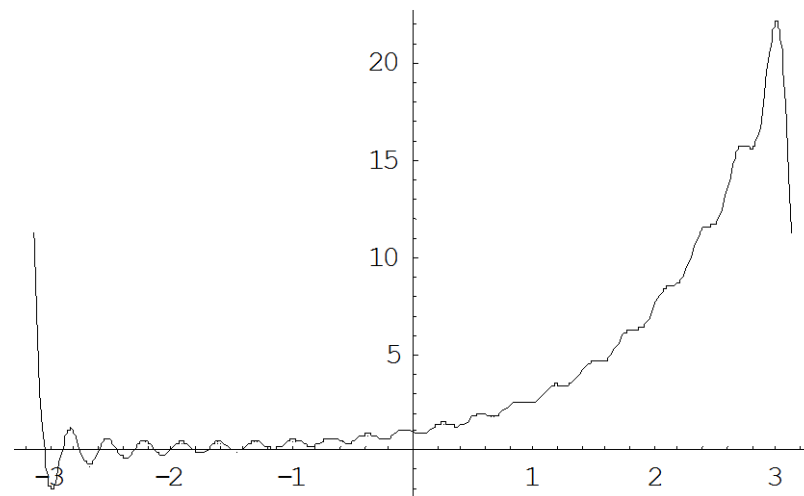
Out[10]= - Graphics -

```
In[12]:= p[200, Pi]
```



Out[12]= - Graphics -

```
In[11]:= p[20, Pi]
```



Out[11]= - Graphics -



# Υπολογισμός σειρών Taylor (1)

```
In[1]:= f[x_] := Exp[x]
```

```
In[2]:= g[k_] := Normal[Series[f[x], {x, 0, k}]]
```

```
In[3]:= s = Table[g[k], {k, 1, 5}]
```

```
Out[3]= {1 + x, 1 + x +  $\frac{x^2}{2}$ , 1 + x +  $\frac{x^2}{2}$  +  $\frac{x^3}{6}$ ,  
1 + x +  $\frac{x^2}{2}$  +  $\frac{x^3}{6}$  +  $\frac{x^4}{24}$ , 1 + x +  $\frac{x^2}{2}$  +  $\frac{x^3}{6}$  +  $\frac{x^4}{24}$  +  $\frac{x^5}{120}$ }
```

```
In[4]:= s1 = Table[{Hue[k]}, {k, 0.1, 0.5, 0.1}];
```

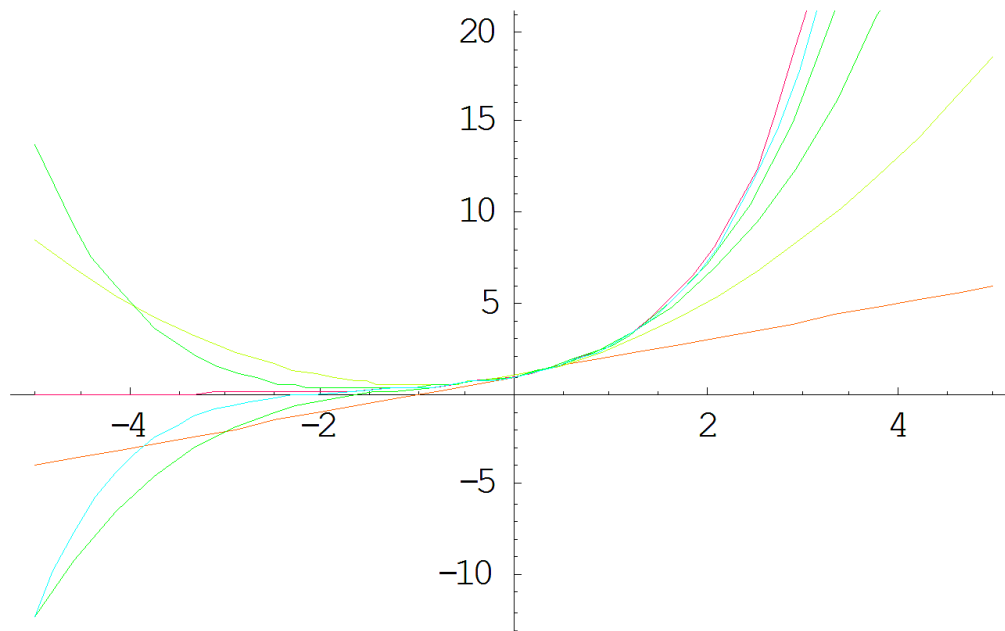
```
In[5]:= s2 = Join[{{Hue[0.9]}}, s1];
```

```
In[6]:= s = Join[{f[x]}, s];
```



# Υπολογισμός σειρών Taylor (2)

```
In[7]:= Plot[Evaluate[s], {x, -5, 5}, PlotStyle -> s2]
```



```
Out[7]= - Graphics -
```

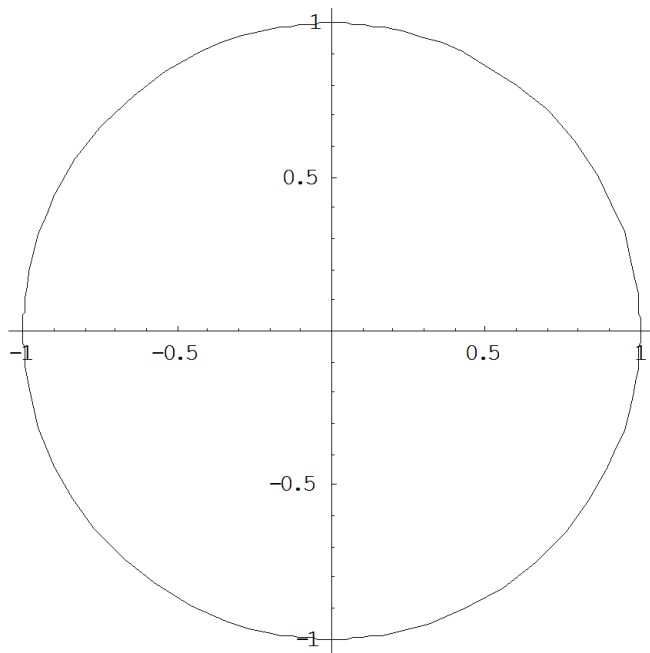


# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (15)

ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

## ε2) Παραμετρικές εξισώσεις

```
In[2]:= ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2*Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```



Out[2]= - Graphics -

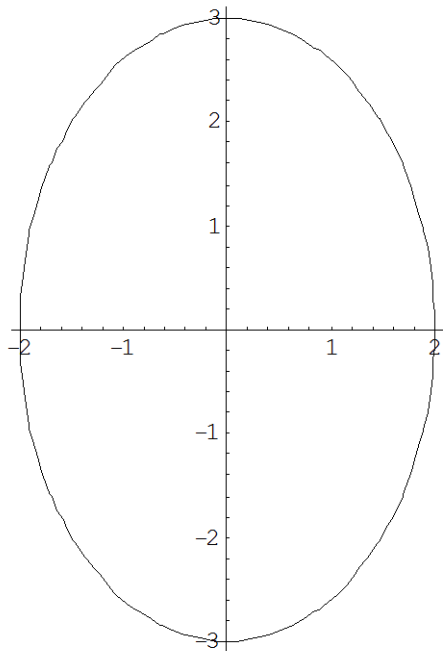


# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (16)

ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

**ε3) Γραφική παράσταση μέσω επίλυσης εξισώσεων**

```
In[5]:= ImplicitPlot[x^2/4 + y^2/9 == 1, {x, -2, 2}, {y, -3, 3}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



```
Out[5]= - ContourGraphics -
```



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (17)

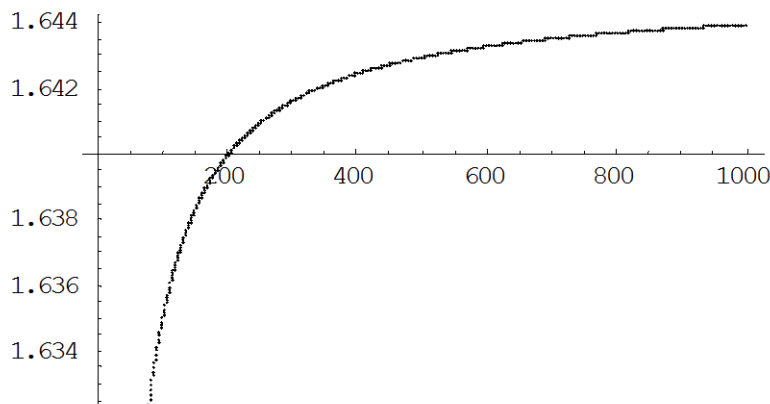
ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

## ε4) Γραφική παράσταση σημείων

```
In[1]:= s[n_] := Sum[ $\frac{1}{k^2}$ , {k, 1, n}]
```

```
In[2]:= a = Table[s[i], {i, 1, 1000}];
```

```
In[3]:= ListPlot[a]
```



```
Out[3]= - Graphics -
```

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

←

$$\{s_1, s_2, \dots, s_{1000}\}$$

←



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (18)

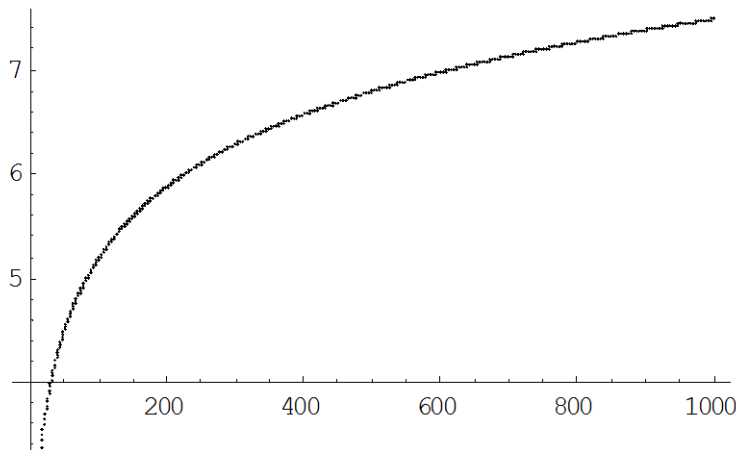
ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

## ε4) Γραφική παράσταση σημείων

```
In[7]:= t[n_] := Sum[1/k, {k, 1, n}]
```

```
In[8]:= a = Table[t[i], {i, 1, 1000}];
```

```
In[9]:= ListPlot[a]
```



```
Out[9]= - Graphics -
```

$$\leftarrow t_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$
$$\leftarrow \{t_1, t_2, \dots, t_{1000}\}$$



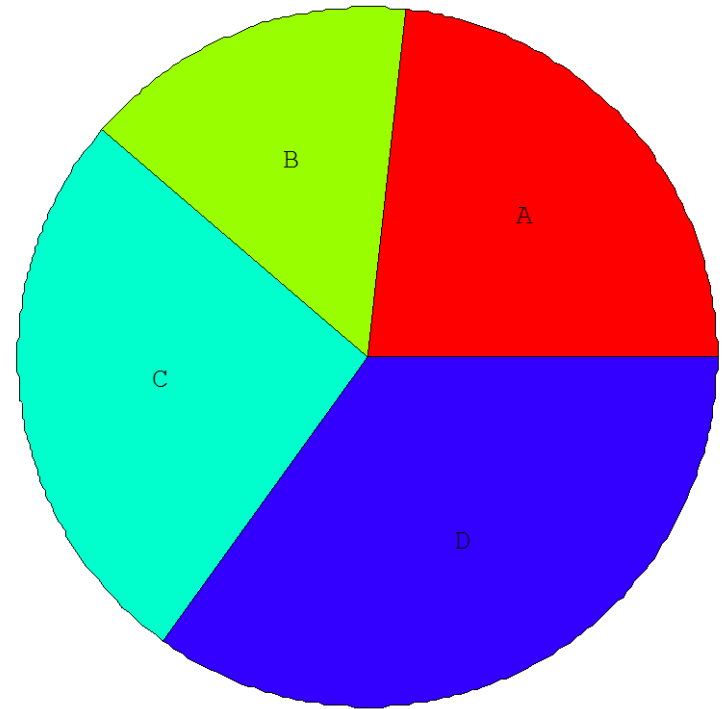


# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (19)

ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

## ε5) Στατιστικά διαγράμματα

```
In[10]:= PieChart[p, PieLabels→{A, B, C, D}]
```



```
In[8]:= << Graphics`
```

```
In[9]:= p = {30, 20, 34, 45}
```

```
Out[9]= {30, 20, 34, 45}
```

```
Out[10]= - Graphics -
```



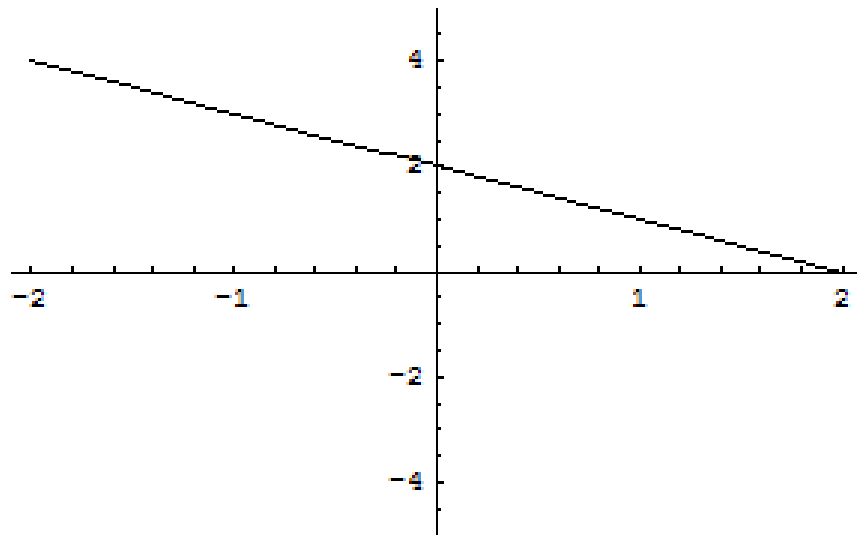
# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (20)

ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

ε6) Κινούμενες γραφικές παραστάσεις

```
In[1]:= << Graphics`
```

```
In[2]:= Animate[Plot[a*x+2, {x, -2, 2}, PlotRange -> {-5, 5}],  
           {a, -1, 1, 0.1}];
```



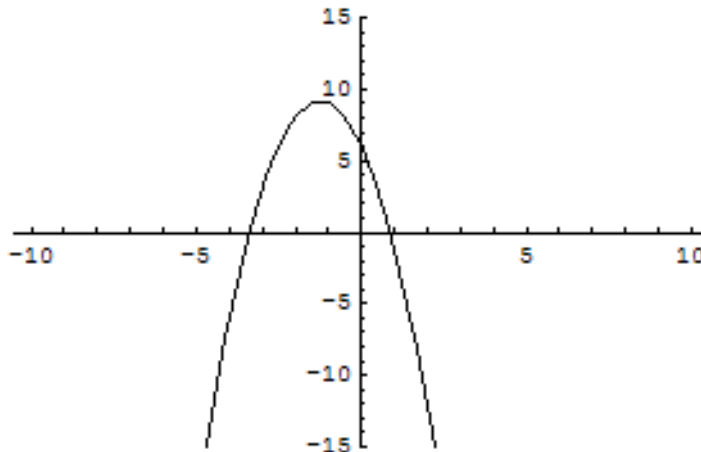
# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (21)

ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

ε6) Κινούμενες γραφικές παραστάσεις

```
In[1]:= << Graphics`
```

```
In[2]:= Animate[Plot[a * x2 - 5 x + 6, {x, -10, 10},  
PlotRange → {-15, 15}], {a, -2, 2, 0.1}]
```



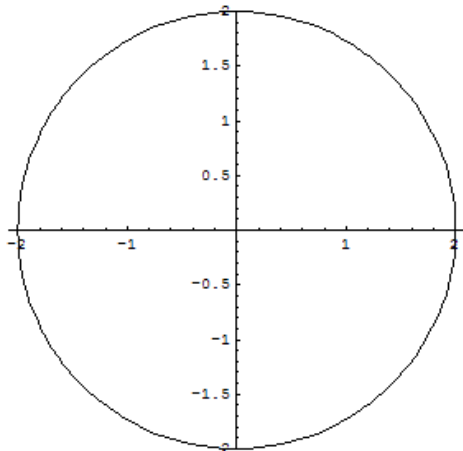
# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (22)

ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

ε6) Κινούμενες γραφικές παραστάσεις

In[1]:= << Graphics`

```
In[8]:= Animate[ImplicitPlot[ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4(1-e^2)} == 1$ , {x, -2, 2}, {y, -2\sqrt{1-e^2}, 2\sqrt{1-e^2}}, AxesOrigin -> {0, 0},  
PlotRange -> {-2, 2}], {e, 0.01, 0.99, 0.01}]
```



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (23)

ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

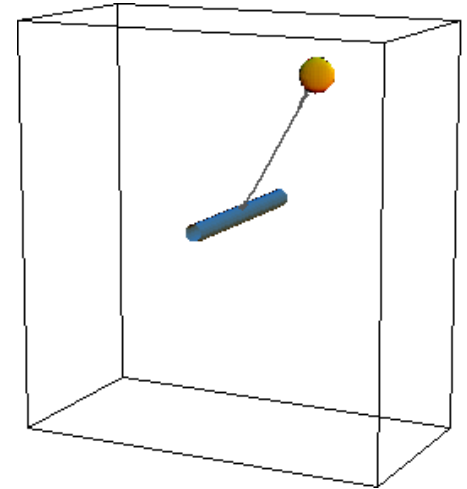
ε6) Κινούμενες γραφικές παραστάσεις

The second-order equation:

$$L \theta'' = -g \sin \theta$$

The first-order system:

$$\theta' = \omega, \quad \omega' = -g/L \sin \theta$$



`PendulumMovie3D[{ $\theta_0$ ,  $\omega_0$ }, L, tmax, nframes]` makes *nframes* frames of a 3-D animation of the simple pendulum starting with initial angle  $\theta_0$  and angular velocity  $\omega_0$ . The length of the pendulum's arm is *L* meters, and the mass is assumed to be 1 kg

```
In[25]:= period[ $\theta_0$ _, L_] := 4  $\sqrt{L/9.8}$  EllipticF[ $\pi/2$ , Sin[ $\theta_0/2$ ]2]
```

```
 $\theta_0 = 5 \pi / 6$ ;
```

```
PendulumMovie3D[{ $\theta_0$ , 0}, 1, period[ $\theta_0$ , 1], 30];
```

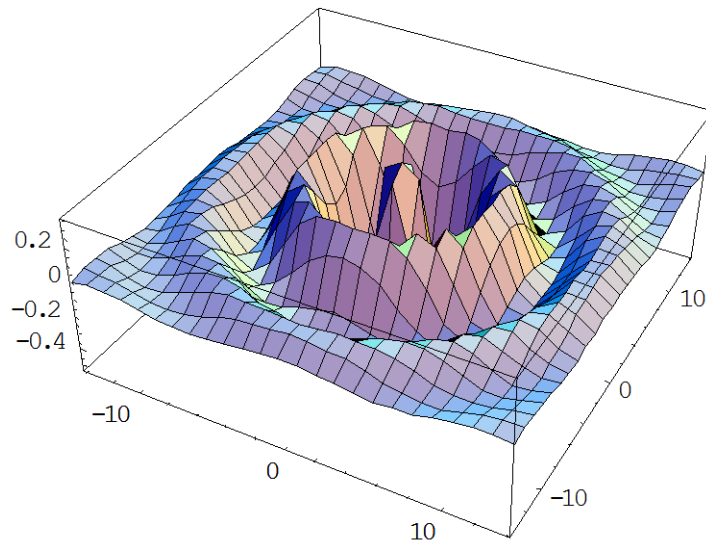


# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (24)

ε) Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων

## ε7) Τριδιάστατα γραφικά

```
In[13]:= Plot3D[E-0.2√x2+y2 Cos[√x2+y2], {x, -9 Pi/2, 9 Pi/2}, {y, -9 Pi/2, 9 Pi/2}]
```



Out[13]= - SurfaceGraphics -

# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (25)

## στ) Βιβλιοθήκη μαθηματικών συναρτήσεων

Altogether 385 functions have been listed. The following table summarizes the results with the mentioned weighting:

- |                         |     |   |     |
|-------------------------|-----|---|-----|
| • Standard mathematics  | 5%  | • Descriptive statistic                 | 20% |
| • Linear Algebra        | 15% | • Stochastic and distribution functions | 20% |
| • Analysis              | 10% | • Statistics                            | 20% |
| • Numerical mathematics | 10% | • Other mathematics                     | 20% |

Functions (Version)	GAUSS	Maple	Mathe- matica	Matlab	MuPAD	O-Matrix	Ox	Scilab	S- Plus
	(5.0)	(V8.0)	(4.2)	(6.5)	(2.5)	(5.2)	(3.2)	(2.6)	(V6.1)
Standard mathematics (5%)	85.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	80.00%	100.00%	80.00%	65.00%
Algebra (15%)	77.94%	82.35%	84.12%	95.29%	83.24%	67.65%	64.71%	76.47%	60.59%
Analysis (10%)	100.00%	63.64%	100.00%	100.00%	100.00%	63.64%	54.55%	100.00%	72.73%
Numerical mathematics (10%)	67.14%	85.71%	100.00%	80.00%	85.71%	71.43%	57.14%	57.14%	42.86%
Descriptive statistics, stochastic and distribution functions (20%)	70.06%	44.38%	93.03%	45.06%	47.25%	8.99%	58.99%	19.66%	38.20%
Statistics (20%)	63.55%	3.64%	32.64%	51.00%	20.09%	10.91%	32.73%	19.09%	46.09%
Other mathematics (20%)	82.40%	20.00%	65.60%	61.60%	7.60%	12.00%	60.00%	4.00%	15.20%
<b>Overall result (100% = Best)</b>	<b>75.86%</b>	<b>45.89%</b>	<b>75.87%</b>	<b>68.83%</b>	<b>51.04%</b>	<b>34.03%</b>	<b>56.22%</b>	<b>39.74%</b>	<b>43.80%</b>

by Stefan Steinhaus  
(stefan@steinhaus-net.de)

München / Germany  
15 Februar 2003



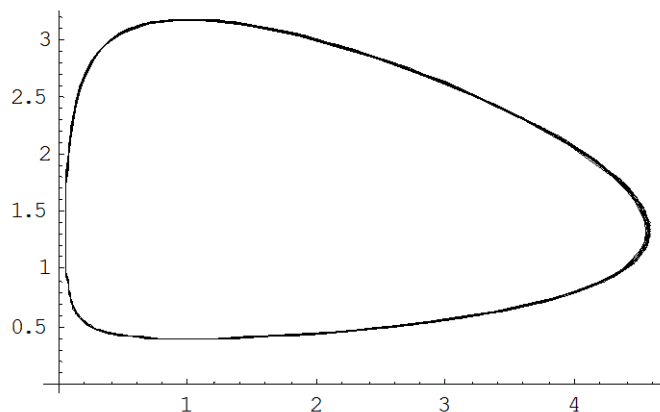
# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (26)

## ζ) Αριθμητικοί υπολογισμοί

```
In[1]:= s = NDSolve[{x' [t] == x[t] (4 - 3 y[t]),  
  y' [t] == y[t] (x[t] - 1), x[0] == 2, y[0] == 3},  
  {x, y}, {t, 0, 50}]
```

```
Out[1]= {{x -> InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, <>],  
  y -> InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, <>]}}
```

```
In[2]:= ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s, {t, 0, 50}]]
```



```
Out[2]= - Graphics -
```





# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (27)

## η) Γλώσσα προγραμματισμού

In[1]:= `diff[a_?NumberQ, x_] := 0 (* diff[a_, x_] := 0 /; FreeQ[a, x] *)`

In[2]:= `diff[x_^n_Integer:1, x_] := n*x^(n-1)`

In[3]:= `diff[a_^c_?IntegerQ, x_] := c*a^(c-1)*diff[a, x]`

In[4]:= `diff[a_ + b_, x_] := diff[a, x] + diff[b, x]`

In[5]:= `diff[a_ - b_, x_] := diff[a, x] - diff[b, x]`

In[6]:= `diff[a_ b_, x_] := diff[a, x] * b + a * diff[b, x]`

In[7]:= `diff[a_ / b_, x_] := (diff[a, x] * b - a * diff[b, x]) / b^2`

In[9]:= `diff[ $\frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 2}{x^2 - 1}$ , x]`

Out[9]= 
$$\frac{(-1 + x^2) (6 - 6x + 3x^2) - 2x (-2 + 6x - 3x^2 + x^3)}{(-1 + x^2)^2}$$



# Χαρακτηριστικά των ΥΣΑ (28)

η) Γλώσσα προγραμματισμού

```
In[1]:= f[1] := 1;
```

```
In[2]:= f[2] := 1;
```

```
In[3]:= f[n_Integer] := f[n - 1] + f[n - 2];
```

```
In[4]:= f[10]
```

```
Out[4]= 55
```

```
In[5]:= Trace[f[5]]
```

```
Out[5]= {f[5], f[5 - 1] + f[5 - 2], {{5 - 1, 4}, f[4], f[4 - 1] + f[4 - 2],  
      {{4 - 1, 3}, f[3], f[3 - 1] + f[3 - 2], {{3 - 1, 2}, f[2], 1},  
      {{3 - 2, 1}, f[1], 1}, 1 + 1, 2}, {{4 - 2, 2}, f[2], 1}, 2 + 1, 3},  
      {{5 - 2, 3}, f[3], f[3 - 1] + f[3 - 2], {{3 - 1, 2}, f[2], 1},  
      {{3 - 2, 1}, f[1], 1}, 1 + 1, 2}, 3 + 2, 5}
```



# Μειονεκτήματα των ΥΣΑ (29)

- Δυσκολία ορισμού του πεδίου λύσεων στο οποίο αναζητούμε λύσεις.
- Έχουν ιδιαιτερότητες που μαθαίνονται μόνο με την εμπειρία.
- Δεν καλύπτουν όλα τα υπάρχοντα επιστημονικά πεδία.
- Δεν δίνουν ακριβείς λύσεις σε προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχει ακριβής λύση π.χ. λύση πεμπτοβάθμιας εξίσωσης.
- Δυσκολία διασύνδεσης με άλλες εφαρμογές.
- Δυσκολία διαχείρισης προβλημάτων μεγάλης κλίμακας λόγω της χαμηλής ταχύτητας και του μεγάλου μεγέθους μνήμης που καταναλώνουν, από τους πόρους του υπολογιστή.
- Πολλές φορές δίνουν γενικές απαντήσεις οι οποίες όμως στερούνται κάποιου νοήματος.



# Αδυναμία εκτέλεσης συμβολικών υπολογισμών (1)

```
In[1]:= Sum[ $\frac{1}{3^n + 2}$ , {n, 1, Infinity}]
```

```
Out[1]=  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 3^n}$ 
```

```
In[2]:= NSum[ $\frac{1}{3^n + 2}$ , {n, 1, Infinity}]
```

```
Out[2]= 0.343575
```

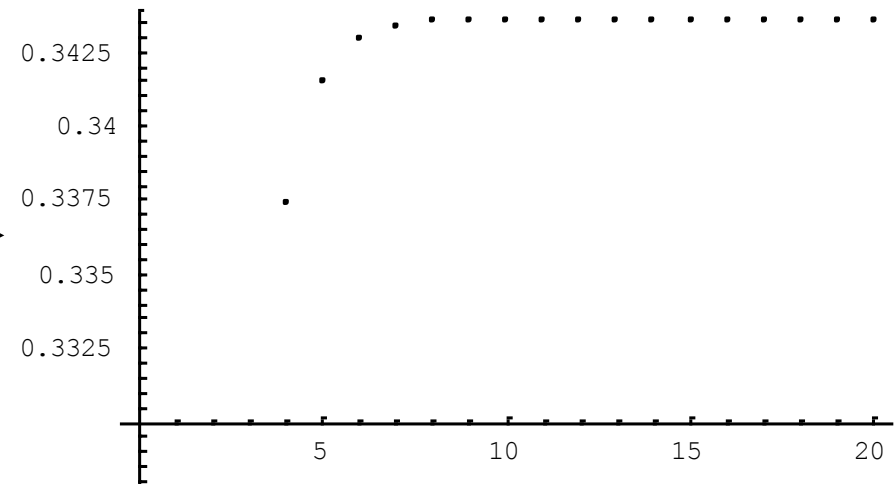
```
In[1]:= s[k_] := NSum[ $\frac{1}{3^n + 2}$ , {n, 1, k}]
```

```
In[2]:= a = Table[{k, s[k]}, {k, 1, 20}];
```



```
In[29]:= Sum[ $\frac{1}{3^n}$ , {n, 1, Infinity}]
```

```
Out[29]=  $\frac{1}{2}$ 
```



# Αδυναμία εκτέλεσης συμβολικών υπολογισμών (2)

```
In[31]:= Solve[x5 + 5 x4 + 4 x3 + 3 x2 + 2 x + 1 == 0, x]
```

```
Out[31]= {{x → Root[1 + 2 #1 + 3 #12 + 4 #13 + 5 #14 + #15 &, 1]},  
          {x → Root[1 + 2 #1 + 3 #12 + 4 #13 + 5 #14 + #15 &, 2]},  
          {x → Root[1 + 2 #1 + 3 #12 + 4 #13 + 5 #14 + #15 &, 3]},  
          {x → Root[1 + 2 #1 + 3 #12 + 4 #13 + 5 #14 + #15 &, 4]},  
          {x → Root[1 + 2 #1 + 3 #12 + 4 #13 + 5 #14 + #15 &, 5]}}
```

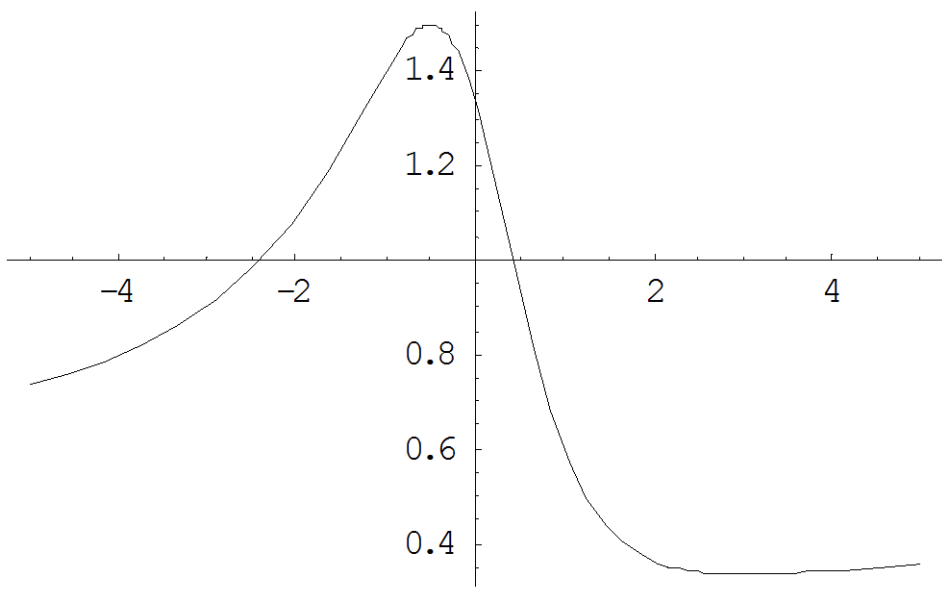
```
In[32]:= NSolve[x5 + 5 x4 + 4 x3 + 3 x2 + 2 x + 1 == 0, x]
```

```
Out[32]= {{x → -4.19273}, {x → -0.564099 - 0.390903 i},  
          {x → -0.564099 + 0.390903 i},  
          {x → 0.160462 - 0.693272 i}, {x → 0.160462 + 0.693272 i}}
```



# Αδυναμία αντίληψης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης

```
In[4]:= Plot[ $\frac{x^3 + 8}{2x^3 + 4x^2 + 3x + 6}$ , {x, -5, 5}]
```



Out[4]= - Graphics -

Απλοποίηση στο  $x=-2$



```
In[5]:= Simplify[ $\frac{x^3 + 8}{2x^3 + 4x^2 + 3x + 6}$ ]
```

$$\text{Out[5]} = \frac{4 - 2x + x^2}{3 + 2x^2}$$



# Τα ΥΣΑ στην έρευνα (1)

- Έλεγχος εικασιών – για να υποστηρίξουν αλλά και να απορρίψουν εικασίες.
- Εκτέλεση συμβολικών υπολογισμών που θα απαιτήσει ένας νέος αλγόριθμος.
- Σχεδιασμός και δημιουργία νέων ΥΣΑ για νέα ερευνητικά πεδία.
- Προσαρμογή και βελτίωση των αλγορίθμων που έχουμε δημιουργήσει για την επίλυση ενός προβλήματος.
- Δημιουργία συμβολικών λύσεων σε μαθηματικά προβλήματα, οι οποίες θα μας δώσουν μια βαθύτερη γνώση για το ίδιο το πρόβλημα.
- Δημιουργία μαθηματικών πινάκων π.χ. πίνακες ολοκληρωμάτων, παραγώγων, ειδικών συναρτήσεων κ.λ.π.



# Τα ΥΣΑ στην έρευνα (2)

**Παράδειγμα.** Ας δούμε αν ισχύει η παρακάτω εικασία :

«Ο αριθμός  $2^p - 1$  είναι πρώτος αριθμός αν ο  $p$  είναι πρώτος αριθμός.»

```
In[1]:= i = 1;  
While[PrimeQ[2Prime[i] - 1],  
  ++i]  
Print[i, "th prime=", Prime[i]]
```

5th prime=11

```
In[4]:= FactorInteger[211 - 1]
```

←  $2^{11} - 1 = 23^1 \times 89^1$

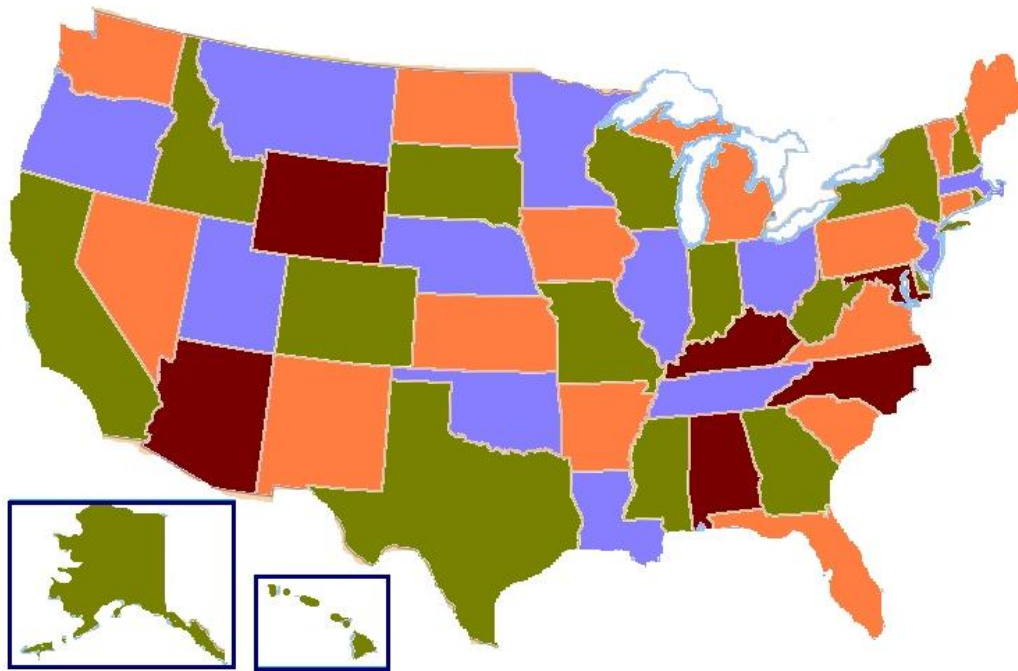
```
Out[4]= {{23, 1}, {89, 1}}
```





# Τα ΥΣΑ στην έρευνα (3)

Το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων



Εικόνα 9

Η απόδειξη στηρίζεται στην ανάλυση περιπτώσεων από Η/Υ.



# Τα ΥΣΑ στην εκπαίδευση (1)

- Βοηθούν στην ενεργή συμμετοχή των μαθητών στην μάθηση.
- Δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές:
  - να ασχοληθούν περισσότερο με την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών,
  - να πειραματιστούν,
  - να συμμετέχουν στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων,
  - να ασχοληθούν περισσότερο με την ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων,
  - να δουν γραφικά νέες έννοιες,
  - να αναγνωρίσουν κρυμμένα πρότυπα από την λύση προβλημάτων.



# Τα ΥΣΑ στην εκπαίδευση (2)

**Παράδειγμα.** Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα VanDermonde.

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{In}[1]:= \mathbf{A} = \{ \{ \mathbf{1}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1^2 \}, \{ \mathbf{1}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2^2 \}, \{ \mathbf{1}, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3^2 \} \};$$

$$\text{In}[2]:= \mathbf{Factor}[\mathbf{Det}[\mathbf{A}]]$$

$$\text{Out}[2]= - (x_1 - x_2) (x_1 - x_3) (x_2 - x_3)$$



# Τα ΥΣΑ στην εκπαίδευση (3)

```
In[3]:= A = { {1, x1, x12, x13}, {1, x2, x22, x23}, {1, x3, x32, x33}, {1, x4, x42, x43};
```

```
In[4]:= Factor[Det[A]]
```

```
Out[4]= (x1 - x2) (x1 - x3) (x2 - x3) (x1 - x4) (x2 - x4) (x3 - x4)
```

Αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε πιθανώς θα έχει την μορφή.

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^n \prod_{\substack{i,j \\ i < j}} (x_i - x_j) = \prod_{\substack{i,j \\ i > j}} (x_i - x_j)$$



# Κρυμμένα πρότυπα

$$\text{In}[1]:= \partial_x (x^2 + 5x + 6)^x$$

$$\text{Out}[1]= (6 + 5x + x^2)^x \left( \frac{x(5 + 2x)}{6 + 5x + x^2} + \text{Log}[6 + 5x + x^2] \right)$$

$$\text{In}[2]:= \partial_x (\text{Sin}[x] + x)^x$$

$$\text{Out}[2]= (x + \text{Sin}[x])^x \left( \text{Log}[x + \text{Sin}[x]] + \frac{x(1 + \text{Cos}[x])}{x + \text{Sin}[x]} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x)^x = ?$$

$$\text{In}[4]:= \partial_x f[x]^x$$

$$\text{Out}[4]= f[x]^x \left( \text{Log}[f[x]] + \frac{x f'[x]}{f[x]} \right)$$



# Τα ΥΣΑ στην εκπαίδευση (4)

- Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.  
<http://anemos.web.auth.gr/mathematica/index4.htm>  
<http://users.auth.gr/~epsom/Symbolic/index.htm>
- Τμήμα Μηχανικών Η/Υ, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας  
[http://www.inf.uth.gr/greek/coursedesc\\_308.htm](http://www.inf.uth.gr/greek/coursedesc_308.htm)  
[http://www.inf.uth.gr/greek/coursedesc\\_408.htm](http://www.inf.uth.gr/greek/coursedesc_408.htm)
- Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών  
<http://eclass.di.uoa.gr/D231/>
- Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων  
<http://www.math.uoi.gr/~nglinos/sm/ma644.html>
- Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης  
<http://www.math.uoc.gr/~marios/sy03/>



# Το μέλλον των ΥΣΑ

- Ενσωμάτωση νέων συναρτήσεων που θα καλύπτουν ευρύτερα πεδία έρευνας.
- Βελτιστοποίηση των ήδη υπαρχόντων αλγορίθμων.
- Προτυποποίηση του τρόπου αναπαράστασης των δεδομένων ώστε να είναι δυνατή η επικοινωνία μεταξύ διαφορετικών ΥΣΑ.
- Δυνατότητα χρήσης τους μέσω του Internet (ήδη γίνεται π.χ. WolframAlpha) αλλά και σε κινητά/tablets.
- Δημιουργία βάσης μαθηματικών προβλημάτων στα οποία θα δοκιμάζονται οι επιδόσεις των ΥΣΑ.
- Ευρεία χρήση τους στην εκπαίδευση.



# Χρήσιμα links για τα ΥΣΑ

- Ιστοσελίδα της ειδικής ομάδας της Association for Computing Machinery που ειδικεύεται στο θέμα αυτό <http://www.sigsam.org/> .
- Περιοδικά
  - [ACM Communications in Computer Algebra](#)
  - [Journal of Symbolic Computation](#)
- Συνέδρια
  - [International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation \(ISSAC\)](#)





# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- **Εικόνα 1:** <http://www.library.upenn.edu/exhibits/rbm/mauchly/jwm0-1.html>
- **Εικόνα 2:** [http://ece.uprm.edu/~cabassa/inge3016/imagenes/erma\\_con.jpg](http://ece.uprm.edu/~cabassa/inge3016/imagenes/erma_con.jpg)
- **Εικόνα 3:** <http://ece.uprm.edu/~cabassa/inge3016/imagenes/ibm360.jpg>
- **Εικόνα 4:** <https://www.msu.edu/course/lbs/126/lectures/history.html>
- **Εικόνα 5:** <http://uwyo.org/personal-computer/>
- **Εικόνα 6:**  
[http://4.bp.blogspot.com/\\_ayvorITawE4/SSjGAg7o5I/AAAAAAAAABbQ/QuU41fMu2jA/s1600-h/modsim\\_2.gif](http://4.bp.blogspot.com/_ayvorITawE4/SSjGAg7o5I/AAAAAAAAABbQ/QuU41fMu2jA/s1600-h/modsim_2.gif)
- **Εικόνα 7:** <https://www.ncdc.noaa.gov/data-access/model-data/model-datasets/numerical-weather-prediction>



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 8:** <http://www.figes.com.tr/matlab/internet-seminerleri/akademide-model-tabanli-tasarim.php>
- **Εικόνα 9:** By Map of\_USA\_four\_colours.svg: of the modification : Derfel73) Dbenbennderivative work: Tomwsulcer (talk) - Map\_of\_USA\_four\_colours.svg, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19143208>



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Συμβολικές Γλώσσες Προγραμματισμού. Ενότητα 1: Από την Άλγεβρα των Υπολογισμών στα Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

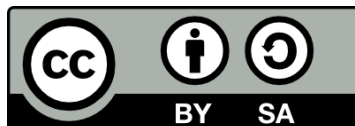
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS430/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

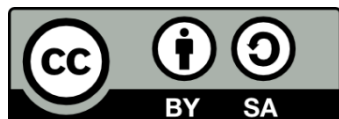
μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου  
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ