ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 9. Πραγματοποιήσεις Συνάρτησης Μεταφοράς

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα Ενότητας

- Πραγματοποιήσεις συναρτήσεων μεταφοράς.
- Πραγμάτωση με χρήση της υπέρθεσης (superposition).
- Controller canonical form.
- Controllability canonical form.
- Observer canonical form.
- Observability canonical form.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη των τρόπων πραγματοποίησης της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ ενός συστήματος Σ.

Πραγματοποιήσεις συναρτήσεων μεταφοράς

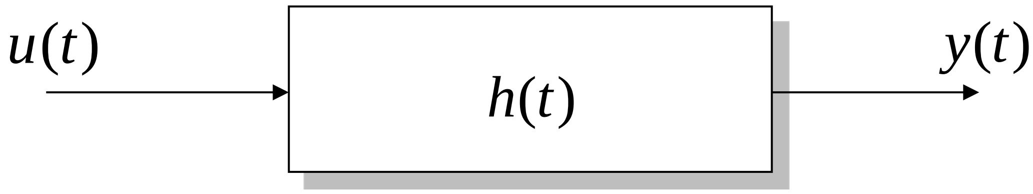
Θεωρήστε ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα Σ του οποίου η σχέση εισόδου $u(t)$ και εξόδου $y(t)$ διέπεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές δεύτερης τάξης $(n = 2)$:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0u(t)$$

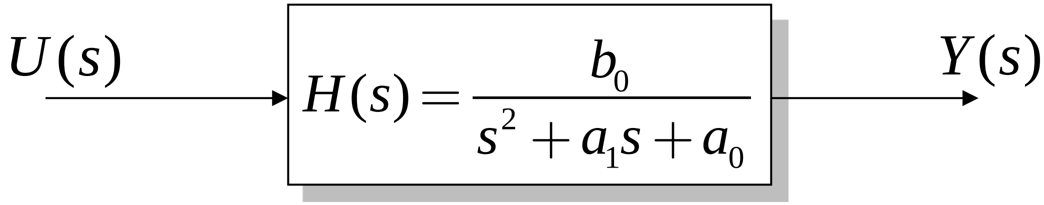
ή

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \qquad \textbf{(1)}$$

Λειτουργικό διάγραμμα



Λειτουργικό διάγραμμα συστήματος στο πεδίο του χρόνου t.



Λειτουργικό διάγραμμα στο πεδίο της γενικευμένης συχνότητας s όπου

Συνάρτηση μεταφοράς

- $h(t)$ η **κρουστική απόκριση** του συστήματος, δηλαδή η έξοδος όταν η είσοδος $u(t)$ είναι η κρουστική συνάρτηση Dirac $\delta(t)$

$$u(t) = \delta(t)$$

και

- $H(s)$ η **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος, δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace της $h(t)$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

Ορίζουμε δύο νέες μεταβλητές $x_1(t), x_2(t)$ τις οποίες ονομάζουμε **καταστάσεις** του συστήματος ως εξής

Καταστάσεις

$$x_1(t) = y(t) \quad \textbf{(2)}$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t) \quad \textbf{(3)}$$

Παραγωγίζοντας την (2), από την (3), έχουμε

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \quad \textbf{(4)}$$

Παραγωγίζοντας την (3), από την (1), έχουμε

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -a_1\dot{y}(t) - a_0 y(t) + b_0 u(t)$$
$$= -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \qquad \textbf{(5)}$$

Οι εξισώσεις (4) και (5) είναι ισοδύναμες με την εξίσωση (1).

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι το σύστημα Σ μπορεί να περιγραφεί: από μία διαφορική εξίσωση 2ης τάξης, την (1)

Άνυσμα κατάστασης

ή από δύο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, τις (4) και (5).

Γράφοντας τις (4) και (5) υπό μορφή πινάκων έχουμε

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \qquad \textbf{(6)}$$

Το άνυσμα στήλης

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \qquad \textbf{(7)}$$

ονομάζουμε **άνυσμα κατάστασης** του συστήματος Σ.

Με βάση την (7), η (2) γράφεται

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8)}$$

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (1)

Οι εξισώσεις (6) και (8) γράφονται

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \textbf{(9)}$$

$$y(t) = Cx(t) \quad \textbf{(10)}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

Λέμε ότι οι εξισώσεις (9) και (10) αποτελούν μία **πραγματοποίηση** της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος Σ.

Αν $X(s) = L\{x(t)\}$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του ανύσματος κατάστασης, αν δηλαδή

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (2)

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = L\{x(t)\} = \begin{bmatrix} L\{x_1(t)\} \\ L\{x_2(t)\} \end{bmatrix}$$

και $U(s) = L\{u(t)\}$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της εισόδο $u(t)$, θεωρώντας το μετασχηματισμό Laplace της (9) έχουμε

ή

$$(sI_2 - A)X(s) = BU(s)$$

όπου $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης 2

ή

$$X(s) = (sI_2 - A)^{-1}BU(s) \quad \textbf{(11)}$$

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (3)

Θεωρώντας επίσης το μετασχηματισμό Laplace της (10) έχουμε

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = CX(s) \quad \textbf{(12)}$$

Από τις (11) και (12) έχουμε

$$Y(s) = C(sI_2 - A)^{-1}BU(s)$$

Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος συνδέεται με τα $Y(s), U(s)$ μέσω της

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$H(s) = C(sI_2 - A)^{-1}B$$

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (4)

Πράγματι, εκτελώντας τις πράξεις έχουμε

$$H(s) = C(sI_2 - A)^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_0 s \end{bmatrix} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Γενικεύοντας, έστω γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα Σ του οποίου η σχέση εισόδου $u(t)$ και εξόδου $y(t)$ διέπεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές $n - οστης$ τάξης

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (5)

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad \textbf{(13)}$$

Ορίζουμε n νέες μεταβλητές $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ τις οποίες ονομάζουμε **καταστάσεις** του συστήματος ως εξής:

$$x_1(t) = y(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t)$$

$$x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \Rightarrow \dot{x}_n(t) = y^{(n)}(t) = -a_{n-1}x_{n-1}(t) - \cdots - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \quad \textbf{(14)}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι το σύστημα Σ μπορεί να περιγραφεί:

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (6)

από **μία διαφορική εξίσωση $\boldsymbol{n}$ τάξης**, την (13)

ή

από **$\boldsymbol{n}$ διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης**, τις (14).

Γράφοντας τις (14) υπό μορφή πινάκων, έχουμε

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(\,t)$$

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (7)

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Το άνυσμα στήλης:

$$x(t) \coloneqq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

είναι το άνυσμα κατάστασης του συστήματος Σ.

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (8)

Οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (9)

Θεωρήστε ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα Σ του οποίου η σχέση εισόδου $u\ (t)$ και εξόδου $y\ (t)$ διέπεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές δεύτερης τάξης

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_2\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad \textbf{(15)}$$

Αν

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}, U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των $y(t)$ και $u(t)$ αντίστοιχα, τότε μετασχηματίζοντας κατά Laplace τη διαφορική εξίσωση (15) με μηδενικές αρχικές συνθήκες

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$$

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (10)

παίρνουμε

$$(s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)U(s)$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Εκτελώντας τη διαίρεση $\frac{b(s)}{a(s)}$

$$b(s) = a(s)q(s) + r(s) \qquad \textbf{(16)}$$

όπου $q(s)$ το πηλίκο και $r(s)$ το υπόλοιπο με

$$deg r(s) < deg a(s)$$

η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γράφεται

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (11)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)} = q(s) + \frac{r(s)}{a(s)}$$

Πιο αναλυτικά η (16) γράφεται

$b_2 s^2 + b_1 s + b_0 =$

$$= (s^2 + a_1 s + a_0)\underbrace{b_2}_{\boldsymbol{q(s)}} + \underbrace{(b_1 - b_2 a_1)s + (b_0 - b_2 a_0)}_{\boldsymbol{r(s)}} \quad \textbf{(17)}$$

Από την (17), η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γράφεται

Πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς (12)

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$$
$$=\frac{(b_1-b_2a_1)s+(b_0-b_2a_0)}{s^2+a_1s+a_0}+b_2$$

Μια πραγματοποίηση της $H(s)$ δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -a_0\\ 1 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_0-b_2a_0\\ b_1-b_2a_1\end{bmatrix}u(t)\quad \textbf{(18)}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+b_2u(t)\quad \textbf{(19)}$$

Άσκηση (1)

Αποδείξτε ότι οι εξισώσεις (18) και (19) αποτελούν πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Αναλυτικά οι εξισώσεις (18) είναι

$$\dot{x}_1(t) = -a_0 x_2(t) + (b_0 - b_2 a_0)u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - a_1 x_2(t) + (b_1 - b_2 a_1)u(t)$$
$$y(t) = x_2(t) + b_2 u(t)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

Άσκηση (2)

$$|sI_2 - A| = \left|\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} s & a_0 \\ -1 & s + a_1 \end{bmatrix}\right|$$
$$= s(s + a_1) + a_0 = s^2 + a_1 s + a_0$$

και οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$s_1 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2 - 4a_0)},$$
$$s_2 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2 - 4a_0)}\ .$$

Πραγμάτωση με χρήση της υπέρθεσης (superposition)

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_3 u + b_2\dot{u} + b_1\ddot{u}$$

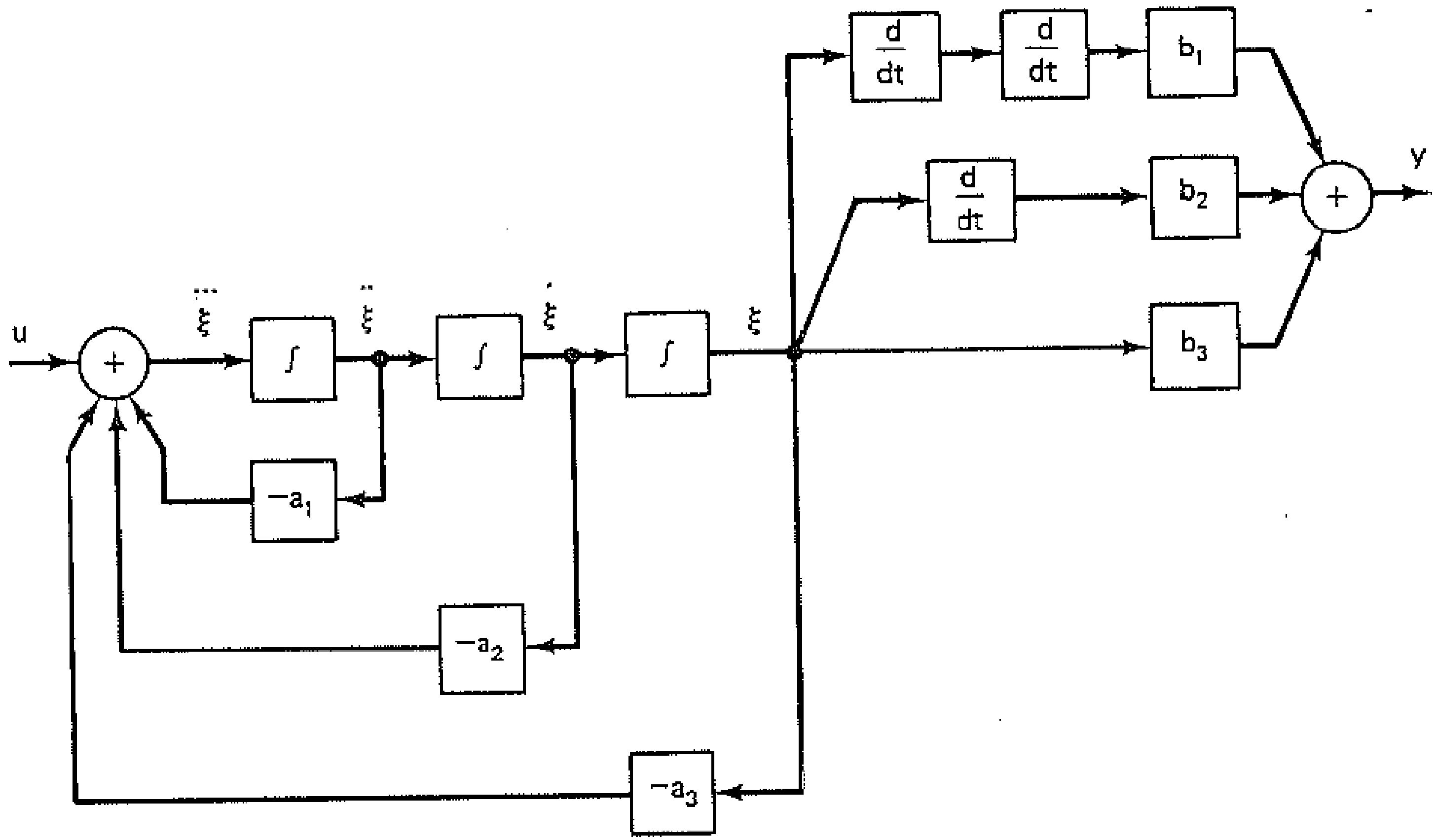
Έστω το σύστημα

$$\dddot{\xi} + a_1\ddot{\xi} + a_2\dot{\xi} + a_3\xi = u$$

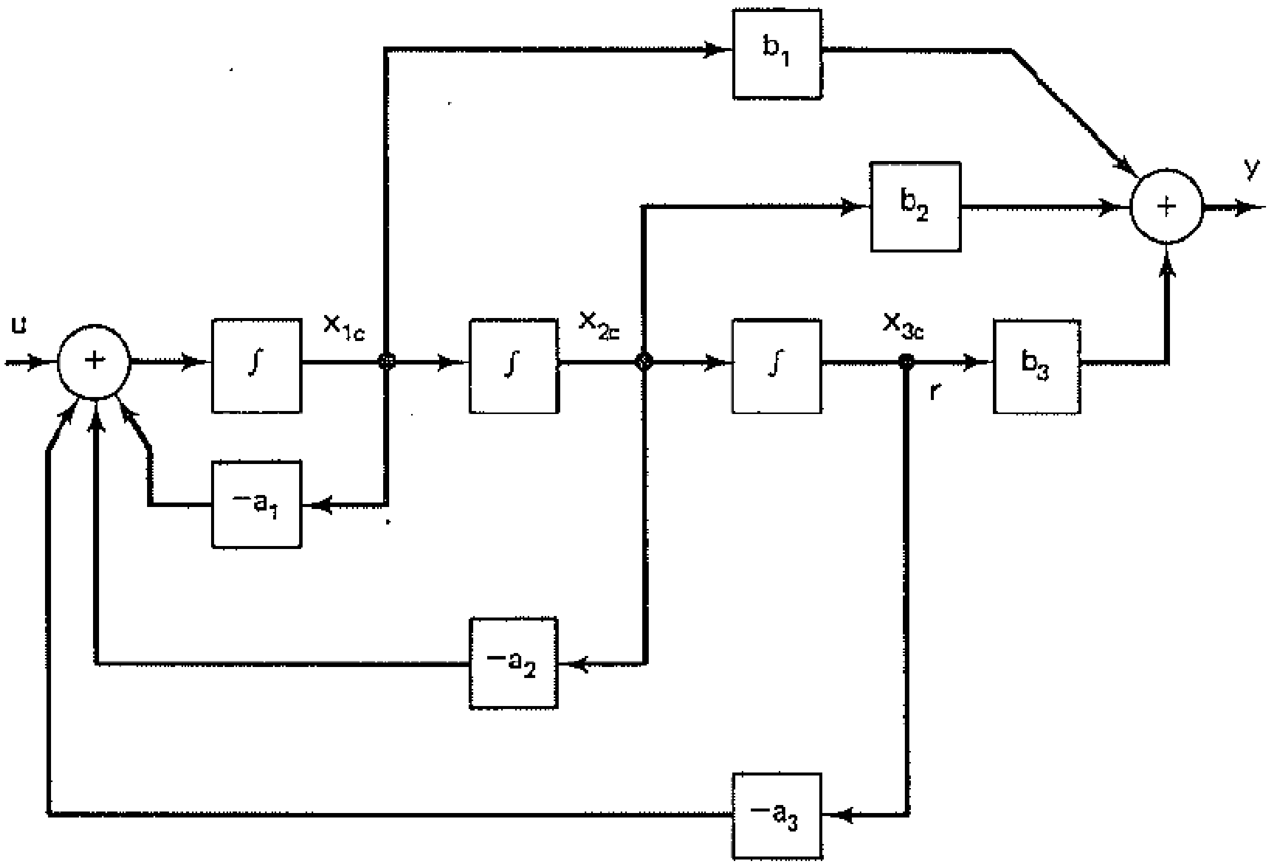
Από γραμμικότητα

$$y = b_3\xi + b_2\dot{\xi} + b_1\ddot{\xi}$$

Controller canonical form (1)



Controller canonical form (2)



Controller canonical form (3)

$$\begin{cases} \dot{x}_{1c} = -a_1 x_{1c} - a_2 x_{2c} - a_3 x_{3c} + u \\ \dot{x}_{2c} = x_{1c} \\ \dot{x}_{3c} = x_{2c} \\ y = b_1 x_{1c} + b_2 x_{2c} + b_3 x_{3c} \end{cases}$$

$$\dot{x}_c = A_c x_c + b_c u, y = c_c x_c$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Μια διαφορετικη πραγμάτωση – observability canonical form (1)

$$(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)Y(s) = (b_1 s^2 + b_2 s + b_3)U(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} U(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s)$$

$$Y(s) = b(s) a^{-1}(s) U(s) = b(s)\xi(s).$$

Πρώτα υλοποιήσαμε την

$$a(s)\xi(s) = U(s)$$

Μια διαφορετικη πραγμάτωση – observability canonical form (2)

$$(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)Y(s) = (b_1 s^2 + b_2 s + b_3)U(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} U(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s)$$

Τι γίνεται αν γράψουμε την σχέση ως

$$Y(s) = a^{-1}(s) b(s) U(s)$$

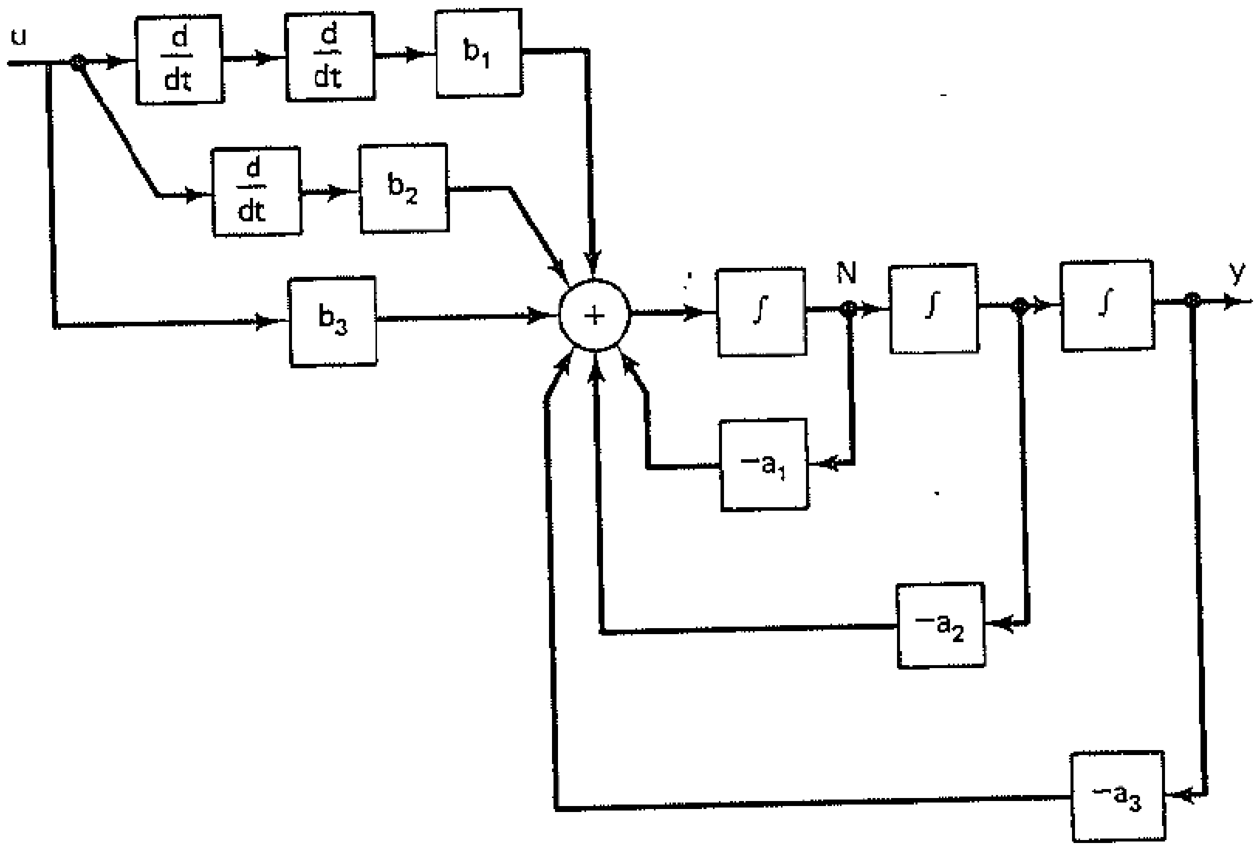
Πρώτα γράφουμε

$$m(\cdot) = b_3 u(\cdot) + b_2 \dot{u}(\cdot) + b_1 \ddot{u}(\cdot)$$

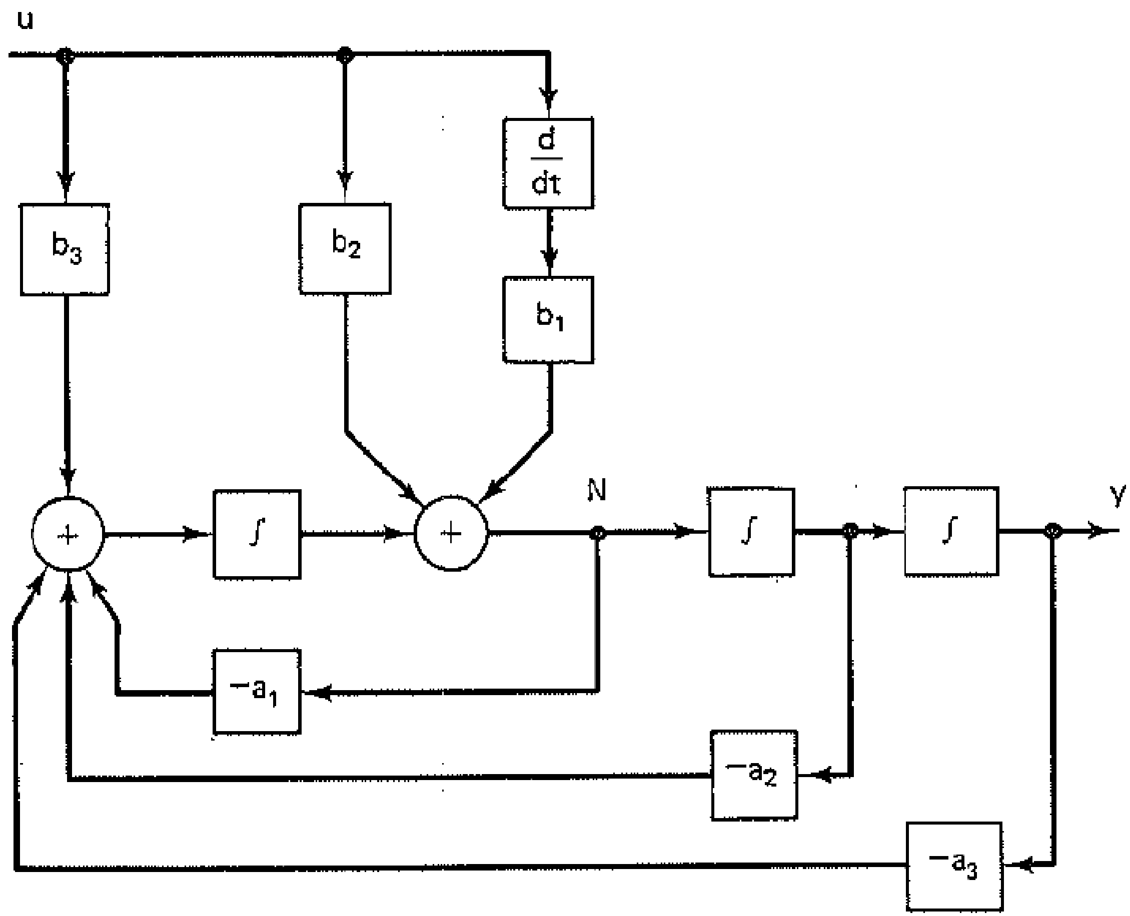
και στη συνέχεια

$$a(s)Y(s) = M(s)$$

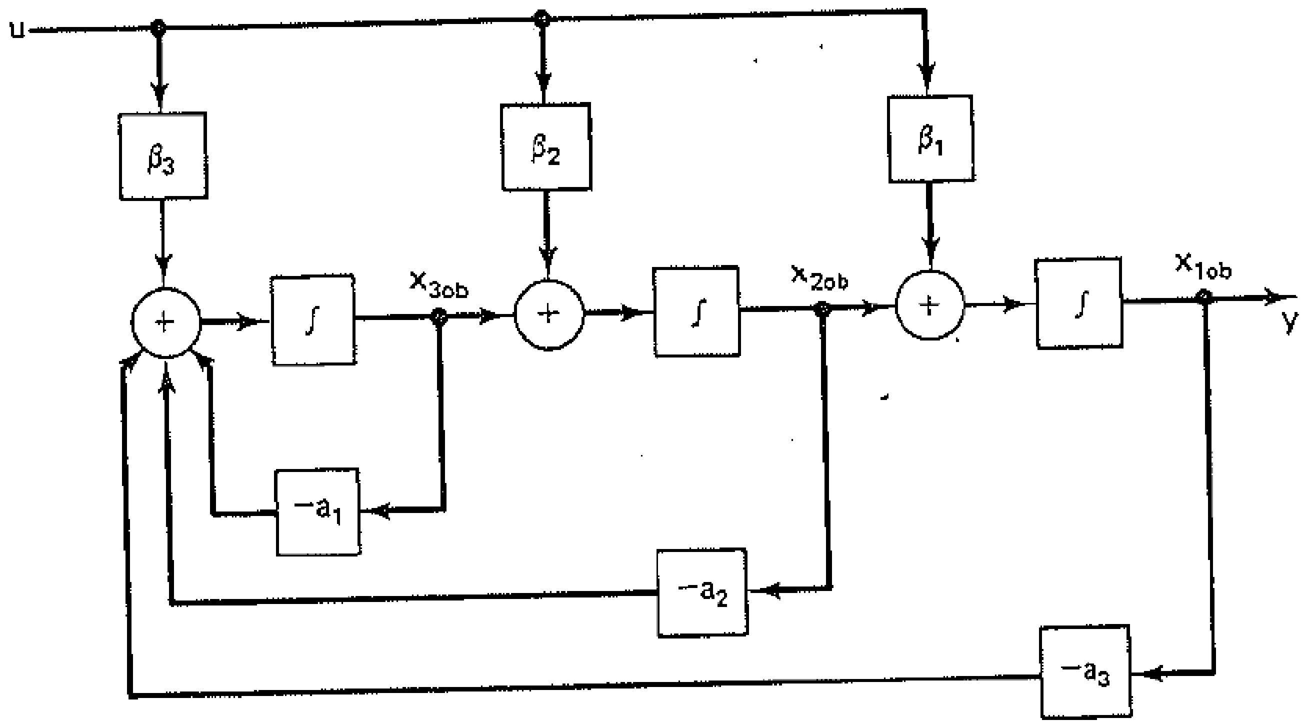
Observability canonical form (1)



Observability canonical form (2)



Observability canonical form (4)



$$\beta_1 = b_1$$
$$\beta_2 = b_2 - a_1 b_1$$
$$\beta_3 = b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_1^2 b_1$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ a_1 & 1 & 0\\ a_2 & a_1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

Observability canonical form (5)

$$\dot{x}_{ob} = A_{ob}x_{ob} + b_{ob}u, y = c_{ob}x_{ob}$$

$$A_{ob} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix},$$

$$b_{ob} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

$$c'_{ob} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Markov parameters

$$\begin{cases} \beta_1 = b_1 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 b_1 \\ \beta_3 = b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_1^2 b_1 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{b(s)}{a(s)} = H(s) = \sum_{1}^{\infty} h_i s^{-i}$$

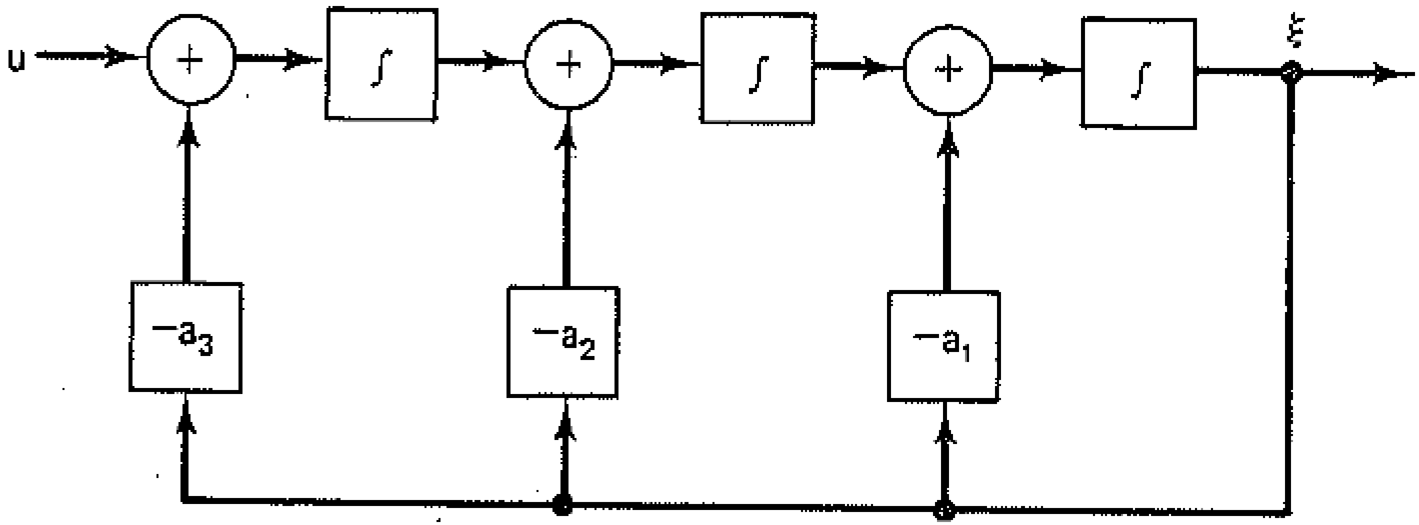
$$\beta_i = h_i, i = 1, \dots, n$$

Markov parameters

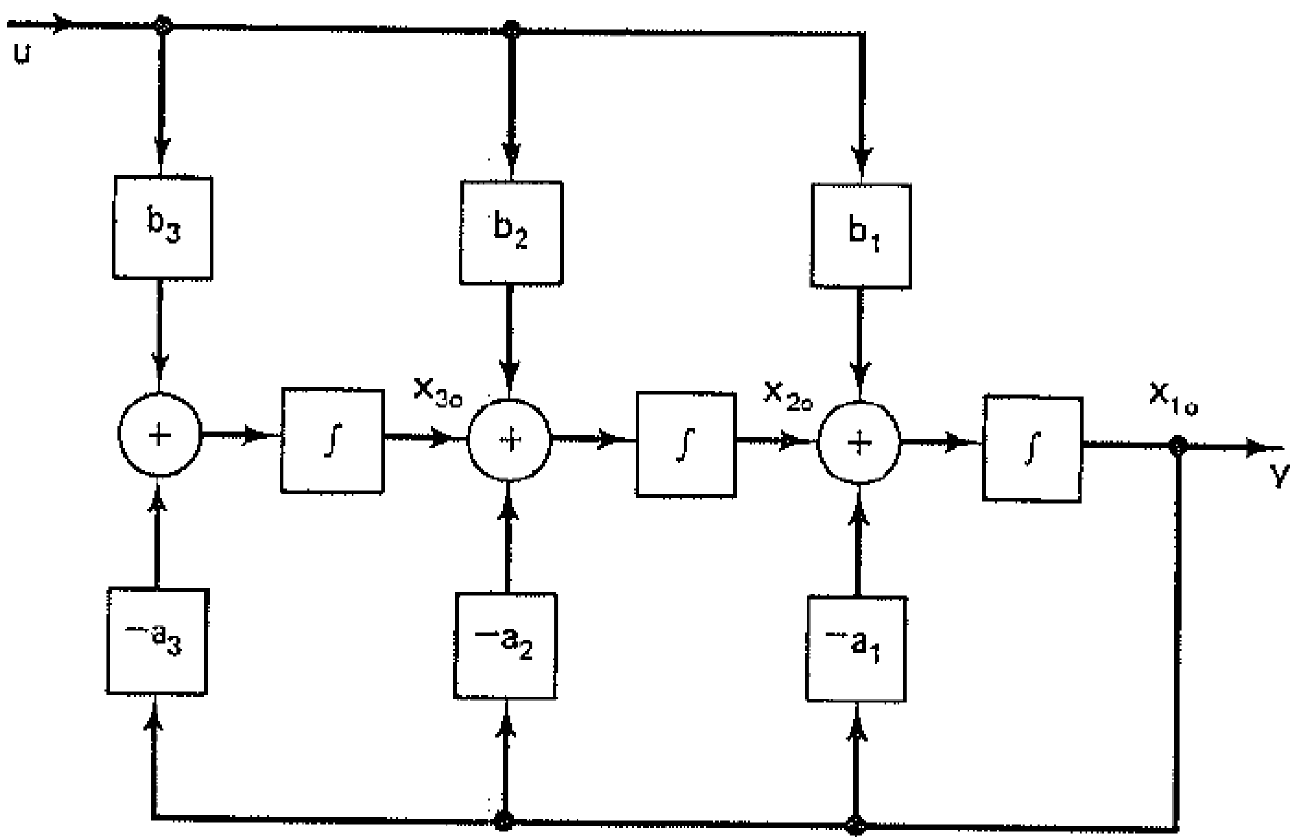
Observer canonical form (1)

$$\dddot{\xi} + a_1\ddot{\xi} + a_2\dot{\xi} + a_3\xi = u$$

$$\xi = s^{-3}u - a_1 s^{-1}\xi - a_2 s^{-2}\xi - a_3 s^{-3}\xi$$



Observer canonical form (2)



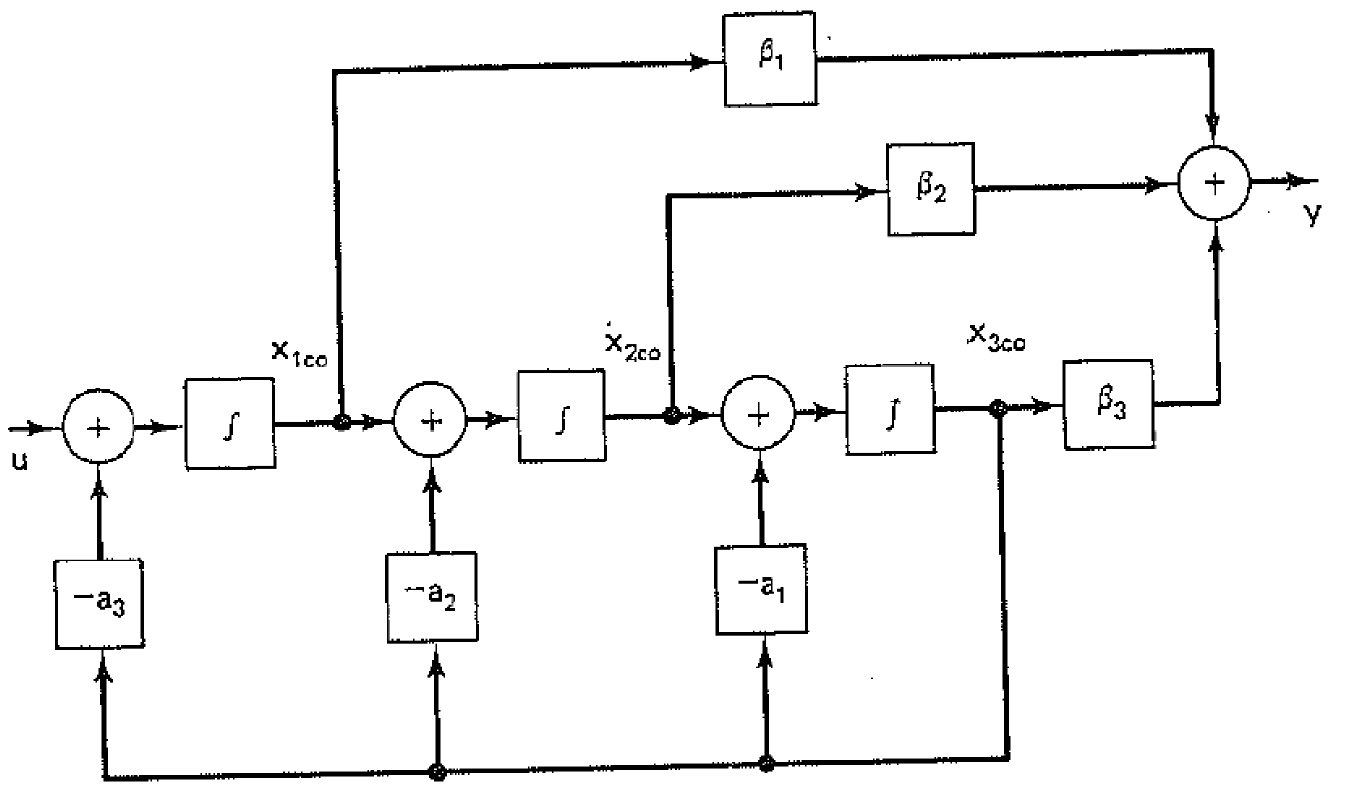
Observer canonical form (3)

$$\dot{x}_o = A_o x_o + b_o u,$$
$$y = c_o x_o$$

όπου

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$
$$c_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Controllability canonical form (1)



Controllability canonical form (2)

$$\dot{x}_{co} = A_{co}x_{co} + b_{co}u,$$

$$y = c_{co}x_{co}$$

$$A_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, b_{co} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$c_{co} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Observer canonical form-Controller canonical form

Observer canonical form

$$\dot{x}_o = A_o x_o + b_o u,$$
$$y = c_o x_o$$
$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$
$$c_o = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Controller canonical form

$$\dot{x}_c = A_c x_c + b_c u,$$
$$y = c_c x_c$$
$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$c_c = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_o = A'_c, b_o = c'_c, c_0 = b'_c}}$$

Observability canonical form - Controllability canonical form

Observability canonical form

$$\dot{x}_{ob} = A_{ob}x_{ob} + b_{ob}u, y = c_{ob}x_{ob}$$

$$A_{ob} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, b_{ob} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

$$c'_{ob} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Controllability canonical form

$$\dot{x}_{co} = A_{co}x_{co} + b_{co}u, y = c_{co}x_{co}$$

$$A_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, b_{co} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$c_{co} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{ob} = A'_{co}, b_{ob} = c'_{co}, c_{ob} = b'_{co}}}$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα*.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης