



Συμβολικές Γλώσσες Προγραμματισμού

Ενότητα 4: Συμβολικοί υπολογισμοί

Νικόλαος Καραμπετάκης

Τμήμα Μαθηματικών



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα

1. Διαφορά αριθμητικών και συμβολικών υπολογισμών.
2. Μετασχηματισμός αλγεβρικών εκφράσεων και απλοποίηση.
3. Πίνακες - Γραμμικά συστήματα.
4. Συνάρτηση.
 - 4.1. Όριο συνάρτησης.
 - 4.2. Παράγωγος συνάρτησης.
 - 4.3. Ολοκλήρωμα συνάρτησης.
5. Αθροίσματα - Γινόμενα.
6. Επίλυση διαφορικών εξισώσεων.



Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη των συμβολικών υπολογισμών που πραγματοποιούνται με το *Mathematica*.



Διαφορά αριθμητικών και συμβολικών υπολογισμών (1)

Αριθμητικός υπολογισμός

$$3 + 4 - 2$$

$$5$$

Συμβολικός υπολογισμός

$$3x + 4x - 2$$

$$-2 + 7x$$

Προσοχή στο κενό μεταξύ των μεταβλητών αν θέλω να παραλείψω το σύμβολο του πολλαπλασιασμού

$$xy - 3xy$$

$$xy - 3 \times y$$



Διαφορά αριθμητικών και συμβολικών υπολογισμών (2)

 $x y - 3 x y$ $-2 \times y$ 

Ανάθεση τιμής σε μεταβλητή

Ανάθεση τιμής σε μεταβλητή μέσω κανόνα (rule)

$$x + 2y /. x \rightarrow 1$$

$$1 + 2y$$

$$3z - 2x /. \{x \rightarrow 1, z \rightarrow 2\}$$

$$4$$



Ανάπτυξη - Παραγοντοποίηση έκφρασης

Ανάπτυξη μιας έκφρασης

```
Expand[(x + 1)^3]
```

```
1 + 3 x + 3 x^2 + x^3
```

```
Expand[(x + y)^3 + y^3, x]
```

```
x^3 + 3 x^2 y + 3 x y^2 + 2 y^3
```

Παραγοντοποίηση

```
Factor[%]
```

```
(x + y)^3
```

```
Factor[x^2 - 2 x y + y^2]
```

```
(x - y)^2
```



Απλοποίηση έκφρασης

Απλοποίηση εκφράσεων με την εφαρμογή στοιχειωδών αλγεβρικών μετασχηματισμών

```
Simplify[x2 + 2 x + 1]
```

```
(1 + x)2
```

ή με την εφαρμογή ακόμα μεγαλύτερης γκάμας αλγεβρικών μετασχηματισμών όταν δεν δουλεύει επαρκώς η Simplify

```
Simplify[Log[x - x2] - Log[x]]
```

```
-Log[x] + Log[-(-1 + x) x]
```

```
FullSimplify[Log[x - x2] - Log[x]]
```

```
Log[1 - x]
```



Απλοποίηση μιγαδικών εκφράσεων

Ανάπτυξη μιγαδικών παραστάσεων στις οποίες δεν δουλεύει η FullSimplify γίνεται με την ComplexExpand

```
FullSimplify[(Sqrt[3] + I)^n + (Sqrt[3] - I)^n]
```

$$\left(-i + \sqrt{3}\right)^n + \left(i + \sqrt{3}\right)^n$$

```
ComplexExpand[(Sqrt[3] + I)^n + (Sqrt[3] - I)^n]
```

$$2^{1+n} \cos\left[\frac{n \pi}{6}\right]$$



Τριγωνομετρικές εκφράσεις (1)

Στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρησιμοποιούμε την TrigExpand για να αναπτύξουμε τριγωνομετρικές εκφράσεις σε άλλες απλούστερες με ορίσματα μικρότερες γωνίες, σε αντίθεση με την TrigReduce που προσπαθεί να δημιουργήσει τριγωνομετρικές εκφράσεις με σύνθεση ορισμάτων.

```
FullSimplify[Cos[α + β]]
```

```
Cos [á + â]
```

```
TrigExpand[Cos[α + β]]
```

```
Cos [α] Cos [β] - Sin [α] Sin [β]
```

```
TrigReduce[%]
```

```
Cos [α + β]
```



Τριγωνομετρικές εκφράσεις (2)

Τέλος η TrigFactor προσπαθεί να παραγοντοποιήσει τριγωνομετρικές εκφράσεις π.χ.

```
TrigFactor[Cos[x]^2 - 1/2]
```

```
Sin[Pi/4 - x] Sin[Pi/4 + x]
```



Άσκηση 1

Άσκηση. Να μετατραπούν οι παρακάτω εκφράσεις σε απλούστερες.

a) $\text{Cos}[x]^2 - \text{Sin}[x]^2$ b) $2 \text{Sin}[x] \text{Cos}[x]$

b) $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z^{2000} = ?$ (Ασκ.Α.6, σελ.110, Μαθ. Γ' Λυκείου, Θετ. Τεχ. Κατ.)

c) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ (Ασκ.Β.2, σελ.111, Μαθ. Γ' Λυκείου, Θετ.. Τε. Κατ.)



Πίνακες (1)

Ορισμός πίνακα

```
a = {{1, 2, 3}, {2, 3, 1}, {3, 1, 2}}
```

```
{ {1, 2, 3}, {2, 3, 1}, {3, 1, 2} }
```

```
b = IdentityMatrix[3]
```

```
{ {1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1} }
```

```
Clear[x, y, z]
```

```
c = {{x}, {y}, {z}}
```

```
{ {x}, {y}, {z} }
```



Πίνακες (2)

Πρόσθεση-Αφαίρεση πινάκων

$a + b$

$\{\{2, 2, 3\}, \{2, 4, 1\}, \{3, 1, 3\}\}$

$a - b$

$\{\{0, 2, 3\}, \{2, 2, 1\}, \{3, 1, 1\}\}$

Γινόμενο πινάκων

$a.b$

$\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}\}$



Πίνακες (3)

Γινόμενο αριθμού με πίνακα

$3 * a$

$\{\{3, 6, 9\}, \{6, 9, 3\}, \{9, 3, 6\}\}$

Αντίστροφος πίνακα

$\text{Inverse}[a]$

$\left\{ \left\{ -\frac{5}{18}, \frac{1}{18}, \frac{7}{18} \right\}, \left\{ \frac{1}{18}, \frac{7}{18}, -\frac{5}{18} \right\}, \left\{ \frac{7}{18}, -\frac{5}{18}, \frac{1}{18} \right\} \right\}$

Συνεπώς αν έχω να λύσω την $AX=B$ θα έχω $X=\text{Inverse}[A].b$



Πίνακες (4)

Δύναμη πίνακα

MatrixPower[a, n] // Simplify

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}(-3+n)} \left(-3 + 3(-1)^n + 2\sqrt{3} + 2(-1)^n\sqrt{3} + 2^{1+n} 3^{\frac{1+n}{2}} \right), \right. \right. \\ \left. \frac{1}{2} 3^{-1+\frac{n}{2}} \left(-1 + (-1)^{1+n} + 2^{1+n} 3^{n/2} \right), \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}(-3+n)} \left(3 - 3(-1)^n - \sqrt{3} + (-1)^{1+n}\sqrt{3} + 2^{1+n} 3^{\frac{1+n}{2}} \right) \right\}, \\ \left\{ \frac{1}{2} 3^{-1+\frac{n}{2}} \left(-1 + (-1)^{1+n} + 2^{1+n} 3^{n/2} \right), \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}(-3+n)} \left(3 - 3(-1)^n + 2\sqrt{3} + 2(-1)^n\sqrt{3} + 2^{1+n} 3^{\frac{1+n}{2}} \right), \right. \\ \left. \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}(-3+n)} \left(-3 + 3(-1)^n - \sqrt{3} + (-1)^{1+n}\sqrt{3} + 2^{1+n} 3^{\frac{1+n}{2}} \right) \right\}, \\ \left\{ \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}(-3+n)} \left(3 - 3(-1)^n - \sqrt{3} + (-1)^{1+n}\sqrt{3} + 2^{1+n} 3^{\frac{1+n}{2}} \right), \right. \\ \left. \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}(-3+n)} \left(-3 + 3(-1)^n - \sqrt{3} + (-1)^{1+n}\sqrt{3} + 2^{1+n} 3^{\frac{1+n}{2}} \right), 3^{-1+\frac{n}{2}} \left(1 + (-1)^n + 2^n 3^{n/2} \right) \right\} \}$$



Άσκηση 2

Άσκηση. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση. Να βρεθεί α) ο A^2 και β) ο αντίστροφος του πίνακα A . Οι εκφράσεις να απλοποιηθούν. (Άσκ. Β.6., σελ.35, Μαθ. Γ' Λυκ. Θετ. Τεχ. Κατ.)

$$A = \begin{pmatrix} \text{Cos}[x] & -\text{Sin}[x] \\ \text{Sin}[x] & \text{Cos}[x] \end{pmatrix}$$

Άσκηση. Να δείξετε ότι $A^n = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ (Άσκ. Β.8, σελ. 36, Μαθ. Γ' Λυκ., Θετ. Τε. Κατ.)}$$



Γραμμικά συστήματα (1)

Επίλυση γραμμικού συστήματος

```
Clear[a]
```

```
A = {{a, 1, 1}, {1, a, 1}, {1, 1, a}}
```

```
{{a, 1, 1}, {1, a, 1}, {1, 1, a}}
```

```
X = {{x}, {y}, {z}}
```

```
{{x}, {y}, {z}}
```

```
B = {{1}, {a}, {a^2}}
```

```
{{1}, {a}, {a^2}}
```



Γραμμικά συστήματα (2)

```
Solve[{a * x + y + z == 1, x + a * y + z == a, x + y + a * z == a^2}, {x, y, z}]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{1+a}{2+a}, y \rightarrow \frac{1}{2+a}, z \rightarrow \frac{(1+a)^2}{2+a} \right\} \right\}$$

ή με άλλο τρόπο

```
Solve[A.X == B, {x, y, z}]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{1+a}{2+a}, y \rightarrow \frac{1}{2+a}, z \rightarrow \frac{(1+a)^2}{2+a} \right\} \right\}$$

Παρατηρούμε όμως ότι δεν κάνει πλήρη διερεύνηση του προβλήματος. Πλήρης διερεύνηση με όλες τις πιθανές λύσεις μπορεί να γίνει με την `Reduce[]`.

```
Reduce[{a * x + y + z == 1, x + a * y + z == a, x + y + a * z == a^2}, {x, y, z}]
```

$$(a == 1 \ \&\& \ z == 1 - x - y) \ \|\ \|\$$

$$\left((-1 + a) (2 + a) \neq 0 \ \&\& \ x == \frac{-1 - a}{2 + a} \ \&\& \ y == 1 + x \ \&\& \ z == 1 - a x - y \right)$$



Γραμμικά συστήματα (3)

Reduce[A.X == B, {x, y, z}]

$$(a == 1 \ \&\& \ z == 1 - x - y) \ \|\| \left((-1 + a) (2 + a) \neq 0 \ \&\& \ x == \frac{-1 - a}{2 + a} \ \&\& \ y == 1 + x \ \&\& \ z == 1 - a x - y \right)$$

Οι ίδιες συναρτήσεις ισχύουν για ομογενή συστήματα

Solve[A.X == {{0}, {0}, {0}}, {x, y, z}]

$$\{ \{ x \rightarrow 0, \ y \rightarrow 0, \ z \rightarrow 0 \} \}$$

Reduce[A.X == {{0}, {0}, {0}}, {x, y, z}]

$$(a == 1 \ \&\& \ z == -x - y) \ \|\| \ (a == -2 \ \&\& \ y == x \ \&\& \ z == 2x - y) \ \|\| \left(-2 + a + a^2 \neq 0 \ \&\& \ x == 0 \ \&\& \ y == 0 \ \&\& \ z == -y \right)$$



Γραμμικά συστήματα ανισώσεων

Αν θέλουμε να λύσουμε σύστημα ανισώσεων θα πρέπει να καλέσουμε την συνάρτηση `InequalitySolve[]` από το πακέτο «Algebra`InequalitySolve`»

```
<< Algebra`InequalitySolve`
```

```
Jhwqrshq=Fdqqrwrshq#DojheudcLqhtxdolw|V>oyhc
```

```
$Failed
```

```
Reduce[{2 * x + y + z ≥ 1, x + 2 * y + z ≥ 2, x + y + 2 * z ≥ 4}, {x, y, z}, Reals]
```

```
(x < - $\frac{3}{4}$  && ((y ≤ 1 + x && z ≥ 2 - x - 2 y) ||  
  (1 + x < y ≤ -2 - 3 x && z ≥ 1 - 2 x - y) ||  
  (y > -2 - 3 x && z ≥  $\frac{1}{2}$  (4 - x - y)))) || (x ≥ - $\frac{3}{4}$  &&  
  ((y < - $\frac{x}{3}$  && z ≥ 2 - x - 2 y) || (y ≥ - $\frac{x}{3}$  && z ≥  $\frac{1}{2}$  (4 - x - y))))
```



Άσκηση 3

Άσκηση. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ 2a+1 \end{pmatrix} \text{ (Άσκ. Β6, σελ. 74, Μαθ. Γ' Λυκ, Θετ. Τε.Κατ.)}$$

Άσκηση. Να λυθεί το σύστημα ανισώσεων

$$\{x + y \geq 2, -3x + 4y > 3\} \text{ (Άσκ. Β6, σελ. 74, Μαθ. Γ' Λυκ, Θετ. Τε.Κατ.)}$$



Συνάρτηση (1)

Ορισμός συνάρτησης

$$f[x_] := x^2 + 3$$

$$f[3]$$

12

Σύνθεση συνάρτησης

$$f[f[x]]$$

$$3 + (3 + x^2)^2$$

$$\text{Composition}[f, f][x]$$

$$3 + (3 + x^2)^2$$



Συνάρτηση (2)

Άλλος τρόπος ορισμού

```
g := #1^2 + 3 &
```

```
g[3]
```

```
12
```

Άλλος τρόπος ορισμού

```
f := Function[x, x^2 + 3]
```

```
f[3]
```

```
12
```

Συνδυασμός των παραπάνω



Συνάρτηση (3)

```
Map[#1^2 + 3 &, {x, y}]
```

```
{3 + x^2, 3 + y^2}
```

Η `Map[f,expr]` αντιστοιχεί την συνάρτηση `f` σε κάθε μέλος της `expr`. Αντίθετα η `Apply[f,expr]` υπολογίζει την `f` με ορίσματα που ορίζονται στην `expr`.

```
pow[a_, n_Integer] := a^n
```

```
pow[3, 2]
```

```
9
```

```
pow[3, 3.1]
```

```
pow[3, 3.1]
```

```
Apply[pow, {3, 2}]
```

```
9
```



Αντίστροφη Συνάρτηση

Αντίστροφη συνάρτηση

```
Clear[f, g]
```

```
f[x_] := x + 3
```

```
g[x_] := InverseFunction[f][x]
```

```
f[g[x]] // Simplify
```

```
x
```



Άσκηση 4

Άσκηση. Να δημιουργήσετε μια συνάρτηση $a[n,m]$ που θα δέχεται δύο ακέραιους αριθμούς n,m και θα υπολογίζει το

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $a[5,2]$ και $a[10,2]$.



Όριο συνάρτησης (1)

Όριο συνάρτησης

`Limit[Sin[x]/x, x → 0]`

1

`Limit[(Cos[x] - 1)/x, x → 0]`

0



Όριο συνάρτησης (2)

Πλευρικά όρια ($x \rightarrow x_0^-$)

Limit[1/(x - 2), x → 2, Direction → 1]

$-\infty$

Limit[1/x, x → Infinity, Direction → 1]

0

Πλευρικά όρια ($x \rightarrow x_0^+$)

Limit[1/(x - 2), x → 2, Direction → -1]

∞

Limit[1/x, x → Infinity, Direction → -1]

0



Όριο συνάρτησης (3)

Πολλαπλή συνάρτηση

```
f[x_] := If[x ≤ 1, x^2, 5 x]
```

```
f[-1]
```

```
1
```

```
f[2]
```

```
10
```

Η παραπάνω συνάρτηση είναι συνεχής όταν υπάρχει το όριο στο $x=1$.

```
Limit[f, x → 1, Direction → 1] == Limit[f, x → 1, Direction → -1]
```

```
True
```



Άσκηση 5

Άσκηση. Ορίστε την πολλαπλή συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ x^2 + 1 & x \geq -1 \end{cases}$$

Είναι η παραπάνω συνάρτηση συνεχής ; (Ασκ. Α.5, σελ.175, Μαθ. Γ' Λυκ, Θετ. Τεχ. Κατ.)



Παράγωγος συνάρτησης (1)

Παράγωγος συνάρτησης

$$f[x_] := x^n + 3$$

$$f'[x]$$

$$n x^{-1+n}$$

$$D[f[x], x]$$

$$n x^{-1+n}$$

ή από την θεωρία

$$\text{Limit}[(f[x] - f[x_0]) / (x - x_0), x \rightarrow x_0] //. x_0 \rightarrow x$$

$$n x^{-1+n}$$



Παράγωγος συνάρτησης (2)

f''[x]

$$(-1 + n) n x^{-2+n}$$

D[f[x], {x, 2}]

$$(-1 + n) n x^{-2+n}$$

Derivative[3][f][x]

$$(-2 + n) (-1 + n) n x^{-3+n}$$

D[f[x], {x, 3}]

$$(-2 + n) (-1 + n) n x^{-3+n}$$



Παράγωγος συνάρτησης (3)

Derivative[-1][f][x]

$$3 x + \frac{x^{1+n}}{1+n}$$

Άσκηση. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$\alpha) x^a, \beta) \frac{1}{x^n}, \gamma) \text{Cos}[x], \delta) \text{Log}[x], \varepsilon) e^x, \sigma\tau) \sqrt[n]{x}$$



Κανόνες Παραγωγίσης αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, σύνθεσης συναρτήσεων

Clear[f, g]

$D[f[x] + g[x], x]$

$f'[x] + g'[x]$

$D[f[x] * g[x], x]$

$g[x] f'[x] + f[x] g'[x]$

$D[f[x] / g[x], x]$

$\frac{f'[x]}{g[x]} - \frac{f[x] g'[x]}{g[x]^2}$

$D[f[g[x]], x]$

$f'[g[x]] g'[x]$



Κανόνες Παραγώγισης (1)

Θεώρημα μέσης τιμής. Συνεχής στο $[0,2]$, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και συνεπώς υπάρχει ξ $f'[\xi]=(f(2)-f(0))/(2-0)$.

$$f[x_] := x^3 - 3 * x^2 + 3 x + 1$$

$$\text{Solve}[f'[a] == (f[2] - f[0]) / (2 - 0), a]$$

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \frac{1}{3} (3 - \sqrt{3}) \right\}, \left\{ a \rightarrow \frac{1}{3} (3 + \sqrt{3}) \right\} \right\}$$

$$y[x_] := f[0] + (f[2] - f[0]) / (2 - 0) * (x - 0)$$

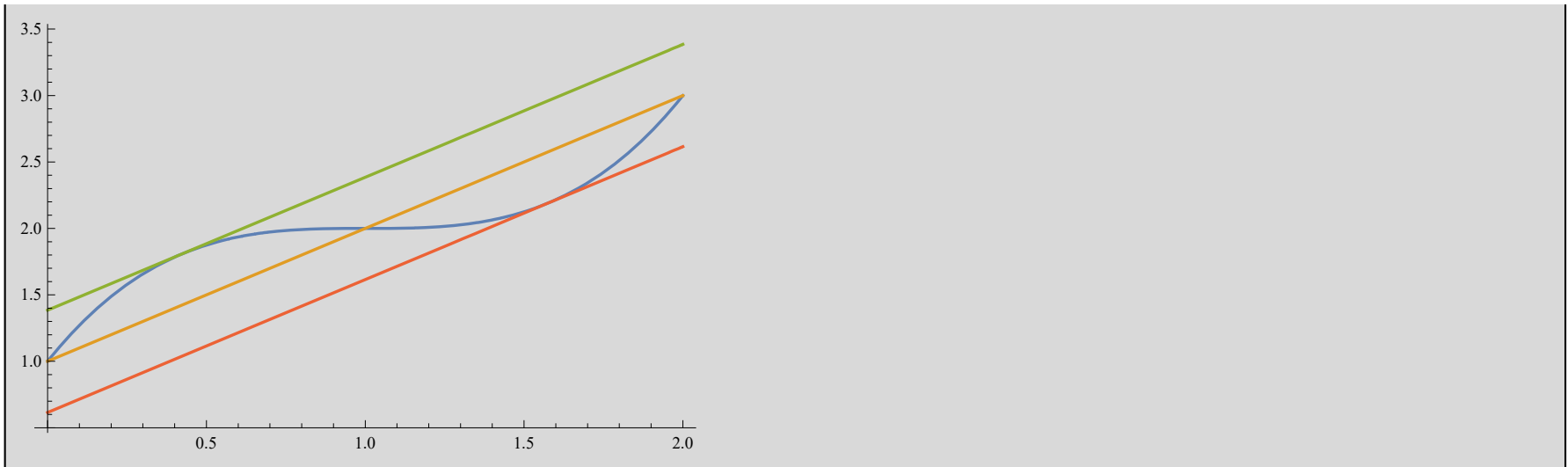
$$y1[x_] := f\left[\frac{1}{3} (3 - \sqrt{3})\right] + f'\left[\frac{1}{3} (3 - \sqrt{3})\right] * \left(x - \frac{1}{3} (3 - \sqrt{3})\right)$$

$$y2[x_] := f\left[\frac{1}{3} (3 + \sqrt{3})\right] + f'\left[\frac{1}{3} (3 + \sqrt{3})\right] * \left(x - \frac{1}{3} (3 + \sqrt{3})\right)$$



Κανόνες Παραγωγίσης (2)

```
Plot[{f[x], y[x], y1[x], y2[x]}, {x, 0, 2}]
```



Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

```
f[x_] := x^3 - 3*x^2 + 3*x + 1
```

```
f'[x] // Simplify
```

```
3 (-1 + x)^2
```

```
Solve[f'[x] == 0, x]
```

```
{ {x -> 1}, {x -> 1} }
```

```
f[1]
```

```
2
```

```
<< Algebra'InequalitySolve'
```



Μονοτονία συνάρτησης

Αύξουσα για τα x εκείνα που ικανοποιούν την σχέση

```
Reduce[f'[x] > 0, x]
```

```
x < 1 || x > 1
```

Φθίνουσα για τα x εκείνα που ικανοποιούν την σχέση

```
Reduce[f'[x] < 0, x]
```

```
False
```

Συνεπώς δεν υπάρχει τοπικό ελάχιστο.

```
FindMinimum[f[x], {x, 0.1}]
```

```
{-3.313358101672315 × 10312, {x → -1.49081 × 10104}}
```



Σημεία καμπής και ασύμπτωτες συνάρτησης (1)

Σημείο καμπής

```
f''[x]
```

```
- 6 + 6 x
```

```
Solve[f''[x] == 0, x]
```

```
{ {x -> 1} }
```

```
f[1]
```

```
2
```

Κοίλη (κοίλα κάτω)

```
Reduce[f''[x] < 0, x]
```

```
x < 1
```



Σημεία καμψής και ασύμπτωτες συνάρτησης (2)

Κυρτή (κοίλα άνω)

$$\text{Reduce}[f''[x] > 0, x]$$

$$x > 1$$

Ασύμπτωτες (οριζόντια ασύμπτωτη $y=a$, $\text{Limit}[f[x],x \rightarrow \text{Infinity}]=a$ - κατακόρυφη ασύμπτωτη $x=x_0$, $\text{Limit}[f[x],x \rightarrow x_0]=\infty$)

$$\text{Limit}[f[x], x \rightarrow \text{Infinity}]$$

$$\infty$$

Ασύμπτωτες (ασύμπτωτη $y=lx+b$, $l=\text{Limit}[f[x],x \rightarrow \infty]$, $b=\text{Limit}[f[x]-lx,x \rightarrow \infty]$)

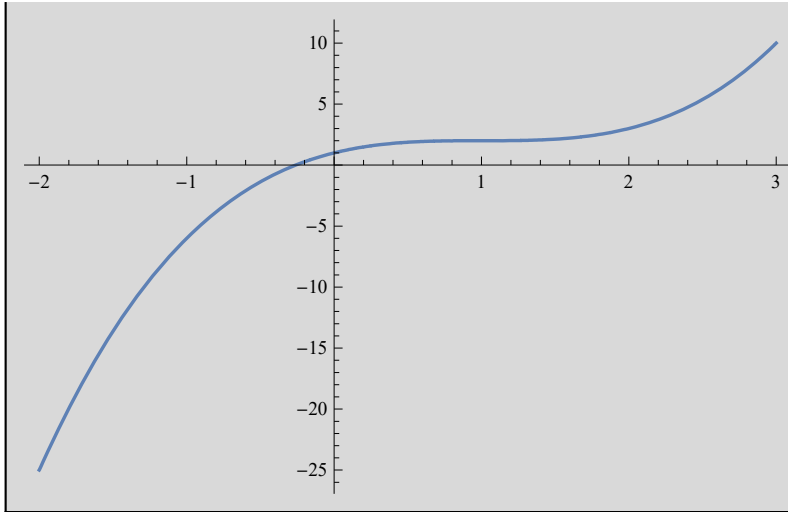
$$\text{Limit}[f[x]/x, x \rightarrow \text{Infinity}]$$

$$\infty$$



Σημεία καμπής και ασύμπτωτες συνάρτησης (3)

```
Plot[f[x], {x, -2, 3}]
```



Αόριστο ολοκλήρωμα

Αόριστο ολοκλήρωμα

```
f[x_] := x^2 + 3
```

```
Integrate[f[x], x]
```

$$3x + \frac{x^3}{3}$$



Ορισμένο ολοκλήρωμα (1)

Ορισμένο ολοκλήρωμα

```
Integrate[f[x], {x, 1, 3}]
```

$$\frac{44}{3}$$

```
Sum[f[1 + i/n] * (1/n), {i, 0, 2 * n}]
```

$$\frac{(1 + 2 n) (1 + 22 n)}{3 n^2}$$

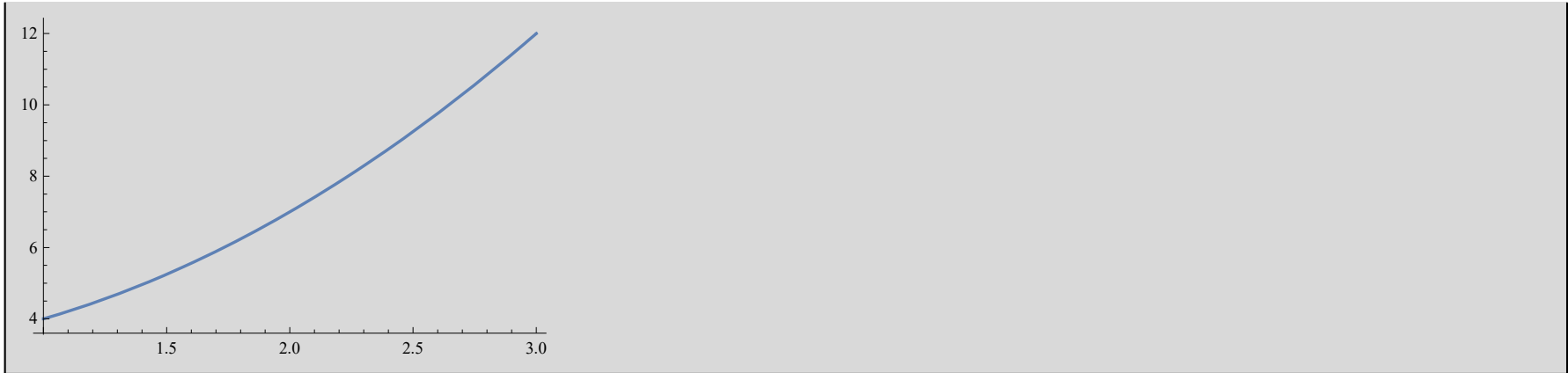
```
Limit[%, n → ∞]
```

$$\frac{44}{3}$$



Ορισμένο ολοκλήρωμα (2)

```
Plot[f[x], {x, 1, 3}]
```



Για την παράσταση του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε [ESC] int [ESC] και για το d στο dx [ESC] dd [ESC] (για παράγωγο [ESC] rd [ESC] και για τον δείκτη x Ctrl+___)

$$\int x^n dx$$

$$\frac{x^{1+n}}{1+n}$$



Ορισμένο ολοκλήρωμα (3)

$$\partial_x(x^2 + 3)$$

$$2x$$



Αθροίσματα-Γινόμενα (1)

Sum[n², {n, 1, k}]

$$\frac{1}{6} k (1 + k) (1 + 2 k)$$

Sum[n³, {n, 1, k}]

$$\frac{1}{4} k^2 (1 + k)^2$$

Sum[1/n², {n, 1, Infinity}]

$$\frac{\pi^2}{6}$$



Αθροίσματα-Γινόμενα (2)

Sum[$1/n^3$, {n, 1, Infinity}]

Zeta[3]

N[%]

1.20206

Product[i, {i, 1, k}]

k !



Επίλυση διαφορικών εξισώσεων

```
Clear[x, y, z]
```

```
DSolve[y'[x] == 2 x, y[x], x]
```

```
{ { y[x] -> x^2 + C[1] } }
```

```
DSolve[y'[x] + y[x] == 0, y[x], x]
```

```
{ { y[x] -> e^-x C[1] } }
```

```
DSolve[y'[x] == 2 y[x], y[x], x]
```

```
{ { y[x] -> e^2 x C[1] } }
```



Επίλυση συστήματος διαφορικών εξισώσεων

Σύστημα διαφορικών εξισώσεων

```
DSolve[{y'[x] + z'[x] == 1, y'[x] - 2 z'[x] == 2}, {y[x], z[x]}, x]
```

```
{ { y[x] -> 4 x / 3 + C[1], z[x] -> -x / 3 + C[2] }
```

Άσκηση. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις a) $2y - xy' = 0$, b) $x + yy' = 0$, c)

$$y' + \frac{1}{\cos[x]^2} y = \frac{1}{\cos[x]^2}$$



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης.
«Συμβολικές Γλώσσες Προγραμματισμού. Ενότητα 4: Συμβολικοί υπολογισμοί». Έκδοση:
1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

```
http://eclass.auth.gr/courses/OCRS430/
```



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

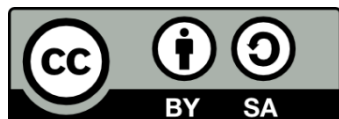
μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ