ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 11. Ελεγξιμότητα (μέρος 2ο)

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα Ενότητας

- Παραδείγματα ελεγξιμότητας.
- Ελέγξιμο ως προς την έξοδο.
- Κριτήρια Ελεγξιμότητας-Υλοποίηση.
- Πλήρως ελέγξιμο ως προς την έξοδο.
- Αποσυζευτικά μηδενικά εισόδου.
- Κοινός αριστερός διαιρέτης πινάκων.

Σκοποί Ενότητας

- Παρουσίαση παραδειγμάτων υλοποίησης των κριτηρίων ελεγξιμότητας.
- Μελέτη της έννοιας της ελεγξιμότητας ως προς την έξοδο και της έννοιας των αποσυζευκτικών μηδενικών εισόδου.
- Μελέτη του τρόπου εύρεσης κοινού αριστερού διαιρέτη πινάκων.

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

με $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ δηλαδή με $n = 2, m = 1.$

(Το σύστημα έχει μία είσοδο.)

και ο πίνακας ελεγξιμότητας

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
$$n \times (nm)$$

στην περίπτωση αυτή είναι

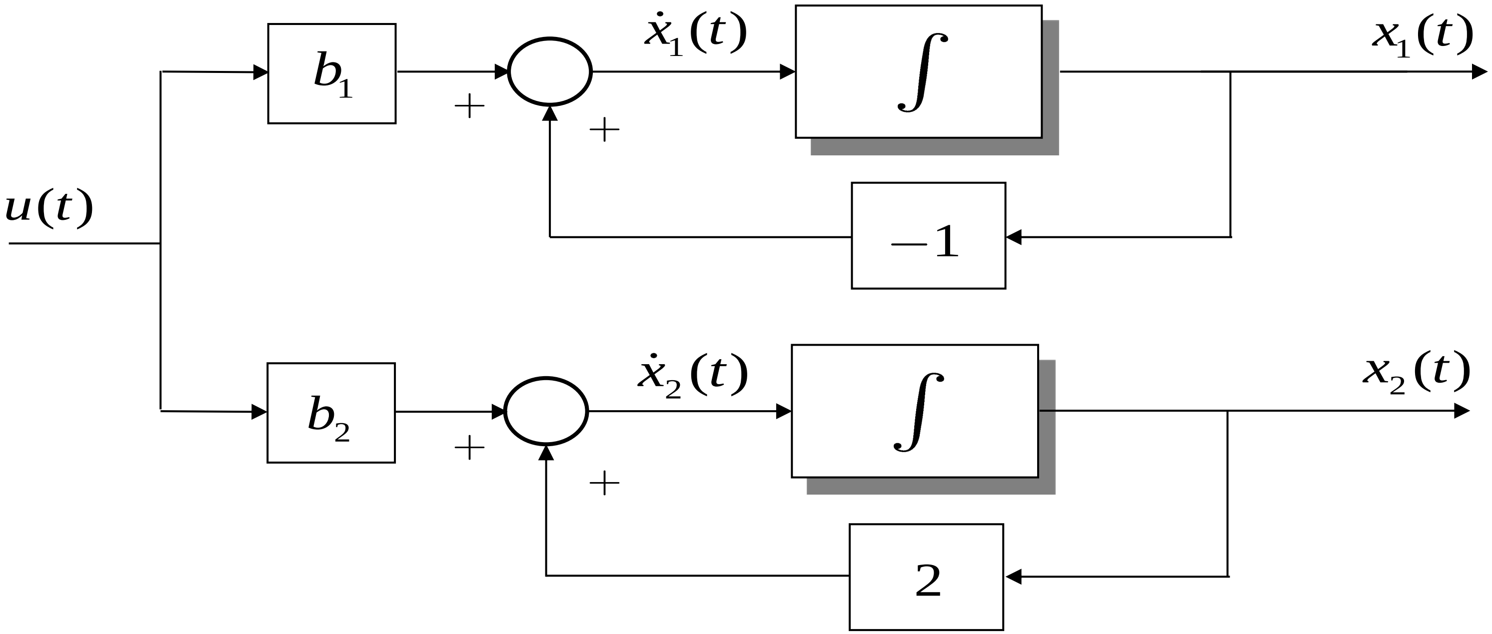
$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ b_2 & 2b_2 \end{bmatrix}$$

$$rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ b_2 & 2b_2 \end{bmatrix} = 2$$

Παράδειγμα 1 (2)

Δηλαδή το σύστημα είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$det\begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ b_2 & 2b_2 \end{bmatrix} = 3b_1b_2 \neq 0 \Leftrightarrow b_1 \neq 0 \; και \; b_2 \neq 0$$



Παράδειγμα 1 (3)

Για το παραπάνω σύστημα έστω

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μία είσοδος $u(t)$ η οποία φέρνει το άνυσμα κατάστασης από την αρχική κατάσταση $x\ (0)$ στην τελική κατάσταση $x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ την χρονική στιγμή $t_1 = 1$ δίνεται από την

$$u(t) \coloneqq -B^T e^{-A^T t} M(t_1)^{-1} x(0)$$

Έχουμε ότι

$$e^{At} = e^{A^T t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (4)

$$M(t_1) \coloneqq \int_0^{t_1} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt$$

$$= \int_0^1 \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} & 1 - e^{-1} \\ 1 - e^{-1} & \frac{1}{4} - \frac{e^{-4}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.195 & 0.632 \\ 0.632 & 0.245 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (5)

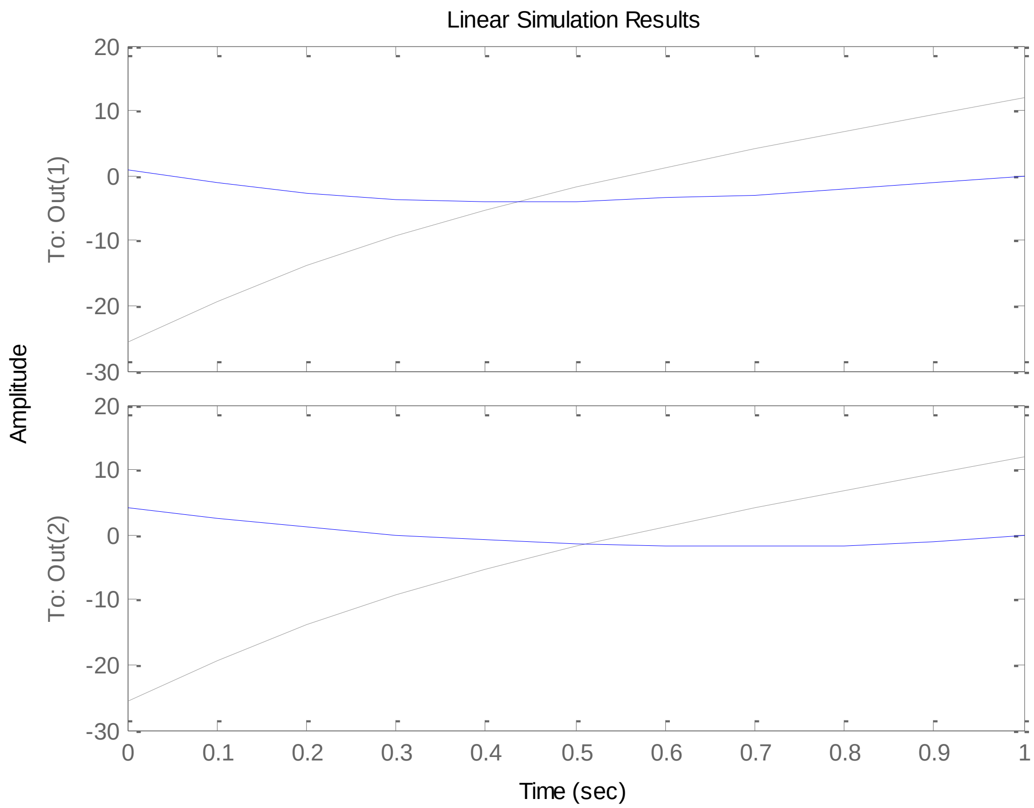
Άρα

$$u(t) \coloneqq -B^T e^{-A^T t} M(t_1)^{-1} x(0)$$
$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.195 & 0.632 \\ 0.632 & 0.245 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} e^t & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.638 & -1.644 \\ -1.644 & 8.31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$= 5.94e^t - 31.6e^{-2t}$$

Matlab

```
sys=ss([-1 0 ; 0 2],[1 ; 1],[1 0 ; 0 1],[0 ; 0]) ;
t=0:0.1:1;
u=5.94*exp(t)-31.6*exp(-2*t);
lsim(sys,u,t,[1 ; 4])
```

Παράδειγμα 1 (6)



Γραφική παράσταση της εισόδου $u(t)$ για $t \in [0, 1]$.

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A(AB) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2 (2)

Άρα

$$l = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 10 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι $rank_{\mathbb{R}} l = 2 < 3$ και συνεπώς το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

Παράδειγμα 3 (1)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A(AB) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3 (2)

Άρα

$$l = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι $rank_{\mathbb{R}} l = 3$ και συνεπώς το σύστημα είναι ελέγξιμο.

Επίσης

$$[sI_n - A \quad B] = \left[\begin{array}{ccc|c} s & -1 & 0 & 1 \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 1 & -2 & s-3 & 0 \end{array}\right]$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

Παράδειγμα 3 (3)

$$a(s) \coloneqq \det[sI_3 - A] = \det\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 1 & -2 & s-3 \end{bmatrix} = (s-3)(s-1)(s+1)$$

- $rank_{\mathbb{R}}[3I_3 - A \quad B] = rank_{\mathbb{R}}\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] = 3$
- $rank_{\mathbb{R}}[1I_3 - A \quad B] = rank_{\mathbb{R}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] = 3$
- $rank_{\mathbb{R}}[-1 * I_3 - A \quad B] = rank_{\mathbb{R}}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] = 3$

το σύστημα μου είναι ελέγξιμο.

Κριτήρια Ελεγξιμότητας Υλοποίηση (1)

```
function cc=ControllabilityMatrix(a,b)
% This function computes the controllability matrix of (A,B)
n=length(a);
k=b; cc=[k];
for i=1:n-1
  k=a*k;
  cc=[cc k];
end
```

```
a=[1 2 3 ; 2 3 1 ; 3 1 2];
b=[1 ; 2 ; 1];
ControllabilityMatrix(a,b)
```

```
a=[1 2 3 ; 2 3 1 ; 3 1 2];
b=[1 ; 2 ; 1];
ctrb(a,b)
```

Κριτήρια Ελεγξιμότητας Υλοποίηση (2)

```
function cl=Controllable(a,b)
% This function check if the system (A,B) is controllable
n=length(a);
k=b; cc=[k];
for i=1:n-1
  k=a*k;
  cc=[cc k];
end
cl=(rank(cc)==n);
```

```
a=[1 2 3 ; 2 3 1 ; 3 1 2];
b=[1 ; 2 ; 1];
Controllable(a,b)
Ans=
        1
```

```
a=[1 2 3 ; 2 3 1 ; 3 1 2];
b=[1 ; 2 ; 1];
rank(ctrb(a,b))==3
Ans= 1
```

Πλήρως ελέγξιμο ως προς την έξοδο

Ορισμός. Το σύστημα Σ λέγεται **πλήρως ελέγξιμο ως προς την έξοδο $\boldsymbol{y(t)}$ (completely output controllable)** εάν και μόνο εάν υπάρχει κάποια τμηματικά συνεχής συνάρτηση εισόδου $u(t)$ που θα οδηγήσει το $\boldsymbol{y(t)}$ από την αρχική του τιμή $\boldsymbol{y(t_0)}$ σε οποιοδήποτε χρόνο $\boldsymbol{t_0}$ στην τελική του τιμή $\boldsymbol{y(t_f)}$ (αυθαίρετη τελική κατάσταση) σε οποιοδήποτε χρόνο $\boldsymbol{t_f > t_0 \geq 0}$.

Διαφορετικά το σύστημα λέγεται μη ελέγξιμο (uncontrollable) ως προς την έξοδο $\boldsymbol{y(t)}$ παρόλο που είναι πιθανό να είναι «ελέγξιμο κατά ένα μέρος» δηλ. είναι πιθανό να μεταφέρουμε συγκεκριμένες εξόδους σε οποιαδήποτε επιθυμητή τελική έξοδο ή την έξοδο $\boldsymbol{y(t)}$ σε συγκεκριμένες περιοχές στον χώρο των εξόδων.

Θεώρημα (1)

Θεώρημα. Το σύστημα Σ είναι ελέγξιμο ως προς την έξοδο $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ εάν και μόνο εάν:

$$rank_{\mathbb{R}}[CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \dots \quad CA^{n-1}B \quad D] = p$$

Απόδειξη.

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k (t-t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{ik} A^i \right) (t-t_0)^k$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (t-t_0) A^i$$

Θεώρημα (2)

$$y(T) = C\left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (T - t_0) A^i\right) x(t_0)$$

$$+ \int_{t_0}^{T} C\left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (T - \tau) A^i\right) Bu(\tau)d\tau + Du(T) \Rightarrow$$

Εάν θέσουμε

$$\varphi_i(t_0, T) = \int_{t_0}^{T} \gamma_i (T - \tau) u(\tau) d\tau$$

τότε

Θεώρημα (3)

$$\left(y(T) - C\left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(T-t_0)A^i\right)x(t_0) \right) =$$

$$= [CB \quad CAB \quad CA^2B \ldots \quad CA^{n-1}B \quad D]\begin{bmatrix} \varphi_0(t_0,T) \\ \varphi_1(t_0,T) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t_0,T) \\ u(T) \end{bmatrix}$$

Θεώρημα (4)

$$\mathrm{Image}[CB \quad CAB \quad CA^2B \dots \quad CA^{n-1}B \quad D] = \mathbb{R}^p \Leftrightarrow$$

$$\dim\{\mathrm{Image}[CB \quad CAB \quad CA^2B \dots \quad CA^{n-1}B \quad D]\} = dim\mathbb{R}^p \Leftrightarrow$$

$$rank_{\mathbb{R}}[CB \quad CAB \quad CA^2B \dots \quad CA^{n-1}B \quad D] = p$$

Παράδειγμα 4 (1)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CAB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4 (2)

$$CA^2B = CA(AB) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$rank_{\mathbb{R}}[CB \quad CAB \quad CA^2B \quad D] =$$
$$rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

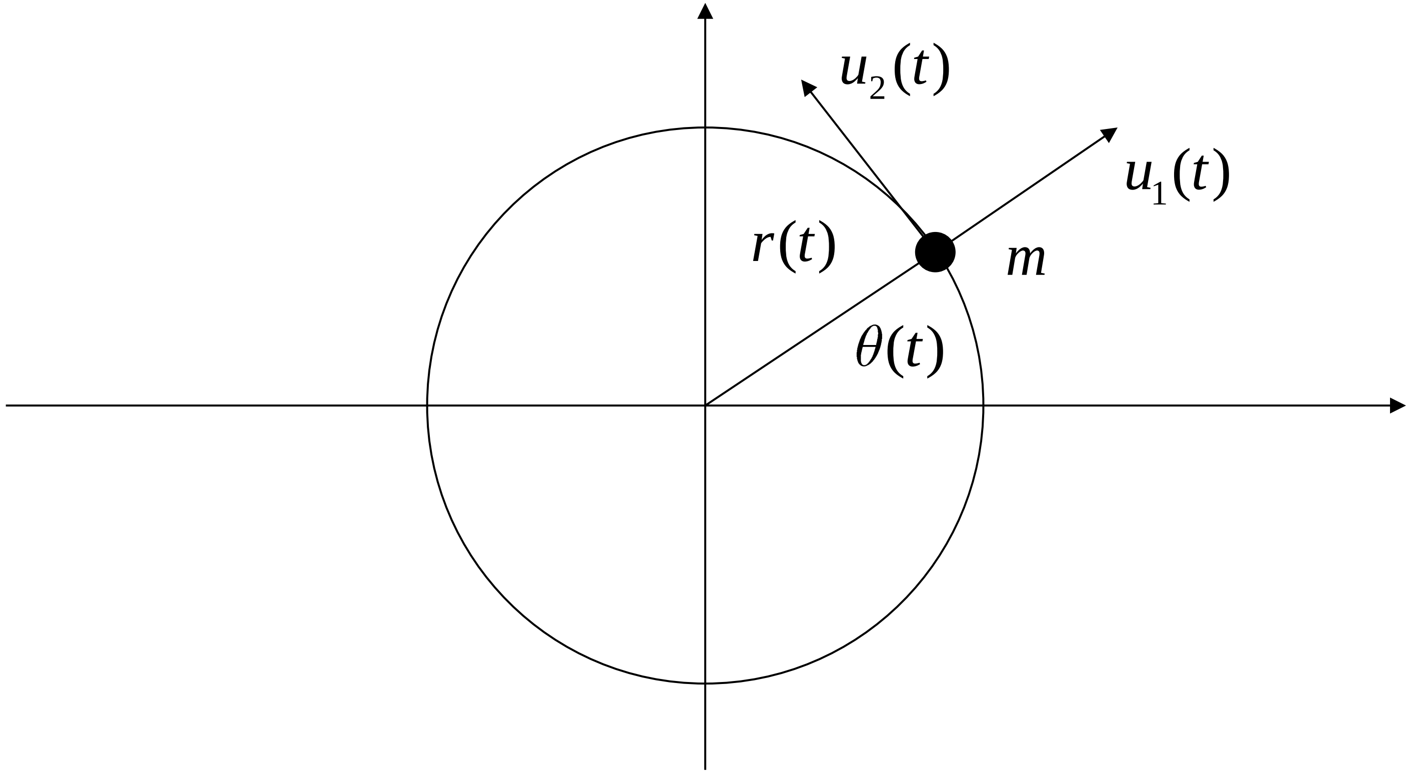
ελέγξιμο ως προς την έξοδο $y(t)$.

Έλεγχος της θέσης δορυφόρου (1)

Θεωρήστε μοναδιαία μάζα $m = 1$ (δορυφόρο) σε τροχιά ακτίνας $r\ (t)$ γύρω από κέντρο μάζας (γη) έτσι ώστε να βρίσκεται κάτω από την επίδραση δύναμης Newton που είναι ανάλογη του αντιστρόφου του τετραγώνου της απόστασης $r(t)$ από τη μάζα (γη).

Υποθέτουμε ότι ο δορυφόρος διαθέτει δύο εισόδους ελέγχου $u_1(t), u_2(t)$, οι οποίες πραγματοποιούνται μέσω ακροφυσίων (jets). Η είσοδος ελέγχου $u_1(t)$ αντιπροσωπεύει ώθηση του δορυφόρου κατά τη διεύθυνση της ακτίνας $r(t)$ και η είσοδος ελέγχου $u_2(t)$ ώθηση κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς.

Έλεγχος της θέσης δορυφόρου (2)



Έλεγχος της θέσης δορυφόρου (3)

Μπορεί να αποδειχτεί ότι οι εξισώσεις που διέπουν την συμπεριφορά του συστήματος είναι οι μη γραμμικές δ.ε.

$$\ddot{r}(t) = r(t)\theta(t)^2 - \frac{k}{r(t)^2} + u_1(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{2\dot{\theta}(t)\dot{r}(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)}u_2(t) \quad \textbf{(1)}$$

Αν $u_1(t) = u_2(t) = 0$, οι (1) ικανοποιούνται από

$$r(t) = \sigma \in \mathbb{R}$$

$$\theta(t) = \omega t, \omega \in \mathbb{R}$$

όπου $\sigma^3\omega^2 = k$. Άρα κυκλικές τροχιές είναι δυνατές.

Έλεγχος της θέσης δορυφόρου (4)

Αν

$$x_1(t) := r(t) - \sigma$$
$$x_2(t) := \dot{r}(t)$$
$$x_3(t) := \sigma[\theta(t) - \omega t]$$
$$x_4(t) := \sigma\left[\dot{\theta}(t) - \omega\right]$$

και $\sigma = 1$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης γύρω από την παραπάνω λύση είναι οι

Έλεγχος της θέσης δορυφόρου (5)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2\omega & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

Εφόσον $n = 4 \Rightarrow n - 1 = 3$, η ελεγξιμότητα του συστήματος (2) μέσω των εισόδων $u_1(t)$ και $u_2(t)$ δίνεται από τον πίνακα ελεγξιμότητας

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega^3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega^2 & 0 & 0 & -4\omega^2\\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 & 2\omega^3 & 0 \end{array}\right]$$

Έλεγχος της θέσης δορυφόρου (6)

και επειδή $rank\mathcal{C} = 4$, το σύστημα είναι ελέγξιμο μέσω των $u_1(t)$ και $u_2(t)$.

Αν

$$u_2(t) = 0, B \to B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_1 = [B_1 \quad AB_1 \quad A^2B_1 \quad A^3B_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega^2 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{bmatrix}$$

Έλεγχος της θέσης δορυφόρου (7)

Ισχύει

$$rank\mathcal{C}_1 = 3 < 4,$$

επομένως το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο μέσω της εισόδου $u_1(t)$.

Αποδείξτε ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο μέσω της εισόδου $u_2(t)$.

Αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου (Input decoupling zeros) (1)

Αν ένα σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \textbf{(3)}$$
$$y(t) = Cx(t)$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

δεν είναι ελέγξιμο, τότε υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας

$$\hat{x}(t) = Tx(t) \Rightarrow x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$$
$$T \in \mathbb{R}^{n\times n}, |T| \neq 0$$

τέτοιος ώστε το ζεύγος (A, B) να είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής

Αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου (Input decoupling zeros) (2)

$$\hat{A} := TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix}$$

$\kappa\alpha\iota$

$$\hat{B} := TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

έτσι ώστε αν διαχωρίσουμε το άνυσμα κατάστασης $\hat{x}(t)$:

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

όπου $\hat{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n-k}, \hat{x}_2(t) \in \mathbb{R}^k$, στο νέο σύστημα συντεταγμένων το σύστημα να γράφεται ως

Αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου (Input decoupling zeros) (3)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad \textbf{(5)}$$

$$A_1 \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}, A_{12} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}, A_2 \in \mathbb{R}^{k\times k}, B_1 \in \mathbb{R}^{(n-k)\times m}, C_1 \in \mathbb{R}^{p\times(n-k)}, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times k}$$

Η (4) γράφεται

$$TA = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix} T \quad \textbf{(6)}$$

Επομένως

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου (Input decoupling zeros) (4)

$$TAB = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix} TB = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} \quad \textbf{(7)}$$

$$TA^2B = TAAB = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix} TAB$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^2 B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$TA^{n-1}B = \begin{bmatrix} A_1^{n-1} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix}$$

Αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου (Input decoupling zeros) (5)

Αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα T με τον πίνακα ελεγξιμότητας θα πάρουμε

$$T\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \dots & A_1^{n-k}B_1 & \dots & A_1^{n-1}B_1 \\ 0_{k,m} & 0_{k,m} & \dots & 0_{k,m} & \dots & 0_{k,m} \end{bmatrix} \quad \textbf{(8)}$$

Η (8) γράφεται

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \dots & A_1^{n-k}B_1 & \dots & A_1^{n-1}B_1 \\ 0_{k,m} & 0_{k,m} & \dots & 0_{k,m} & \dots & 0_{k,m} \end{bmatrix} \quad \textbf{(9)}$$

η οποία δίνει την

Αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου (Input decoupling zeros) (6)

$$T_2[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = [0_{k,m} \quad 0_{k,m} \quad 0_{k,m} \quad \dots \quad 0_{k,m}]$$

Εφόσον

$$rankT_2 = k$$

έχουμε ότι

$$rank[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n - k$$

Επομένως, λόγω της (9), ισχύει

$$rank\begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \dots & A_1^{n-k}B_1 & \dots & A_1^{n-1}B_1 \\ 0_{k,m} & 0_{k,m} & \dots & 0_{k,m} & \dots & 0_{k,m} \end{bmatrix} = n - k$$

ή ισοδύναμα

$$rank[B_1 \quad A_1B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-k}B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1}B_1] = n - k \quad \textbf{(10)}$$

Αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου (Input decoupling zeros) (7)

Επειδή από το θεώρημα Cayley–Hamilton για τον πίνακα A_1 εύκολα προκύπτει ότι οι στήλες των πινάκων $A_1^i B_1$ για $i = n-k, \dots, n-1$ εξαρτώνται γραμμικά από τις στήλες των πινάκων $B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n-k-1} B_1$, η (10) συνεπάγεται την

$$rank[B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-k-1} B_1] = n-k \quad \textbf{(11)}$$

Λόγω της (11) το σύστημα

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A_1 \hat{x}_1(t) + B_1 u(t)$$

είναι ελέγξιμο.

Προφανώς το σύστημα

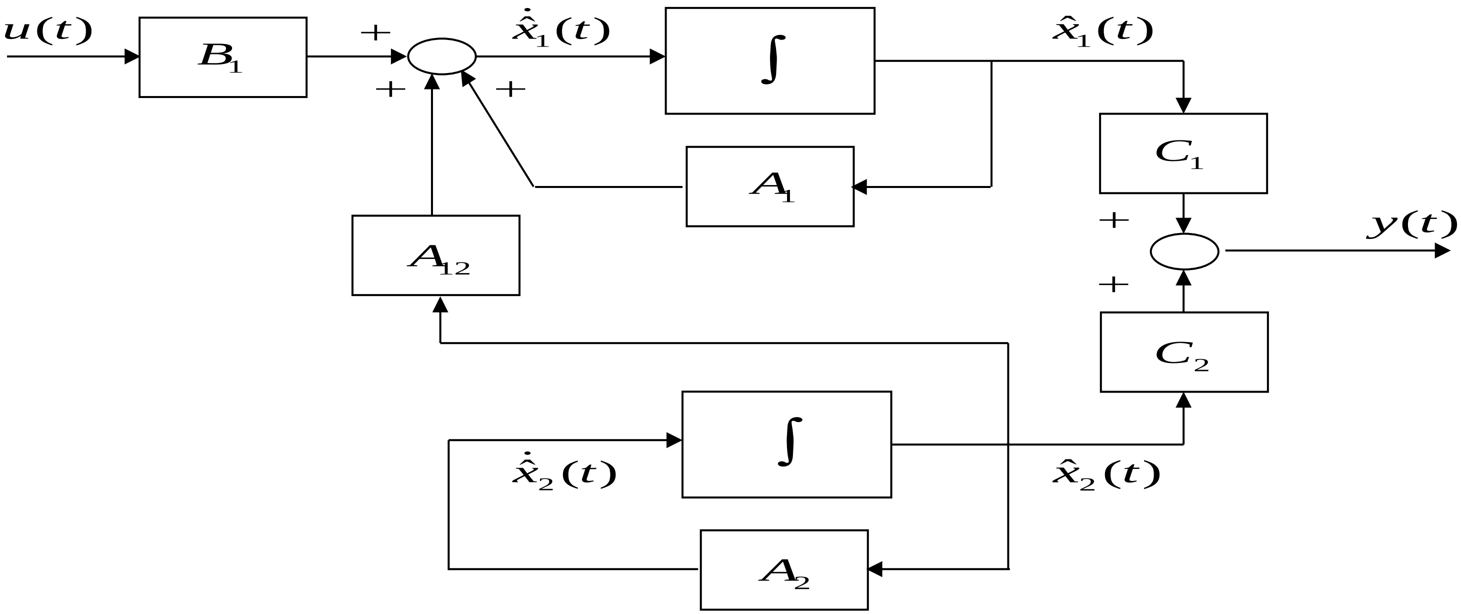
$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A_2 \hat{x}_2(t) \quad \textbf{(12)}$$

δεν είναι ελέγξιμο.

Αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου (Input decoupling zeros) (8)

Ορισμός. Οι ιδιοτιμές του πίνακα $A_2 \in \mathbb{R}^{k\times k}$ονομάζονται **αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου** (**input decoupling zeros**) του συστήματος (3).

Το διάγραμμα ροής του συστήματος (5) είναι



Πρόταση 1 (1)

Πρόταση 1. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

ταυτίζεται με την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A_1 \hat{x}_1(t) + B_1 u(t)$$

$$y_1(t) = C_1 \hat{x}_1(t)$$

Απόδειξη.

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος (13) είναι

Πρόταση 1 (2)

$$G(s) = \hat{C}\left(sI_n - \hat{A}\right)\hat{B}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_{n-k} - A_1 & -A_{12} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{bmatrix} sI_{n-k} - A_1 & -A_{12} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_{n-k} - A_1 & -A_{12} \\ 0_{k,n-k} & I_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} \quad \textbf{(14)}$$

Κοινός αριστερός διαιρέτης (1)

Ορισμός. Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$$

είναι **κοινός αριστερός διαιρέτης** των πινάκων

$$\begin{bmatrix} sI_{n-k} - A_1 & -A_{12} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$$

Από την (14) προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(s) = \hat{C}\left(sI_n - \hat{A}\right)\hat{B}$$

$$= [C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix} sI_{n-k} - A_1 & -A_{12} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} =$$

Κοινός αριστερός διαιρέτης (2)

$$= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_{n-k} - A_1 & -A_{12} \\ 0_{k,n-k} & I_k \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_{n-k} - A_1 & -A_{12} \\ 0_{k,n-k} & I_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_{n-k} - A_1 & -A_{12} \\ 0_{k,n-k} & I_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix}$$

Κοινός αριστερός διαιρέτης (3)

$$= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI_{n-k} - A_1)^{-1} & (sI_{n-k} - A_1)^{-1} A_{12} \\ 0_{k,n-k} & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI_{n-k} - A_1)^{-1} B_1 \\ 0_{k,n-k} \end{bmatrix}$$

$$= C_1 (sI_{n-k} - A_1)^{-1} B_1$$

Δηλαδή, κατά τη δημιουργία της συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$, ο κοινός αριστερός διαιρέτης

$$\begin{bmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$$

των πινάκων

Κοινός αριστερός διαιρέτης (4)

$$\begin{bmatrix} sI_{n-k} - A_1 & -A_{12} \\ 0_{k,n-k} & sI_k - A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$$

απλοποιείται κι έτσι οι ιδιοτιμές του

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & \boldsymbol{A_2} \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{A_2}$ (που αντιστοιχούν στο μη ελέγξιμο σύστημα (12)) δεν εμφανίζονται ως πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς.

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, *Εκδόσεις Τζιόλα*.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης