ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 12. Παρατηρησιμότητα

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Παρατηρησιμότητα.
- Κριτήρια Παρατηρησιμότητας-Υλοποίηση.
- Αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου.
- Αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου–εξόδου.
- Παρατηρήσιμη μορφή.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη των εννοιών της παρατηρησιμότητας, των αποσυζευκτικών μηδενικών εξόδου και των αποσυζευκτικών μηδενικών εισόδου-εξόδου.
- Μελέτη των κριτηρίων παρατηρησιμότητας.
- Παρουσίαση παραδειγμάτων υλοποίησης των κριτηρίων παρατηρησιμότητας.
- Μελέτη της παρατηρήσιμης μορφής ενός συστήματος με πολλές εισόδους.

Παρατηρησιμότητα (observability) (1)

Δυϊκή προς την έννοια της ελεγξιμότητας είναι η έννοια της παρατηρησιμότητας (observability).

Ορισμός. Το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \textbf{(1)}$$

$$y(t) = Cx(t) \quad \textbf{(2)}$$

(ή το ζεύγος $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$)

ονομάζεται **παρατηρήσιμο** (**observable**) αν οι τιμές $\{y(t): t \in [0, t_1]\}$ της εξόδου $y\ (t)$ σε ένα αυθαίρετο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_1$ προσδιορίζουν κατά μοναδικό τρόπο την αρχική κατάσταση $x(0)$ του συστήματος.

Παρατηρησιμότητα (observability) (2)

Έστω ότι η είσοδος $u(t) = 0, t \geq 0$.

Θεωρώντας τη λύση της (1), από την (2), έχουμε

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{At}x(0) \qquad \textbf{(3)}$$

Αν οι n στήλες του πίνακα $Ce^{At} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε t , τότε ο πίνακας

$$\boxed{M(t_1) := \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt}$$

είναι ομαλός (αποδείξτε το).

Παρατηρησιμότητα (observability) (3)

Πολλαπλασιάζοντας την (3) επί $e^{A^T t} C^T$ παίρνουμε

$$e^{A^T t} C^T y(t) = e^{A^T t} C^T C e^{At} x(0) \quad \textbf{(4)}$$

Ολοκληρώνοντας την (4) από $t = 0$ ως $t = t_1$ έχουμε

$$\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \, x(0)$$

ή

$$\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = M(t_1) x(0) \Rightarrow$$

$$x(0) = M(t_1)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt \quad \textbf{(5)}$$

Παρατηρησιμότητα (observability) (4)

Εφόσον ο $M(t_1)$ είναι ομαλός, ο $M(t_1)^{-1}$ υπάρχει. Επομένως, από την (5), η αρχική κατάσταση $x\ (0)$ μπορεί να προσδιοριστεί.

Αν οι στήλες του Ce^{At}είναι γραμμικά εξαρτημένες, θα έχουμε

$$\exists x \neq 0 : Ce^{At}x = 0 \Rightarrow M(t_1)x = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt\, x$$

$$= \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T (Ce^{At}x) dt = 0.$$

Αν $rank M(t_1) < n \Rightarrow$

$$\exists x \neq 0 : M(t_1)x = 0 \Rightarrow x^T M(t_1)x = 0 \Rightarrow$$

Παρατηρησιμότητα (observability) (5)

$$\Rightarrow x^T \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt\, x = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} x^T e^{A^T t} C^T C e^{At} x dt = 0 \Rightarrow \int_0^{t_1} (Ce^{At}x)^T C e^{At} x dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} \|Ce^{At}x\|^2 dt = 0 \Rightarrow Ce^{At}x = 0$$

οι στήλες του Ce^{At} είναι γραμμικά ανεξάρτητες $\Leftrightarrow rank_{\mathbb{R}} Q = n$.

Παρατηρησιμότητα (observability) (6)

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^K = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{ik} A^i \right) t^k = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i \Rightarrow$$

$$Ce^{At} = [\gamma_0(t) I_p \quad \gamma_1(t) I_p \quad \dots \quad \gamma_{n-1}(t) I_p] \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{Q}$$

Επίσης, παραγωγίζοντας την (2), έχουμε διαδοχικά:

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t)$$

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) = CA[Ax(t) + Bu(t)] + CB\dot{u}(t)$$
$$= CA^2 x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t)$$

Παρατηρησιμότητα (observability) (7)

$$\dddot{y}(t) = CA^2\dot{x}(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t)$$
$$= CA^2[Ax(t) + Bu(t)] + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t)$$
$$= CA^3x(t) + CA^2Bu(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(t)$$
$$= CA^{n-1}x(t) + CA^{n-2}Bu(t) + \cdots + CABu^{(n-3)}(t) + CBu^{(n-2)}(t)$$

ή υπό μορφή πινάκων

Παρατηρησιμότητα (observability) (8)

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & CA^{n-4}B & \dots & CAB & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \\ \vdots \\ u^{(n-3)}(t) \\ u^{(n-2)}(t) \end{bmatrix} \quad \textbf{(6)}$$

Παρατηρησιμότητα (observability) (9)

Αν $u(0) = 0$, η (6) για $t = 0$ δίνει την

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \vdots \\ y(0)^{n-1} \end{bmatrix}}_{np\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{np\times n} x(0) \quad \textbf{(7)}$$

Για να έχει η (7) λύση $x(0) \in \mathbb{R}^n$ πρέπει και αρκεί

Παρατηρησιμότητα (observability) (10)

$$rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Παράδειγμα 1

Ένα τυπικό παράδειγμα ενός μη παρατηρήσιμου συστήματος είναι ένα σύστημα που περιγράφεται από την

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι το μέρος του ανύσματος κατάστασης ίσο με $x_2(t)$ δεν επηρεάζει την έξοδο $y(t)$, επομένως δεν μπορεί να προσδιοριστεί από παρατήρηση της $y(t)$ για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_1$.

Θεώρημα 1 (1)

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η παρατηρησιμότητα χαρακτηρίζεται κατά τρόπο τελείως ανάλογο με αυτόν της ελεγξιμότητας.

Θεώρημα 1

Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες

i. Το σύστημα (1) – (2) ή το ζεύγος (A, C) είναι παρατηρήσιμο.

ii. $rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C \end{bmatrix} = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

iii. Το ζεύγος (A, C) δεν είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0_{n-k,k} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p,k} \end{bmatrix} \right)$$

Θεώρημα 1 (2)

iv. $rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

v. Αν $\eta \in \mathbb{R}^n$ είναι τέτοιο ώστε $C(sI_n - A)^{-1}\eta = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$, τότε $\eta = 0$. Ισοδύναμα, οι n στήλες του

$$C(sI_n - A)^{-1} \in \mathbb{R}[s]^{p\times n}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $s \in \mathbb{C}$.

iv. Αν $\eta \in \mathbb{R}^n$ είναι τέτοιο ώστε $Ce^{At}\eta = 0$ για $t \in [0, t_1]$ και αυθαίρετο t_1, τότε $\eta = 0$. Ισοδύναμα, οι n στήλες του $Ce^{At} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $t \in [0, t_1]$.

Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του θεωρήματος της ελεγξιμότητας.

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = (CA)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2 (2)

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rank_{\mathbb{R}} Q = rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

Το σύστημα μου είναι μη παρατηρήσιμο.

Παράδειγμα 3 (1)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} z(t) = Uz(t) \quad \downarrow$$

$$\big(Uz(t)\big)^{(1)} = A\big(Uz(t)\big) + Bu(t)$$

$$y(t) = C\big(Uz(t)\big)$$

$$\dot{z}(t) = (VAU)z(t) + (VB)u(t)$$

Παράδειγμα 3 (2)

$$y(t) = (CU)z(t) \;\; (V = U^{-1})$$

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/8 \\ -1/8 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\searrow$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} z(t)$$

$$rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} 1I_3 - A \\ C \end{bmatrix} = rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Παράδειγμα 3 (3)

$$rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} -1I_3 - A \\ C \end{bmatrix} = rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} 3I_3 - A \\ C \end{bmatrix} = rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Συνεπώς το σύστημα Σ είναι παρατηρήσιμο.

Κριτήρια Παρατηρησιμότητας
Υλοποίηση

```
function cc=Observable(a,c)
% This function check if the system (A,B,C,D) is observable
n=length(a);
k=c; ob=[k];
for i=1:n-1
  k=k*a;
  ob=[ob ; k];
end
cc=(rank(ob)==n)
```

```
a=[1 2 3 ; 2 3 1 ; 3 1 2];
c=[1 ; 0 ; -1];
Observable(a,c)
Ans=
        0
```

```
a=[1 2 3 ; 2 3 1 ; 3 1 2];
c=[1 ; 0 ; -1];
rank(obsv(a,c))==3
Ans=0
```

Αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου (Output decoupling zeros) (1)

Όπως είδαμε στο θεώρημα της παρατηρησιμότητας, αν ένα σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

δεν είναι παρατηρήσιμο και για $k > 0$ είναι

$$rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n - k$$

Αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου (Output decoupling zeros) (2)

τότε υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας

$$\bar{x}(t) = Tx(t) \Rightarrow x(t) = T^{-1}\bar{x}(t),$$
$$T \in \mathbb{R}^{n\times n}, |T| \neq 0$$

τέτοιος ώστε το ζεύγος (A, C) να είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής

$$\bar{A} \coloneqq TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{n-k,k} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}$$

και

$$\bar{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p,n-k} \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε αν διαχωρίσουμε το άνυσμα κατάστασης $\bar{x}(t)$:

Αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου (Output decoupling zeros) (3)

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

όπου $\bar{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n-k}, \bar{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{k}$, στο νέο σύστημα συντεταγμένων το σύστημα να γράφεται ως

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{n-k,k} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} = C_1 \bar{x}_1(t) \end{cases} \quad \textbf{(8)}$$

$A_1 \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}, A_{21} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}, A_2 \in \mathbb{R}^{k\times k}, B_1 \in \mathbb{R}^{(n-k)\times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{k\times m}, C_1 \in \mathbb{R}^{p\times(n-k)}$

Αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου (Output decoupling zeros) (4)

Ανάλογα με την περίπτωση της παρατηρησιμότητας μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A_1 \\ \vdots \\ C_1A_1^{n-k-1} \end{bmatrix} = n-k$$

έτσι ώστε το σύστημα

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = A_1\bar{x}_1(t) + B_1u(t)$$
$$y_1(t) = C_1\bar{x}_1(t)$$

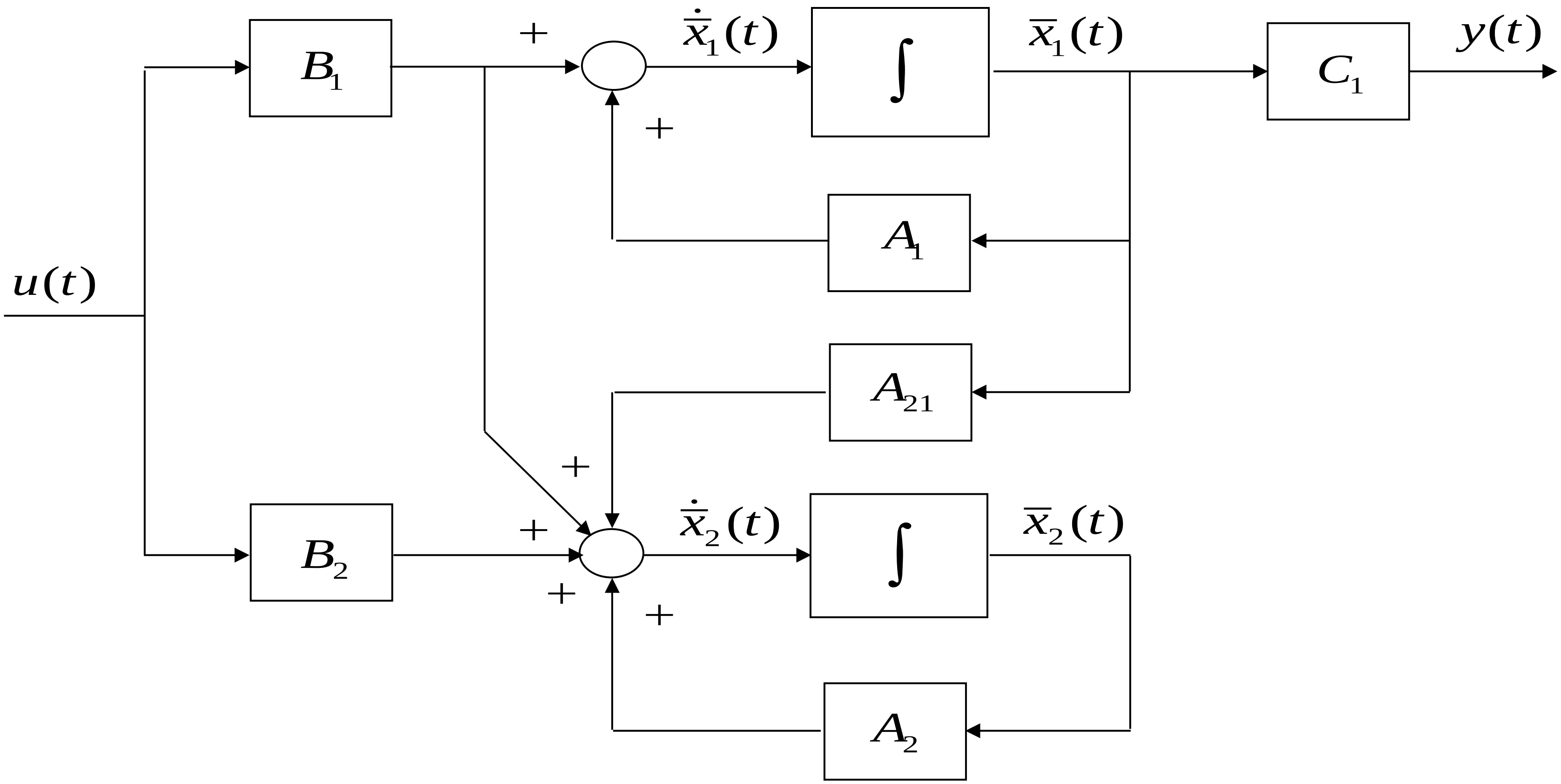
είναι παρατηρήσιμο.

Αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου (Output decoupling zeros) (5)

Ορισμός. Οι ιδιοτιμές του πίνακα $A_2 \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ονομάζονται **αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου** (**output decoupling zeros**) του συστήματος.

Το διάγραμμα ροής του συστήματος (8) είναι

Αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου (Output decoupling zeros) (6)



Πρόταση (1)

Πρόταση. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{n-k,k} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} = C_1 \bar{x}_1(t) \end{cases}$$

ταυτίζεται με την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = A_1 \bar{x}_1(t) + B_1 u(t) \\ y_1(t) = C_1 \bar{x}_1(t) \end{cases}$$

Δηλαδή

Πρόταση (2)

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \bar{C}(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{B} \\
&= \begin{bmatrix} C_1 & 0_{p,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_{n-k} - A_1 & 0_{n-k,k} \\ -A_{21} & sI_k - A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\
&= C_1(sI_{n-k} - A_1)^{-1}B_1
\end{aligned}
$$

Απόδειξη. (κοινό παράγοντα, όπως στην ελεγξιμότητα)

Άσκηση.

Αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου–εξόδου

Θεωρήστε το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Ορισμός. Οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, οι οποίες είναι αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου και αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου ονομάζονται **αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου–εξόδου** του συστήματος.

Ορισμός. **Πόλοι** του συστήματος είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Σύνολο των αποσυζευκτικών μηδενικών του συστήματος

Τάξη του συστήματος ονομάζεται ο αριθμός n των πόλων του συστήματος (δηλαδή η διάσταση του πίνακα A).

Το σύνολο των αποσυζευκτικών μηδενικών του συστήματος είναι:

{αποσυζευκτικά μηδενικά του συστήματος} =
{αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου}∪
{αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου} –
{αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου – εξόδου}

Επιπλέον ισχύει η σχέση συνόλων:

{πόλοι του συστήματος} =
{πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς}∪
{αποσυζευκτικά μηδενικά του συστήματος}

Παρατηρήσιμη μορφή Πολλές είσοδοι (1)

(observable companion form)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ και } C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix}$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{bmatrix}, A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{bmatrix}, i \neq j$$

Παρατηρήσιμη μορφή
Πολλές είσοδοι (2)

$$C_i = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{i-1} & \begin{matrix} x \\ x \\ x \\ x \\ x \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Το **δυϊκό σύστημα** δίνεται από τις εξισώσεις

Παρατηρήσιμη μορφή
Πολλές είσοδοι (3)

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A^T \bar{x}(t) + C^T \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = B^T \bar{x}(t) + D^T \bar{u}(t) \end{cases}$$

Βρίσκω έναν πίνακα $\bar{T}$ που φέρνει το **δυϊκό** σύστημα στην ελέγξιμη μορφή:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}^T \hat{x}(t) + \hat{C}^T \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = \hat{B}^T \hat{x}(t) + \widehat{D}^T \bar{u}(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = \hat{C} \hat{x}(t) + \widehat{D} \bar{u}(t) \end{cases}$$

Οι δείκτες $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ παρατηρησιμότητας (observability indices).

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012, *Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, *Εκδόσεις Τζιόλα*.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης