ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 7. Ισοδύναμες Περιγραφές Συστημάτων

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Περιγραφή του συστήματος S της μορφής του χώρου των καταστάσεων.
- Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του συστήματος S.
- Σχέσεις ισοδυναμίας.
- $\mathcal{R}$- κλάση ισοδυναμίας.
- Αναλλοίωτη της $\mathcal{R}$.
- Πλήρης Αναλλοίωτη της $\mathcal{R}$.
- Κανονική μορφή.
- Σύνολο $\mathcal{R}$ - κανονικών μορφών.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη της περιγραφής ενός συστήματος S της μορφής του χώρου των καταστάσεων.
- Μελέτη των ισοδύναμων περιγραφών ενός συστήματος S της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

Περιγραφή του S της μορφής του χώρου των καταστάσεων

Έστω γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πολυμεταβλητό σύστημα S με μαθηματικό πρότυπο της μορφής του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$
$$x(t) \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$$

Ορισμός. Η τετράδα πινάκων

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

ονομάζεται **περιγραφή του S της μορφής του χώρου των καταστάσεων.**

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (1)

Αν $e_1, e_2, \dots, e_n$ είναι η ορθοκανονική βάση του χώρου των καταστάσεων $\mathcal{X}$ με

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\eta$$

τότε

$$x(t) = e_1 x_1(t) + e_2 x_2(t) + \cdots e_n x_n(t) = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (2)

και το άνυσμα στήλης $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$

ονομάζεται **περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του $\boldsymbol{S}$** ως προς την βάση $e_1, e_2, \dots, e_n$ του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$.

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (3)

Έστω $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ μία άλλη βάση του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$.

Τότε

$$x(t) = \bar{e}_1 \bar{x}_1(t) + \bar{e}_2 \bar{x}_2(t) + \cdots \bar{e}_n \bar{x}_n(t)$$
$$= [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n] \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

και το άνυσμα στήλης $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (4)

ονομάζεται **περιγραφή** του ανύσματος κατάστασης ως προς την βάση $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$.

Έστω

$$e_i = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \dots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = \bar{E} p_i, i = 1,2, \dots, n$$

η περιγραφή του ανύσματος e_i ως προς την βάση $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Για $i = 1,2, \dots, n$

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (5)

$$\begin{aligned}[e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n] &= [\bar{E}p_1 \quad \bar{E}p_2 \quad \dots \quad \bar{E}p_n] \\ &= \bar{E}[p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n] \\ &= [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} = \bar{E}P\end{aligned}$$

όπου $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει στήλη i την περιγραφή του e_i ως προς την βάση $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

$$[e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n] = E = [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n]P = \bar{E}P$$

Άρα

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (6)

$$x(t) = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n]x(t)$$
$$= [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n]Px(t)$$
$$= [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n]\bar{x}(t)$$

Άρα οι δύο περιγραφές συνδέονται μέσω της

$$\bar{x}(t) = Px(t)$$

Ομοίως

$$x(t) = Q\bar{x}(t)$$

όπου $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει στήλη i την περιγραφή του $\bar{e}_i$ ως προς την βάση $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$$\bar{E} = EQ$$

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (7)

$$\bar{x}(t) = Px(t) = PQ\bar{x}(t) \Rightarrow PQ = I_n \Rightarrow P = Q^{-1}$$

P, Q ομαλοί πίνακες (non-singular)

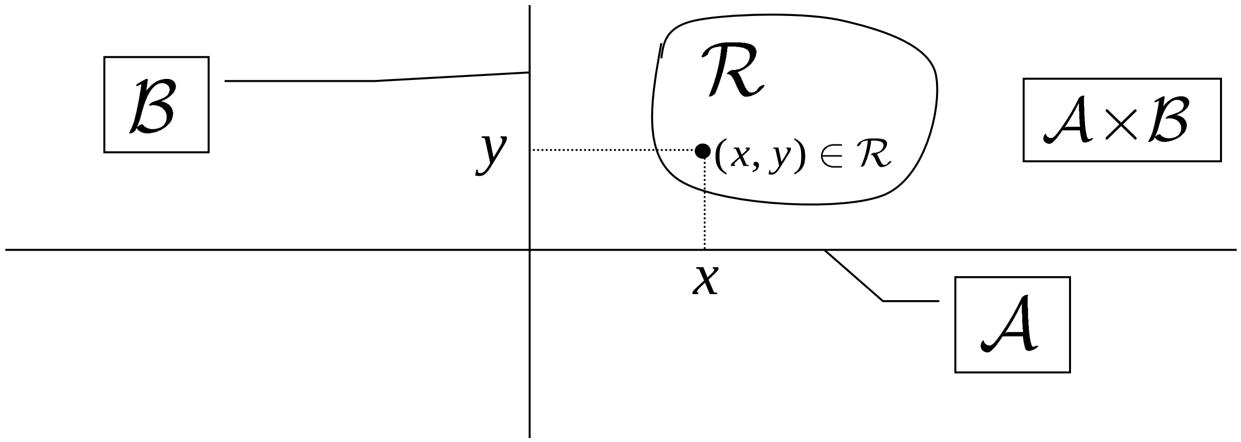
Άρα αν $x(t)$ είναι η περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S ως προς κάποια βάση του χώρου των καταστάσεων $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$ και αν $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $|R| \neq 0 \Leftrightarrow R$ ομαλός, τότε η εξίσωση

$$Rx(t) =: \bar{x}(t)$$

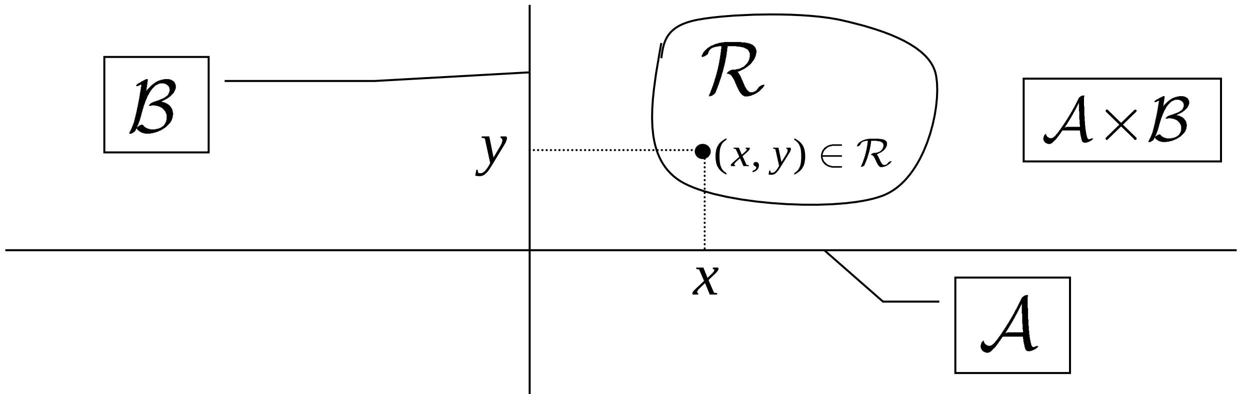
ορίζει μία νέα περιγραφή $\bar{x}(t)$ του ανύσματος κατάστασης $x(t)$ ως προς μία άλλη βάση του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$.

Σχέσεις ισοδυναμίας (Equivalence relations) (1)

Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο αυθαίρετα σύνολα. Ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του καρτεσιανού γινομένου $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ονομάζεται **σχέση** από το $\mathcal{A}$ στο $\mathcal{B}$.



Σχέσεις ισοδυναμίας (Equivalence relations) (2)



Αν $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, τότε το $\mathcal{R}$ ονομάζεται **σχέση** πάνω στο $\mathcal{A}$.
Αν $x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}$ και $(x, y) \in \mathcal{R}$, τότε λέμε ότι $\mathcal{R}$ είναι η σχέση μεταξύ $x \in \mathcal{A}$ και $y \in \mathcal{B}$ ή το x σχετίζεται με το y μέσω του $\mathcal{R}$ ή $x \in \mathcal{A}$ είναι **ισοδύναμο** με το $y \in \mathcal{B}$ μέσω της $\mathcal{R}$.
Το **πεδίο ορισμού** του $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο

$$\{x \in \mathcal{A}: (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

Σχέσεις ισοδυναμίας (Equivalence relations) (3)

Το **πεδίο τιμών** του $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο

$$\{y \in \mathcal{B}: (x, y) \in \mathcal{R}\} =: \mathcal{R}x$$

Ορισμός Μία σχέση $\mathcal{R}$ επάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{A}$ δηλαδή ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ονομάζεται **σχέση ισοδυναμίας** πάνω στο $\mathcal{A}$ αν ισχύουν οι ιδιότητες:

i. **ανακλαστική** $(x, x) \in \mathcal{R}, \forall x \in \mathcal{A}$

(διάβαζε: κάθε $x \in \mathcal{A}$ είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του)(ανακλαστική ιδιότητα)

ii. **συμμετρική** $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$

(διάβαζε: το x είναι ισοδύναμο με το y συνεπάγεται ότι το y είναι ισοδύναμο με το x)(συμμετρική ιδιότητα)

Σχέσεις ισοδυναμίας (Equivalence relations) (4)

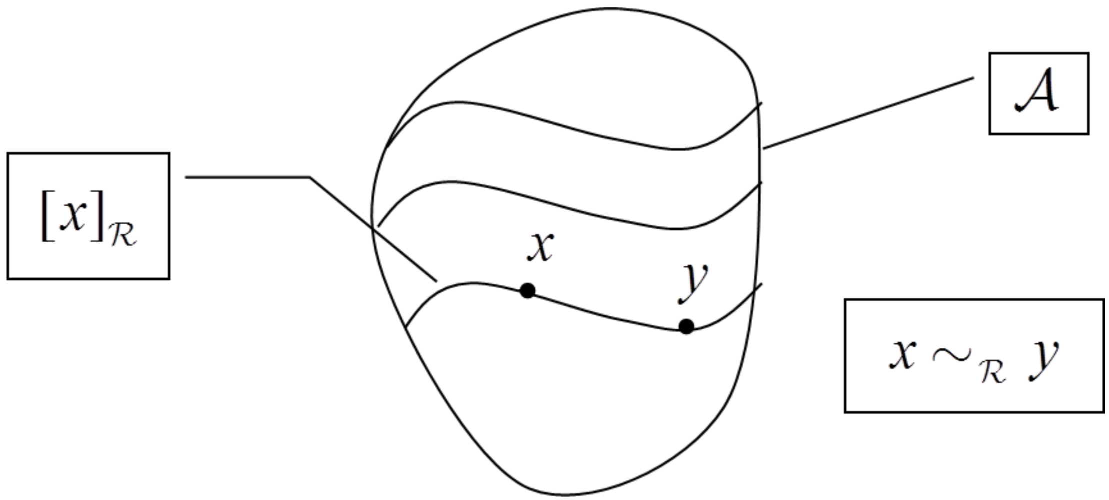
iii. **μεταβατική** $(x, y) \in \mathcal{R}\ \kappa\alpha\iota\ (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$

(διάβαζε: το x είναι ισοδύναμο με το y και το y είναι ισοδύναμο με το z συνεπάγεται ότι το x είναι ισοδύναμο με το z)(μεταβατική ιδιότητα)

Πολλές φορές αντί $(x, y) \in \mathcal{R}$ γράφουμε $x \sim_{\mathcal{R}} y$.

Αν $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας πάνω στο $\mathcal{A}$, τότε η $\mathcal{R}$ διαμελίζει το $\mathcal{A}$ σε ξεχωριστές κλάσεις ή $\mathcal{R}$-κλάσεις ισοδυναμίας.

$\mathcal{R}$- κλάση ισοδυναμίας (1)



$\mathcal{R}$- κλάση ισοδυναμίας (2)

Για κάθε $x \in \mathcal{A}$, η $\mathcal{R}$ - **κλάση ισοδυναμίας** του x είναι το σύνολο

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathcal{A}: (x, y) \in \mathcal{R}\} = \{x \in \mathcal{A}: x \sim_{\mathcal{R}} y\} \subset \mathcal{A}$$

Δηλαδή αν $x \in \mathcal{A}$, τότε η $\mathcal{R}$ - κλάση ισοδυναμίας του x αποτελείται από όλα τα στοιχεία $y \in \mathcal{A}$ με τα οποία το x είναι ισοδύναμο μέσω της $\mathcal{R}$.

Για κάθε σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ πάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{A}$ είναι:

$$[x]_{\mathcal{R}} \equiv [y]_{\mathcal{R}} \ \text{αν και μόνο αν}\ x \sim_{\mathcal{R}} y$$

και

$$[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset \ \text{αν και μόνο αν}\ x \nsim_{\mathcal{R}} y$$

Πηλίκο του $\mathcal{A}$ δια $\mathcal{R}$

Ορισμός. Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας $[x]_{\mathcal{R}}$ όταν το x διατρέχει όλες τις τιμές στο $\mathcal{A}$ ονομάζεται **πηλίκο του $\mathcal{A}$ δια $\mathcal{R}$** και συμβολίζεται με $A/\mathcal{R}$.

Αναλλοίωτη της $\mathcal{R}$

Ορισμός. Αν $\mathcal{T}$ κάποιο σύνολο, τότε μία απεικόνιση $f: \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ ονομάζεται **αναλλοίωτη** της $\mathcal{R}$ αν

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

Δηλαδή η απεικόνιση $f: \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ είναι αναλλοίωτη της $\mathcal{R}$ αν όλα τα y στην κλάση ισοδυναμίας $[x]_{\mathcal{R}}$ έχουν την ίδια εικόνα κάτω από την f.

Οι εικόνες $f(x) = f(y)$ ονομάζονται **αναλλοίωτες** της $\mathcal{R}$.

Πλήρης αναλλοίωτη της $\mathcal{R}$

Ορισμός. Αν $\mathcal{T}$ κάποιο σύνολο,τότε μία απεικόνιση $f: \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ ονομάζεται **πλήρης αναλλοίωτη** της $\mathcal{R}$ αν

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Οι εικόνες $f(x) = f(y)$ ονομάζονται **πλήρεις αναλλοίωτες** της $\mathcal{R}$.

Θεωρήστε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{p\times n} \times \mathbb{R}^{p\times m}$$

Κάθε σημείο $x \in \mathcal{A}$ είναι μία τετράδα πινάκων

$$x = (A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m})$$

την οποία ταυτίζουμε με μία περιγραφή S ενός πολ/τού συστήματος της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

Θεώρημα

Θεώρημα. Η ομοιότητα περιγραφών μορφής του χώρου των καταστάσεων αποτελεί σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο

$$\mathcal{A} = \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{p\times n} \times \mathbb{R}^{p\times m}$$

των περιγραφών συστημάτων

$$S = (A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}) \subset \mathcal{A}$$

Απόδειξη. Άσκηση.

- Αποδείξτε τις τρεις ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας.
- Ορίστε τις κλάσεις ισοδυναμίας.
- Αποδείξτε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αποτελούν αναλλοίωτες κάθε κλάσης ισοδυναμίας.

Κανονική απεικόνιση – Κανονική μορφή

Ορισμός. Μία απεικόνιση $g\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ονομάζεται **κανονική απεικόνιση** για μία σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ πάνω στο σύνολο $\mathcal{A}$ όταν

$$(i)\ \ x \sim_{\mathcal{R}} g(x), \forall x \in \mathcal{A}$$

$$(ii)\ \ x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow\ g(x) = g(y)$$

Ορισμός. Αν $\mathcal{R}$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας πάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{A}$ και $g\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ είναι μία κανονική απεικόνιση, τότε την εικόνα $g(x) \in \mathcal{A}$ ενός στοιχείου $x \in \mathcal{A}$ ονομάζουμε **κανονική μορφή** του $x \in \mathcal{A}$.

Σύνολο $\mathcal{R}$ - κανονικών μορφών

Ορισμός. Το σύνολο των εικόνων $g(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$, το οποίο συμβολίζουμε με Img, ονομάζεται **σύνολο κανονικών μορφών** της $\mathcal{R}$ πάνω στο σύνολο $\mathcal{A}$ ή **σύνολο $\mathcal{R}$ - κανονικών μορφών**.

Άσκηση. Αποδείξτε ότι η μορφή Jordan $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αποτελεί **κανονική μορφή της ομοιότητας** περιγραφών συστημάτων της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

(Για τον ορισμό της μορφής Jordan $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ενός πίνακα βλέπε Κεφάλαιο 8, Παράρτημα.)

https://eclass.auth.gr/modules/auth/opencourses.php?fc=18

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012, *Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα.
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 7: Ισοδύναμες Περιγραφές Συστημάτων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης