ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 6: Συνάρτηση Μεταφοράς

Νίκος Καραμπετάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς.
- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ή πολυώνυμο πόλων του συστήματος.
- Ελάχιστο πολυώνυμο.
- Θεώρημα (Cayley–Hamilton).

Σκοποί Ενότητας

- Υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς.

Πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς (transfer function matrix) (1)

Έστω γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πολυμεταβλητό σύστημα S με μαθηματικό πρότυπο της μορφής του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

$$x(t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n}$$

Έστω

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}, Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace, έχουμε

Πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς (transfer function matrix) (2)

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow$$

$$(sI_n - A)X(s) = x(0) + BU(s) \Rightarrow$$

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1}x(0) + (sI_n - A)^{-1}BU(s)$$

και

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \Rightarrow$$

$$Y(s) = C(sI_n - A)^{-1}x(0) + C(sI_n - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

Αν $x(0) = 0$

$$Y(s) = [C(sI_n - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς (transfer function matrix) (3)

Ορισμός. Ο πίνακας

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$$

ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς** (**transfer function matrix**) του συστήματος.

Ο πίνακας $G(s)$ γράφεται

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D = \frac{C adj(sI_n - A)B}{\det(sI_n - A)} + D$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ή πολυώνυμο πόλων του συστήματος

Ορισμός. Το πολυώνυμο

$$\psi(s) = \det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \in \mathbb{R}[s]$$

ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** ή **πολυώνυμο πόλων του συστήματος.**

Ορισμός. Τάξη του συστήματος ονομάζεται ο **βαθμός** n του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\psi(s)$.

Πρόταση 1 (1)

Πρόταση. Το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και η **τάξη** αποτελούν **αναλλοίωτες ομοιότητας των περιγραφών** της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

Απόδειξη.

Έστω ένα σύστημα S που περιγράφεται από το πρότυπο της μορφής του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Πρόταση 1 (2)

και έστω ότι ορίζουμε νέο άνυσμα κατάστασης $\bar{x}(t)$ μέσω του μετασχηματισμού

$$\bar{x}(t) = Rx(t) \Rightarrow x(t) = R^{-1}\bar{x}(t)$$

όπου $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ομαλός έτσι ώστε η νέα περιγραφή του S με άνυσμα κατάστασης $\bar{x}(t)$ να είναι η

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t)$$
$$y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t)$$

όπου

$$\bar{A}: = RAR^{-1}, \bar{B}: = RB, \bar{C} \coloneqq CR^{-1}, \bar{D} \coloneqq D$$

Τότε οι πίνακες $\bar{A}$ και A ως όμοιοι έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, διότι

Πρόταση 1 (3)

$$\det(sI_n - A) = \det(sI_n - R^{-1}\bar{A}R) =$$

$$\det(sR^{-1}R - R^{-1}\bar{A}R)$$

$$= \det[R^{-1}(sI_n - \bar{A})R] =$$

$$\det(R^{-1}) \det(sI_n - \bar{A})\, detR$$

$$= \frac{1}{detR} \det(sI_n - \bar{A})\, detR$$

$$= \det(sI_n - \bar{A})$$

Θεώρημα (Cayley – Hamilton)

Θεώρημα. Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

Δηλαδή αν

$$\psi(s) = \det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

τότε

$$\psi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

Θεώρημα 2

Θεώρημα Αν οι περιγραφές $(A, B, C, D), (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ είναι όμοιες, τότε έχουν τις ίδιες συναρτήσεις μεταφοράς.

Δηλαδή αν

$$\bar{A} := RAR^{-1}, \qquad \bar{B} := RB, \qquad \bar{C} \coloneqq CR^{-1}, \qquad \bar{D} \coloneqq D$$

τότε

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D = \bar{C}(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

Αλλιώς, η συνάρτηση μεταφοράς μιας περιγραφής του χώρου των καταστάσεων αποτελεί αναλλοίωτη κάθε κλάσης ισοδυναμίας ομοιότητας.

Απόδειξη: Άσκηση.

Ελάχιστο πολυώνυμο (minimal polynomial) (1)

Το θεώρημα Cayley – Hamilton λέει ότι αν

$$\psi(s) = \det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε

$$\psi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

Μπορεί να υπάρχει πολυώνυμο

$$p(s), degp(s) < n: p(A) = 0$$

Ορισμός. Το πολυώνυμο $m(s)$ ελάχιστου βαθμού που είναι τέτοιο ώστε $m(A) = 0$ ονομάζεται **ελάχιστο πολυώνυμο** (**minimal polynomial**).

Πρόταση 2 (1)

Πρόταση. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m(s)$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\psi(s)$, δηλαδή υπάρχει $q(s) \in \mathbb{R}[s]$ τέτοιο ώστε

$$\psi(s) = q(s)m(s)$$

Θεωρήστε τον αντίστροφο του χαρακτηριστικού πίνακα $sI_n - A$.

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\psi(s)} adj(sI_n - A) \Rightarrow$$

$$adj(sI_n - A) = \psi(s)(sI_n - A)^{-1} \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$$

Μπορεί να δειχτεί ότι το πολυώνυμο $q(s)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των στοιχείων $a_{ij} \in \mathbb{R}[s]$ του $adj(sI_n - A)$.

Πρόταση 2 (2)

Άρα

$$adj(sI_n - A) = q(s)\Gamma(s)$$

όπου $\Gamma(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ έχει στοιχεία πρώτα μεταξύ τους (χωρίς κοινούς πολυωνυμικούς όρους) και άρα ο $(sI_n - A)^{-1}$ γράφεται

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\psi(s)} adj(sI_n - A) = \frac{1}{\psi(s)} q(s)\Gamma(s) = \frac{1}{m(s)}\Gamma(s)$$

όπου $m(s)$ το ελάχιστο πολυώνυμο

$$\Rightarrow G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B = \frac{1}{m(s)} C\Gamma(s)B$$

Πρόταση 2 (3)

Αν και τα στοιχεία του $\Gamma(s)$ δεν έχουν κοινούς πολυωνυμικούς όρους με το ελάχιστο πολυώνυμο $m(s)$, τα στοιχεία του $C\Gamma(s)B$ μπορεί να έχουν κοινούς πολυωνυμικούς όρους και κατά τη δημιουργία του πίνακα συναρτήσεων μεταφοράς $G(s)$ να υπάρχουν απλοποιήσεις στα διάφορα στοιχεία του.

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ο χαρακτηριστικός πίνακας του A είναι ο

$$sI_2 - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το πολυώνυμο

$$\psi(s) = \det(sI_2 - A) = det\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$
$$= (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

Παράδειγμα 1 (2)

και σύμφωνα με το θεώρημα Cayley – Hamilton:

$$\psi(A) = A^2 + 2A + I_2$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το

$$m(s) = s + 1$$

και πάλι ισχύει ότι

$$m(A) = A + I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του χαρακτηριστικού πίνακα είναι

Παράδειγμα 1 (3)

$$(sI_2 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\psi(s)} adj(sI_2 - A)$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\psi(s)} q(s) \Gamma(s)$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2} (s+1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{m(s)} \Gamma(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι το πολυώνυμο

$$\psi(s) = \det(sI_2 - B) = det\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$
$$= (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

και σύμφωνα με το θεώρημα Cayley – Hamilton:

$$\psi(B) = B^2 + 2B + I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2 (2)

Στην περίπτωση αυτή το ελάχιστο πολυώνυμο του B ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο

$$m(s) = \psi(s)$$

Παράδειγμα 3 (1)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$sI_2 - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\psi(s) = \det(sI_2 - A) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

$$(sI_2 - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα 3 (2)

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$C(sI_2 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{-1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3 (3)

Ο πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς είναι

$$G(s) = C(sI_2 - A)^{-1}B + D$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{-1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)} \\ \dfrac{1}{(s+2)} & 0 \end{bmatrix}$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα*.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 6. Συνάρτηση Μεταφοράς». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης