ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 2: Επίλυση Διακριτών Γραμμικών Συστημάτων

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Επίλυση ομογενούς διακριτού συστήματος.
- Υπολογισμός του πίνακα A^k.
- Επίλυση μη ομογενούς διακριτού συστήματος.
- Απόκριση σταθερής και μεταβατικής κατάστασης.
- Ελεύθερη απόκριση.
- Δυναμική απόκριση.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη του τρόπου επίλυσης ομογενούς διακριτού συστήματος στο χώρο των καταστάσεων.
- Μελέτη του τρόπου επίλυσης μη-ομογενούς διακριτού συστήματος στο χώρο των καταστάσεων.

Επίλυση ομογενούς συστήματος

Έστω το ομογενές σύστημα

$$x(k+1) = Ax(k)$$

Παράδειγμα.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = Ax(k-1) = A\big(Ax(k-2)\big) =$$

$$= A^2 x(k-2) = A^2\big(Ax(k-3)\big) =$$

$$= A^3 x(k-3) = \cdots =$$

$$= A^k x(0)$$

Επίλυση ομογενούς συστήματος με αρχικές συνθήκες στο k=k0

Επειδή

$$x(k) = A^k x(0)$$

θα έχουμε (αν ο Α αντιστρέφεται)

$$x(k_0) = A^{k_0} x(0) \Rightarrow x(0) = A^{-k_0} x(k_0)$$

Άρα

$$x(k) = A^k \underbrace{A^{-k_0} x(k_0)} = A^{k-k_0} x(k_0)$$

ή και χωρίς αντιστροφή του Α και εφόσον $k > k_0$

$$x(k) = A^{k-k_0} x(k-(k-k_0)) = A^{k-k_0} x(k_0)$$

Υπολογισμός A^k (1)

Υπάρχει πίνακας U (πίνακας δεξιών ιδιοδιανυσμάτων) τέτοιος ώστε:

$$A\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{J}$$

$$\Rightarrow A = UJU^{-1}$$

και συνεπώς

$$A^k = (UJU^{-1})^k = (UJU^{-1})(UJU^{-1})\dots(UJU^{-1}) =$$
$$= UJ^kU^{-1}$$

Υπολογισμός A^k (2)

όπου:

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \text{όταν J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

και

$$\mathrm{J}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \binom{k}{1}\lambda_1^k & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda_1^k \\ 0 & \lambda_1^k & \dots & \binom{k}{n-2}\lambda_1^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1^k \end{bmatrix} \text{όταν J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (1)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Υπάρχει πίνακας U (πίνακας δεξιών ιδιοδιανυσμάτων) τέτοιος ώστε:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{U^{-1}} \Rightarrow$$

Παράδειγμα 1 (2)

$$A^k = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} (-3)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}}_{J^k} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{U^{-1}}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left((-3)^k + (-1)^k\right) & \frac{1}{2}\left(-(-3)^k + (-1)^k\right) \\ \frac{1}{2}\left(-(-3)^k + (-1)^k\right) & \frac{1}{2}\left((-3)^k + (-1)^k\right) \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (3)

Συνεπώς το ομογενές σύστημα

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

έχει ως λύση την παρακάτω

$$x(k) = A^k x(0)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left((-3)^k + (-1)^k\right) & \frac{1}{2}\left(-(-3)^k + (-1)^k\right) \\ \frac{1}{2}\left(-(-3)^k + (-1)^k\right) & \frac{1}{2}\left((-3)^k + (-1)^k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(-3)^k \\ (-3)^k \end{bmatrix}$$

Επίλυση μη ομογενούς συστήματος (1)

Έστω το μη ομογενές σύστημα

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Θα έχουμε

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1) \\ &= A\big(Ax(k-2) + Bu(k-2)\big) + Bu(k-1) = \\ &= A^2x(k-2) + ABu(k-2) + Bu(k-1) \\ &= \cdots = \\ &= A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) \end{aligned}$$

Επίλυση μη ομογενούς συστήματος (2)

Έστω το μη ομογενές σύστημα

$$x(kT+T) = Ax(kT) + Bu(kT)$$

Θα έχουμε

$$\begin{aligned} x(kT) &= Ax(kT-T) + Bu(kT-T) \\ &= A\big(Ax(kT-2T) + Bu(kT-2T)\big) + Bu(kT-T) = \\ &= A^2x(kT-2T) + ABu(kT-2T) + Bu(kT-T) \\ &= \cdots = \\ &= A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(iT) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 (1)

Συνεπώς το μη ομογενές σύστημα

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k),$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, u(k) = 1, k \in \mathbb{N}$$

$$x(k) = x_{free}(k) + x_{dynamic}(k)$$

Ελεύθερη απόκριση (λύση του συστήματος με μηδενική είσοδο)

$$x_{free}(k) = A^k x(0)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left((-3)^k + (-1)^k\right) & \frac{1}{2}\left(-(-3)^k + (-1)^k\right) \\ \frac{1}{2}\left(-(-3)^k + (-1)^k\right) & \frac{1}{2}\left((-3)^k + (-1)^k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-3)^k \\ (-3)^k \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2 (2)

Δυναμική απόκριση (λύση του συστήματος με μηδενικές αρχικές συνθήκες)

$$x_{dynamic}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{8}\left(3 - (-3)^k - 2(-1)^k\right) \\ \frac{1}{8}\left(1 + (-3)^k - 2(-1)^k\right) \end{bmatrix}$$

Απόκριση σταθερής και μεταβατικής κατάστασης (1)

$$x(k) = x_{con}(k) + x_{tr}(k)$$

Η απόκριση στην μόνιμη κατάσταση ισορροπίας

(Το μέρος της ολικής απόκρισης που δεν μηδενίζεται όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο)

$$x_{con}(k) = \begin{bmatrix} -(-3)^k + \frac{1}{8}\left(3 - (-3)^k - 2(-1)^k\right) \\ (-3)^k + \frac{1}{8}\left(1 + (-3)^k - 2(-1)^k\right) \end{bmatrix}$$

Απόκριση σταθερής και μεταβατικής κατάστασης (2)

$$x(k) = x_{con}(k) + x_{tr}(k)$$

Απόκριση μεταβατικής κατάστασης

(Το μέρος της ολικής απόκρισης που τείνει στο μηδέν όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο)

$$x_{tr}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (άλλος τρόπος – αναγωγή σε εξίσωση διαφορών μεγαλυτέρου βαθμού) (1)

Συνεπώς το ομογενές σύστημα

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) - 2x_2(k) \Rightarrow$$

$$x_2(k+2) = x_1(k+1) - 2x_2(k+1) \Rightarrow$$

$$x_2(k+2) = \big(-2x_1(k) + x_2(k)\big) - 2x_2(k+1) \Rightarrow$$

$$x_2(k+2) + 2x_2(k+1) - x_2(k) = -2x_1(k) \Rightarrow$$

$$x_2(k+2) + 2x_2(k+1) - x_2(k) = -2(x_2(k+1) + 2x_2(k))$$

Παράδειγμα (άλλος τρόπος – αναγωγή σε εξίσωση διαφορών μεγαλυτέρου βαθμού) (2)

$$\Rightarrow x_2(k+2)+4x_2(k+1)+3x_2(k)=0$$

$$x_2(k+2)+4x_2(k+1)+3x_2(k)=0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$s^2+4s+3=0 \Rightarrow s=-1 \vee s=-3.$$

Παράδειγμα (άλλος τρόπος – αναγωγή σε εξίσωση διαφορών μεγαλυτέρου βαθμού) (3)

Ελεύθερη απόκριση

$$x_2^{free}(k) = c_1(-1)^k + c_2(-3)^k$$

$$x_1(k) = x_2(k+1) + 2x_2(k) =$$

$$= c_1(-1)^{k+1} + c_2(-3)^{k+1} + 2\left(c_1(-1)^k + c_2(-3)^k\right) \Rightarrow$$

$$x_1^{free}(k) = c_1(-1)^k - c_2(-3)^k$$

Αρχικές συνθήκες $\begin{cases} x_1^{free}(0) = c_1 - c_2 = -1 \\ x_2^{free}(0) = c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1^{free}(k) &= -(-3)^k \\ x_2^{free}(k) &= (-3)^k \end{aligned}}$$

Παράδειγμα (άλλος τρόπος – αναγωγή σε εξίσωση διαφορών μεγαλυτέρου βαθμού) (4)

Δυναμική απόκριση

$$w_2(k+2)+4w_2(k+1)+3w_2(k)=u(k)$$

$$w_2(0)=0, w_2(1)=1$$

$$w_2(k)=c_1(-1)^k+c_2(-3)^k$$

$$\begin{cases} w_2(0)=c_1+c_2=0 \\ w_2(1)=-c_1-3c_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{1}{2} \\ c_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$w_2(k)=\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{1}{2}(-3)^k$$

Παράδειγμα (άλλος τρόπος – αναγωγή σε εξίσωση διαφορών μεγαλυτέρου βαθμού) (5)

Δυναμική απόκριση

$$x_2^{dynamic}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{\left(\frac{1}{2}(-1)^{k-j} - \frac{1}{2}(-3)^{k-j}\right)}_{w_2(k-j)} u(j+i)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + (-3)^k - 2(-1)^k\right)$$

Παράδειγμα (άλλος τρόπος – αναγωγή σε εξίσωση διαφορών μεγαλυτέρου βαθμού) (6)

$$x_1(k) = x_2(k+1) + 2x_2(k) \Rightarrow$$

$$x_1(k) = (-3)^{k+1} + \frac{1}{8}\left(1 + (-3)^{k+1} - 2(-1)^{k+1}\right)$$
$$+ 2\left[(-3)^k + \frac{1}{8}\left(1 + (-3)^k - 2(-1)^k\right)\right]$$

$$x_1(k) = -(-3)^k + \frac{1}{8}\left(3 - (-3)^k - 2(-1)^k\right)$$

Λύση με Mathematica

```
RSolve[{x1[k + 1] == -2 x1[k] + x2[k] + 1,
    x2[k + 1] == x1[k] - 2 x2[k],
    x1[0] == -1,
    x2[0] == 1}, {x1[k], x2[k]}, k] // FullSimplify
```

$$\left\{\left\{x_1[k] \to \frac{1}{8}\left(3 - 2\,(-1)^k + (-1)^{1+k}\,3^{2+k}\right),\right.\right.$$
$$\left.\left. x_2[k] \to \frac{1}{8}\left(1 - 2\,(-1)^k + (-1)^k\,3^{2+k}\right)\right\}\right\}$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, *Εκδόσεις Τζιόλα*.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 2: Επίλυση Διακριτών Συστημάτων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης