ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 16. Ανάστροφο εκκρεμές (ανάδραση κατάστασης)

Νίκος Καραμπετάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

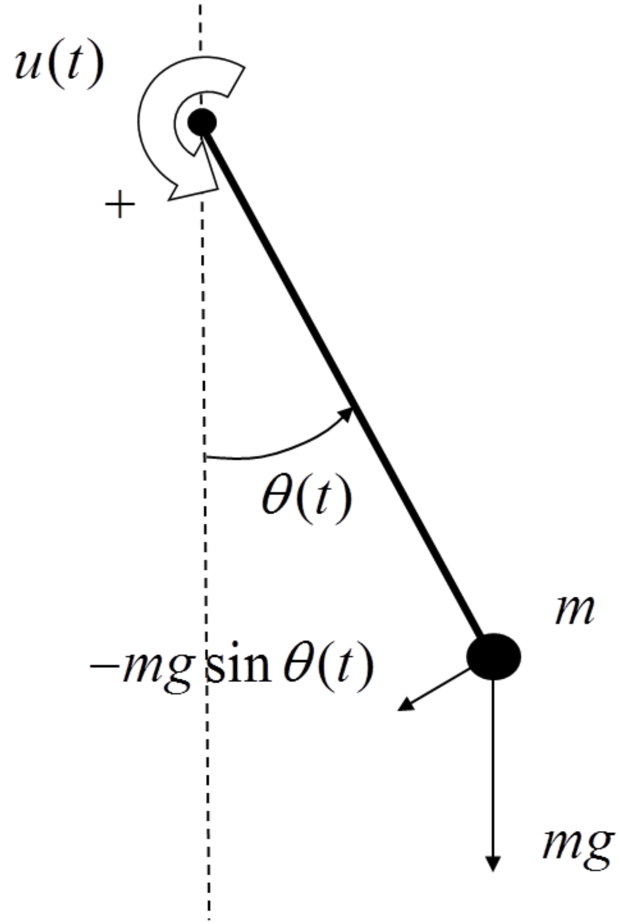
Περιεχόμενα Ενότητας

- Ανάστροφο εκκρεμές.
- Ανάδραση κατάστασης.
- Επιλογή εισόδου για σταθεροποίηση του συστήματος χωρίς ανάδραση κατάστασης.
- Επιλογή εισόδου για σταθεροποίηση του συστήματος με ανάδραση του ανύσματος κατάστασης.

Σκοποί Ενότητας

- Να εισαγάγει τον φοιτητή στην έννοια της ***ανάδρασης κατάστασης*** μέσω ενός πραγματικού παραδείγματος.

Ανάστροφο εκκρεμές (1)



Η διαφορική εξίσωση που διέπει το εκκρεμές είναι η

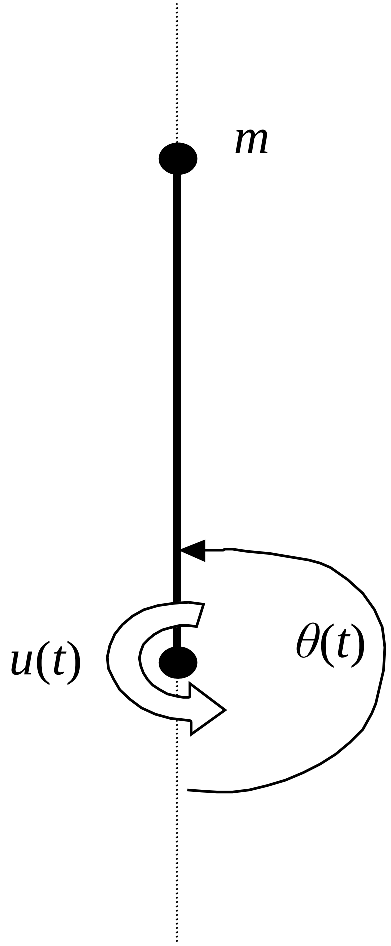
$$mL^2\ddot{\theta}(t) + mgLsin\theta(t) = u(t)$$

(μη γραμμική λόγω του όρου $sin\theta(t)$)

Έστω η κατάσταση

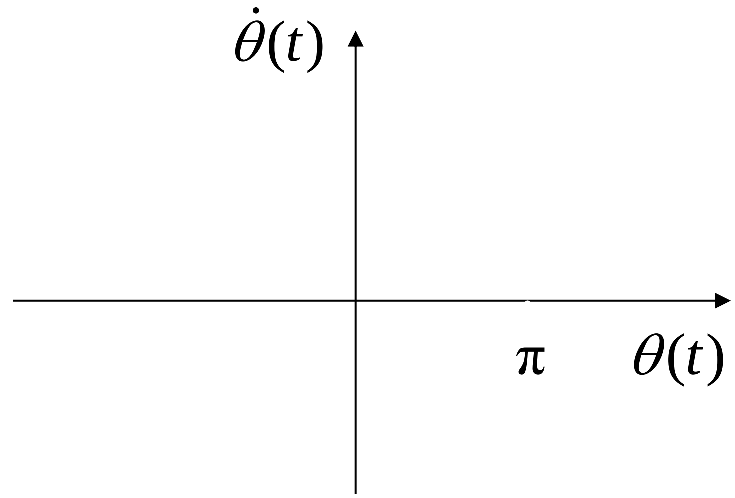
$$\theta(t) = \pi, \dot{\theta}(t) = 0$$

Ανάστροφο εκκρεμές (2)



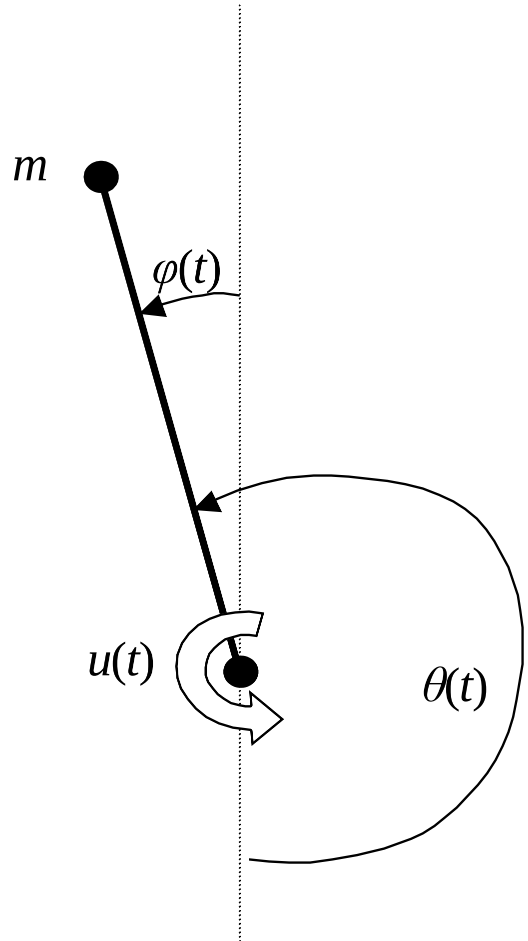
Έστω η κατάσταση

$$\theta(t) = \pi, \dot{\theta}(t) = 0$$



Η κατάσταση αυτή είναι ασταθής. Ας δούμε γιατί.

Ανάστροφο εκκρεμές (3)



Έστω ότι η κατάσταση διαταράσσεται έτσι ώστε

$$\theta(t) = \pi + \varphi(t)$$

όπου η γωνία

$$\varphi(t) = \theta(t) - \pi$$

να είναι «μικρή» έτσι ώστε

$$sin\theta(t) = \sin\big(\pi + \varphi(t)\big)$$
$$= -\sin\big(\varphi(t)\big) = -\varphi(t)$$

και

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\varphi}(t), \ddot{\theta}(t) = \ddot{\varphi}(t)$$

Άρα η γωνία $\varphi(t)$ ικανοποιεί τη δ.ε.

$$\ddot{\varphi}(t) - \frac{g}{L}\varphi(t) = \frac{1}{mL^2}u(t) \;\textbf{(1)}$$

Ανάστροφο εκκρεμές (4)

Αν $\mathcal{L}\{\varphi(t)\} = (s), \mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace

$$s^2 \Phi(s) - s\varphi(0) - \dot{\varphi}(0) - \frac{g}{L}\Phi(s) = \frac{1}{mL^2}U(s)$$

$$\Phi(s) = \frac{s\varphi(0) + \dot{\varphi}(0)}{s^2 - \frac{g}{L}} + \frac{1}{\left(s^2 - \frac{g}{L}\right)mL^2}U(s)$$

Αν $\frac{g}{L} = 1, \;\; mL^2 = 1, \;\; u(t) = 0, t \geq 0$

$$\Phi(s) = \frac{s\varphi(0) + \dot{\varphi}(0)}{s^2 - 1} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$$

όπου

$$A = \frac{\varphi(0) + \dot{\varphi}(0)}{2}, B = \frac{-\varphi(0) + \dot{\varphi}(0)}{-2}$$

Ανάστροφο εκκρεμές (5)

και άρα

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$$

$$= \frac{\varphi(0)+\dot{\varphi}(0)}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{-\varphi(0)+\dot{\varphi}(0)}{-2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= \frac{\varphi(0)+\dot{\varphi}(0)}{2}e^{t} + \frac{-\varphi(0)+\dot{\varphi}(0)}{-2}e^{-t}.$$

Επομένως, λόγω του όρου e^t, όταν

$$t \to \infty \text{ τότε } \varphi(t) \to \infty$$

Άρα χωρίς είσοδο (ροπή στρέψης) ($u(t) = 0, t \geq 0$) η κατάσταση ισορροπίας

$$\theta(t) = \pi, \dot{\theta}(t) = 0, t \geq 0$$

Ανάστροφο εκκρεμές (6)

ή ισοδύναμα η κατάσταση ισορροπίας

$$\varphi(t) = 0, \dot{\varphi}(t) = 0, t \geq 0$$

είναι ασταθής.

Σκοπός μας είναι η επιλογή της εισόδου $u(t) = 0, t \geq 0$ έτσι ώστε για κάθε μικρή διαταραχή

$$\varphi(0) \neq 0, \dot{\varphi}(0) \neq 0$$

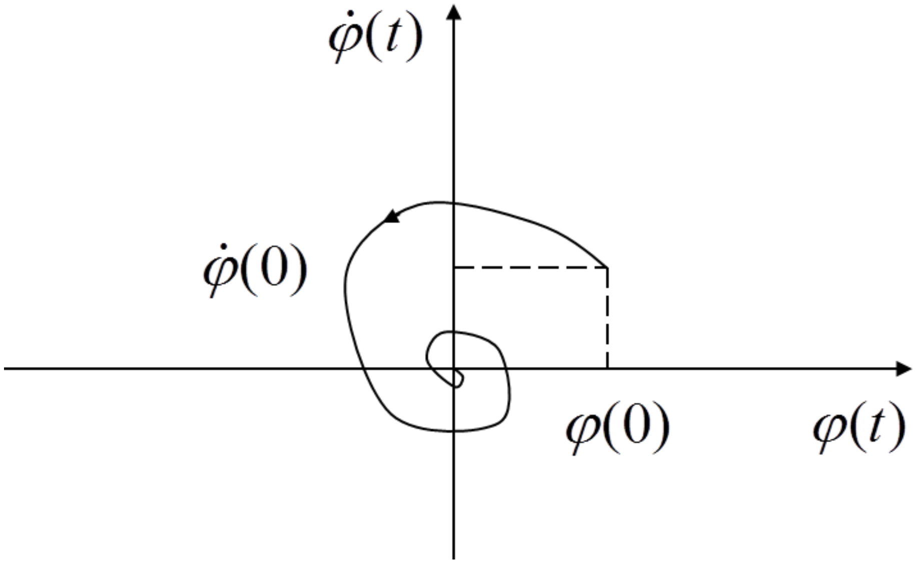
η κατάσταση ισορροπίας

$$\varphi(t) = 0, \dot{\varphi}(t) = 0, t \geq 0$$

να είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{\varphi}(t) = 0 \ \textbf{(2)}$$

Ανάστροφο εκκρεμές (7)



Λύση χωρίς ανάδραση (Open loop control) (1)

Έστω ότι γνωρίζουμε ακριβώς την αρχική κατάσταση και έστω ότι είναι

$$\varphi(0) = 1, \dot{\varphi}(0) = -2 \quad \textbf{(3)}$$

Αν επιλέξουμε την είσοδο ως (είσοδο **χωρίς ανάδραση** ή **open loop control**):

$$u(t) = 3e^{-2t} \qquad \textbf{(4)}$$

η (1) θα γράφεται

$$\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = 3e^{-2t} \quad \textbf{(5)}$$

της οποίας η λύση για αρχικές συνθήκες τις

$$\varphi(0) = 1, \dot{\varphi}(0) = -2$$

Λύση χωρίς ανάδραση (Open loop control) (2)

είναι η

$$\varphi(t) = e^{-2t} \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = -2e^{-2t}$$

έτσι ώστε η (2) να ικανοποιείται:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0, \lim_{t\to\infty} \dot{\varphi}(t) = 0.$$

Αν όμως υπάρχει σφάλμα στον προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών και οι αρχικές συνθήκες δεν είναι οι (3) αλλά οι

$$\varphi(0) = 1, \dot{\varphi}(0) = -2 + \varepsilon, \varepsilon \neq 0$$

τότε η λύση της (5) είναι η

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}e^{t}\varepsilon + e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\varepsilon$$

Λύση χωρίς ανάδραση (Open loop control) (3)

η οποία, λόγω του όρου $\frac{1}{2}e^{t}\varepsilon$, ικανοποιεί τις

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)\to\infty,\ \lim_{t\to\infty}\dot{\varphi}(t)\to\infty$$

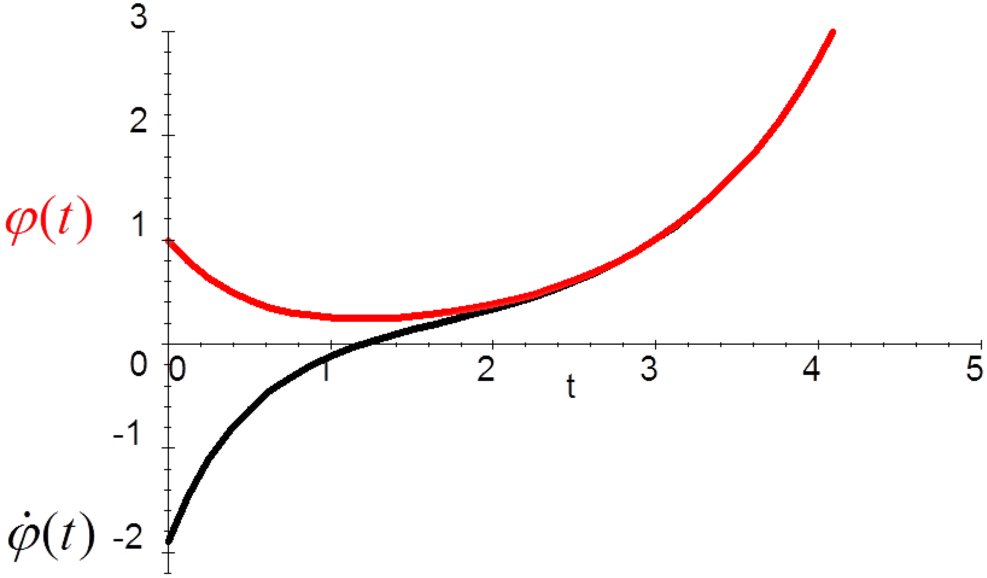
Αν για παράδειγμα $\varepsilon=\frac{1}{10}$

$$\varphi(t)=\frac{1}{20}e^{t}+e^{-2t}-\frac{1}{20}e^{-t} \quad \textbf{(6)}$$

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{1}{20}e^{t}-2e^{-2t}+\frac{1}{20}e^{-t} \quad \textbf{(7)}$$

Γραφική παράσταση των $\varphi(t),\dot{\varphi}(t)$στις (6) και (7)

Λύση χωρίς ανάδραση (Open loop control) (4)



Βλέπουμε δηλαδή ότι, στην πράξη, μία «προγραμματισμένη» είσοδος, όπως η (4), δεν μπορεί να σταθεροποιήσει το σύστημα, διότι μία τέτοια είσοδος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες $\varphi(0), \dot{\varphi}(0)$ και η ακριβής γνώση των αρχικών συνθηκών στην πράξη δεν είναι εφικτή.

Απλή λύση με ανάδραση θέσης (Position feedback) (1)

Έστω ότι υπάρχει αισθητήριο όργανο (sensor) μέσω του οποίου μπορούμε να προσδιορίζουμε τη γωνία $\varphi(t)$ της περιστροφής του άξονα του ανάστροφου εκκρεμούς γύρω από την κατακόρυφο και επιλέγουμε την είσοδο $u(t)$ (ροπή στρέψης του άξονα) να είναι ανάλογη της γωνίας $\varphi(t)$ με φορά αντίθετη της αύξησης της γωνίας(βλέπε το πρόσημο στην (8)) ως εξής:

$$u(t) = -a\varphi(t) \quad \mathbf{(8)}$$

όπου a επιλέξιμη σταθερά, έτσι ώστε αν

$$\varphi(t) = \theta(t) - \pi > 0 \text{ ή } \theta(t) > \pi$$

η φορά στρέψης να είναι σύμφωνα με την κίνηση των

Απλή λύση με ανάδραση θέσης (Position feedback) (2)

δεικτών του ρολογιού και αν

$$\varphi(t) = \theta(t) - \pi < 0 \text{ ή } \theta(t) < \pi$$

η φορά στρέψης να είναι αντίθετη από την κίνηση των δεικτών του ρολογιού.

Αντικαθιστώντας την (8) στην (1), παίρνουμε τη δ.ε. που διέπει το κλειστό σύστημα

$$\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = -a\varphi(t)$$

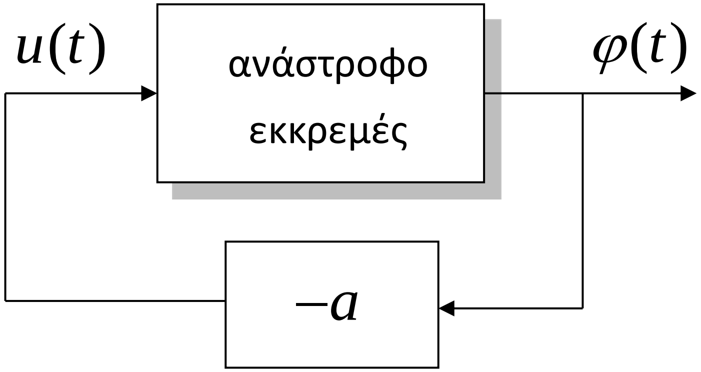
ή ισοδύναμα τη δ.ε.

$$\ddot{\varphi}(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = 0 \quad \textbf{(9)}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (9) είναι το

$$s^2 + a - 1 = 0 \quad \textbf{(10)}$$

Απλή λύση με ανάδραση θέσης (Position feedback) (3)



Αν $\alpha - 1 > 0$, οι λύσεις της (10) είναι καθαρά μιγαδικές και συζυγείς:

$$\lambda_1 = j\sqrt{\alpha - 1}, \lambda_2 = -j\sqrt{\alpha - 1}$$

και η λύση της (9) είναι η

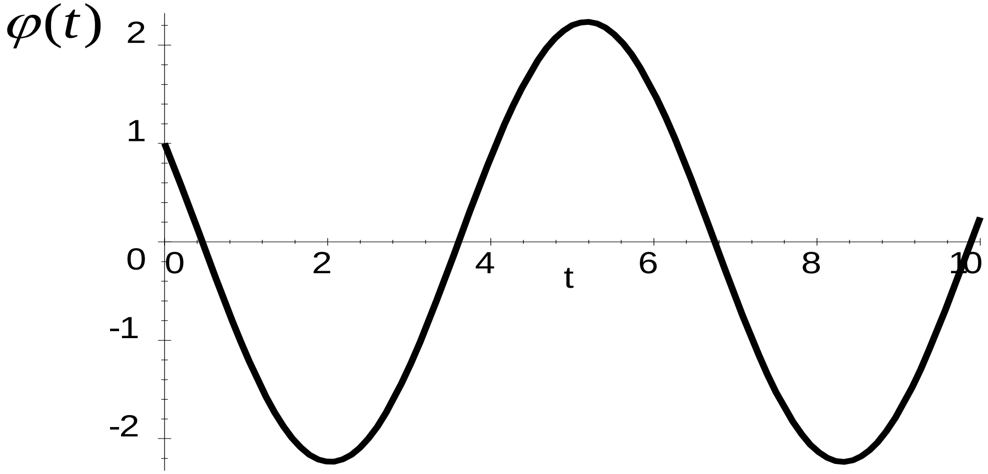
$$\boxed{\varphi(t) = \varphi(0) cos\sqrt{\alpha - 1}t + \frac{\dot{\varphi}(0)}{\sqrt{\alpha - 1}} sin\sqrt{(\alpha - 1)}t}$$

Απλή λύση με ανάδραση θέσης (Position feedback) (4)

Έχουμε δηλαδή ταλάντωση του ανάστροφου εκκρεμούς γύρω από την κατάσταση ισορροπίας $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$. Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε $a = 2$, τότε

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi(0)cost + \dot{\varphi}(0)sint}$$

της οποίας η γραφική παράσταση για $\varphi(0) = 1,\ \dot{\varphi}(0) = -2$ είναι η



Απλή λύση με ανάδραση θέσης (Position feedback) (5)

Αν $\alpha - 1 < 0$, τότε οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι πραγματικές και είναι οι

$$\lambda_1 = \sqrt{1-\alpha} > 0, \lambda_2 = -\sqrt{1-\alpha} < 0$$

και η λύση της (9) είναι της μορφής

$$\boxed{\varphi(t) = c_1 e^{\left(\sqrt{1-\alpha}\right)t} + c_2 e^{-\left(\sqrt{1-\alpha}\right)t}}$$

για την οποία, λόγω του όρου $c_1 e^{\left(\sqrt{1-\alpha}\right)t}$, έχουμε πάλι ότι

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) \to \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{\varphi}(t) \to \infty$$

Δηλαδή η ανάδραση εξόδου στην (8) δεν σταθεροποιεί το σύστημα.

Λύση με ανάδραση του ανύσματος κατάστασης (State feedback) (1)

Έστω ότι υπάρχει αισθητήριο όργανο μέσω του οποίου μπορούμε να προσδιορίζουμε

(α) τη γωνία περιστροφής $\varphi(t)$ του άξονα του ανάστροφου εκκρεμούς γύρω από την κατακόρυφο,

(β) τη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\varphi}(t)$

και έστω ότι επιλέγουμε την είσοδο $u(t)$ (ροπή στρέψης του άξονα) έτσι ώστε να είναι ανάλογη της γωνίας $\varphi(t)$ και της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\varphi}(t)$, δηλαδή

$$u(t) = -a\varphi(t) - b\dot{\varphi}(t) \quad \textbf{(11)}$$

όπου a, b επιλέξιμες σταθερές.

Λύση με ανάδραση του ανύσματος κατάστασης (State feedback) (2)

Αντικαθιστώντας την (11) στην (1), παίρνουμε τη δ.ε. του κλειστού συστήματος:

$$\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = -a\varphi(t) - b\dot{\varphi}(t)$$

ή

$$\ddot{\varphi}(t) + b\dot{\varphi}(t) + (a-1)\varphi(t) = 0 \quad \textbf{(12)}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της δ.ε. (12) είναι

$$s^2 + bs + (a-1) = 0$$

της οποίας οι ρίζες είναι

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4(a-1)}}{2}, \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4(a-1)}}{2}$$

Λύση με ανάδραση του ανύσματος κατάστασης (State feedback) (3)

Παρατηρήστε ότι μπορούμε πάντα να επιλέξουμε την σταθερά $b > 0$ έτσι ώστε οι ρίζες λ_1, λ_2 να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Π.χ. για $a = b = 3$ οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4(a-1)}}{2} = -1, \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4(a-1)}}{2} = -2$$

και η λύση της (12) είναι της μορφής

$$\boxed{\varphi(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}$$

όπου c_1, c_2 σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες (προσδιορίστε τις)

Λύση με ανάδραση του ανύσματος κατάστασης (State feedback) (4)

και άρα

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{\varphi}(t) = 0$$

δηλαδή το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Αν ορίσουμε ως καταστάσεις τις μεταβλητές

$$x_1(t) \coloneqq \varphi(t) \quad \textbf{(13)}$$

$$x_2(t) \coloneqq \dot{\varphi}(t) \quad \textbf{(14)}$$

παραγωγίζοντας την (13) και λόγω της (14), παίρνουμε την

$$\dot{x}_1(t) \coloneqq \dot{\varphi}(t) = x_2(t) \ \textbf{(15)}$$

Παραγωγίζοντας επίσης την (14), από την (12), παίρνουμε την

Λύση με ανάδραση του ανύσματος κατάστασης (State feedback) (5)

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\varphi}(t) = \varphi(t) + u(t) = x_1(t) + u(t) \quad \textbf{(16)}$$

Αν ορίσουμε το άνυσμα κατάστασης

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

τότε οι (15), (16) γράφονται στη μορφή του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \textbf{(17)}$$

Αν

$$F = \begin{bmatrix} -a & -b \end{bmatrix}$$

η (11) γράφεται

Λύση με ανάδραση του ανύσματος κατάστασης (State feedback) (6)

$$u(t) = -a\varphi(t) - b\dot{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} -a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = Fx(t) \quad \textbf{(18)}$$

Αντικαθιστώντας την (18) στην (17), παίρνουμε την εξίσωση του χώρου των καταστάσεων του κλειστού συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + BFx(t)$$

$$= (A + BF)x(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -b \end{bmatrix} \right) x(t)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & -b \end{bmatrix} \right) x(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - a & -b \end{bmatrix} x(t)$$

Λύση με ανάδραση του ανύσματος κατάστασης (State feedback) (7)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$A + BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-a & -b \end{bmatrix}$$

του κλειστού συστήματος είναι

$$\psi_F(s) = \det(sI_2 - A - BF) = det \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1+a & s+b \end{vmatrix}$$
$$= s(s+b) + (a-1) = s^2 + bs + a - 1$$

Αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ είναι οι επιθυμητές ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος, τότε

$$\psi_F(s) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2) = s^2 + (-\lambda_1 - \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2 \Rightarrow$$
$$b = -\lambda_1 - \lambda_2, a = \lambda_1 \lambda_2 + 1$$

Λύση με ανάδραση του ανύσματος κατάστασης (State feedback) (8)

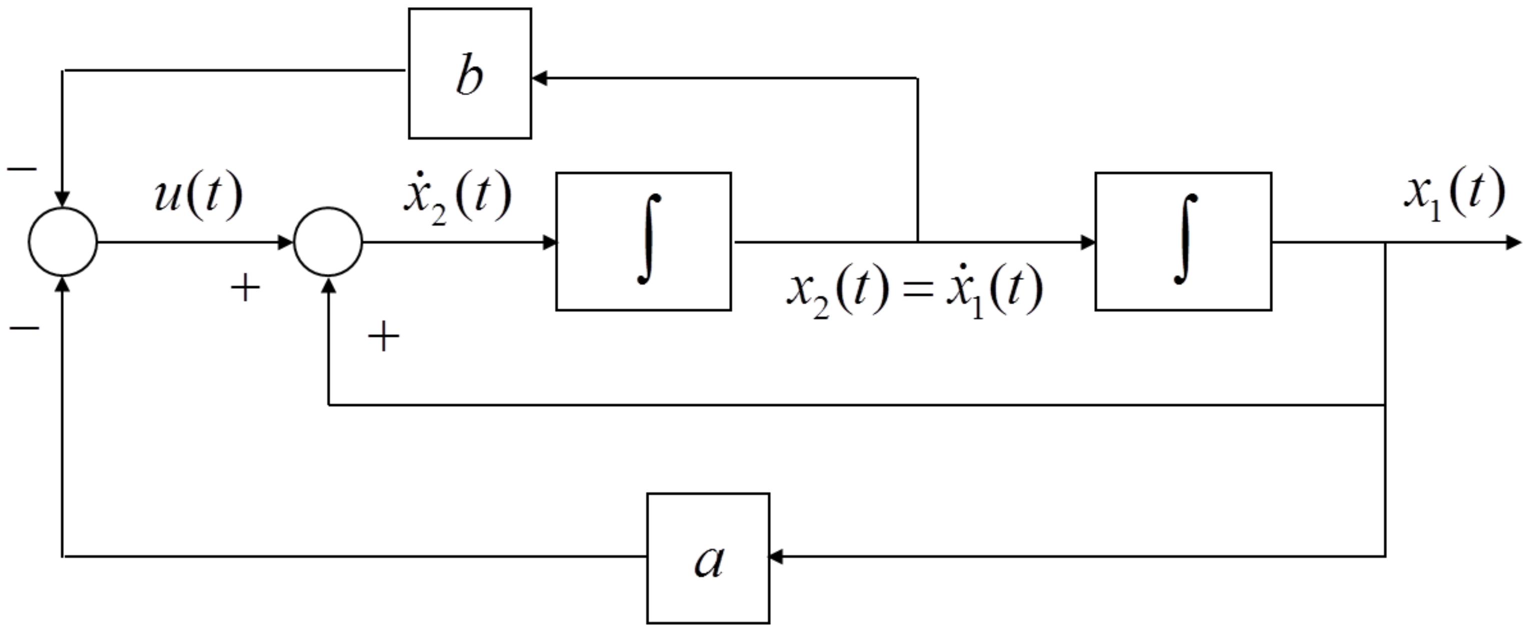
Οι εξισώσεις που διέπουν το κλειστό σύστημα είναι οι

$$\boxed{\begin{gathered} u(t) = -a x_1(t) - b x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \end{gathered}}$$

Διάγραμμα ροής του κλειστού συστήματος με ανάδραση κατάστασης.

↓

Λύση με ανάδραση του ανύσματος κατάστασης (State feedback) (9)



Διάγραμμα ροής του κλειστού συστήματος με ανάδραση κατάστασης.

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012, *Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα.
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 16. Ανάστροφο εκκρεμές (ανάδραση κατάστασης)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης