ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 17. Ανάδραση του ανύσματος κατάστασης και επανατοποθέτηση πόλων του συστήματος

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης καταστάσεως.
- Ackermann’s formula.
- Χρήση Butterworth πολυωνύμων.
- Μέθοδο Faddeev.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη των μεθόδων επανατοποθέτηση ιδιοτιμών ενός συστήματος μιας εισόδου μέσω ανάδρασης καταστάσεως.

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας

(Συστήματα μίας εισόδου και μίας εξόδου)

Έστω το σύστημα της μορφής του χώρου των καταστάσεων

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \textbf{(1)}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Θεώρημα 1

Θεώρημα. Το σύστημα (1) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας

$$\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t) \Rightarrow x(t) = T\tilde{x}(t),$$
$$T \in \mathbb{R}^{n\times n}, |T| \neq 0$$

τέτοιος ώστε οι πίνακες $\tilde{A} \coloneqq T^{-1}AT, \tilde{B} = T^{-1}B$, οι οποίοι περιγράφουν το σύστημα με άνυσμα κατάστασης το $\tilde{x}(t)$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$$

να έχουν την μορφή

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \textbf{(2)}$$

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας

όπου $a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2, \dots, n-1$ είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A:

$$\det(sI_n - A) = d(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Ορισμός. Λέμε ότι οι πίνακες της μορφής (2) βρίσκονται στην **κανονική μορφή ελεγξιμότητας**.

Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας (1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{T}\tilde{x}(t)$$

$$T\dot{\tilde{x}}(t) = AT\tilde{x}(t) + Bu(t)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\tilde{A}}\,\tilde{x}(t) + \underbrace{T^{-1}B}_{\tilde{B}}\,u(t)$$

$$\boxed{\begin{gathered}[sI_n - \tilde{A} \quad \tilde{B}] = \\ = [sT^{-1}T - T^{-1}AT \quad T^{-1}B] = \\ = T^{-1}[sI_n - A \quad B]\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\end{gathered}}$$

Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας (2)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{x(t) = T\tilde{x}(t)}$$

$$T\dot{\tilde{x}}(t) = AT\tilde{x}(t) + Bu(t)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\tilde{A}}\,\tilde{x}(t) + \underbrace{T^{-1}B}_{\tilde{B}}\,u(t)$$

$$\tilde{\mathcal{C}} = [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] =$$

$$= [T^{-1}B \quad (T^{-1}AT)(T^{-1}B) \quad \dots \quad (T^{-1}AT)^{n-1}(T^{-1}B)]$$

$$= [T^{-1}B \quad T^{-1}AB \quad \dots \quad T^{-1}A^{n-1}B]$$

$$= T^{-1}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] =$$

$$= T^{-1}\mathcal{C}$$

Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας (3)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{x(t) = T\tilde{x}(t)}$$

$$T\dot{\tilde{x}}(t) = AT\tilde{x}(t) + Bu(t)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\tilde{A}}\,\tilde{x}(t) + \underbrace{T^{-1}B}_{\tilde{B}}\,u(t)$$

$$\boxed{\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{1}}}$$

$$\tilde{\mathcal{C}} = T^{-1}\mathcal{C} \Rightarrow T\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \Rightarrow T = \mathcal{C} \times \tilde{\mathcal{C}}^{-1}$$

Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας (4)

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\tilde{A}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$
- $\tilde{A}^2\tilde{B} = \tilde{A}\left(\tilde{A}\tilde{B}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_2 \\ -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix}$

Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας (5)

$$\tilde{\mathcal{C}} = [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \quad \tilde{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \mathcal{C} \times \tilde{\mathcal{C}}^{-1} = [B \quad AB \quad A^2B] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης (Eigenvalue assignment via state feedback) (1)

Έστω το σύστημα της μορφής του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \; \textbf{(1)}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Υποθέτουμε ότι όλες οι συνιστώσες $x_i(t), i = 1,2, \dots, n$ του ανύσματος κατάστασης

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

είναι γνωστές – μετρήσιμες (*στην πράξη κάτι τέτοιο συμβαίνει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις*).

Επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης (Eigenvalue assignment via state feedback) (2)

Ορίζουμε «**νόμο ελέγχου**» που αποτελεί **ανάδραση του ανύσματος κατάστασης** μέσω σταθερού πίνακα $F \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (**state feedback control law**), ο οποίος συνίσταται σε ένα γραμμικό συνδυασμό όλων των συνιστωσών $x_i(t), i = 1,2,\ldots,n$ του ανύσματος κατάστασης, με βάση την:

$$u(t) = r(t) + Fx(t) \ \textbf{(2)}$$

$$u(t) = r(t) + Fx(t) = r(t) + \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} =$$

$$= r(t) + f_0 x_1(t) + f_1 x_2(t) + \cdots + f_{n-1} x_n(t) \ \textbf{(3)}$$

Επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης (Eigenvalue assignment via state feedback) (3)

όπου $F = [f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_{n-1}] \in \mathbb{R}^{1\times n}$ και $r(t)$ μία νέα είσοδος αναφοράς.

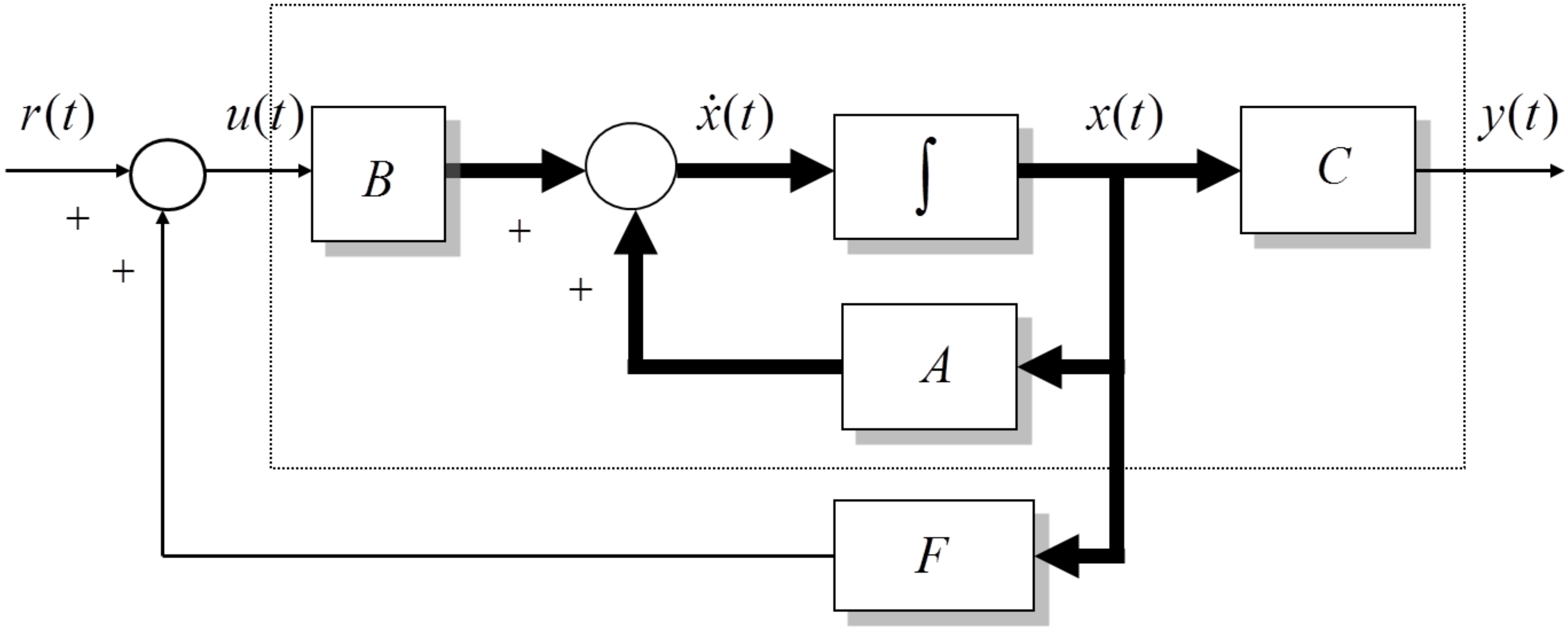
Ορισμός. Ένας νόμος ελέγχου όπως ο (3) ονομάζεται **regulator.**

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε ότι το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι το

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B[r(t) + Fx(t)] = Ax(t) + Br(t) + BFx(t)\\ &= (A + BF)x(t) + Br(t)\end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Br(t)} \quad \textbf{(4)}$$

Επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης (Eigenvalue assignment via state feedback) (4)



Επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης (Eigenvalue assignment via state feedback) (5)

Η ασυμπτωτική ευστάθεια ενός γραμμικού και χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, όπως το σύστημα στην (1), εξαρτάται από τη θέση όλων των ιδιοτιμών του πίνακα A εντός του ανοικτού αριστερού μιγαδικού ημι-επιπέδου $\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C}, Re(s) < 0\}$.

Μετά από ανάδραση του ανύσματος κατάστασης, όπως στην (2), η ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόγχου εξαρτάται από τη θέση όλων των ιδιοτιμών του πίνακα $A + BF$ εντός του $\mathbb{C}^-$.

Θεώρημα 2 (1)

Το ερώτημα που δημιουργείται είναι αν η επιλογή του πίνακα στην (3) μας δίνει τη δυνατότητα επιλογής των ιδιοτιμών του πίνακα $A + BF$ του συστήματος κλειστού βρόγχου στην (4).

Θεώρημα. Για ένα σύστημα της μορφής του χώρου των καταστάσεων (1) ***υπάρχει νόμος ανάδρασης*** του ανύσματος κατάστασης της μορφής

$$u(t) = r(t) + Fx(t)$$

τέτοιος ώστε όλες ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόγχου

$$\boxed{\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Br(t)}$$

να έχουν **αυθαίρετες** (**επιθυμητές**) τιμές *αν και μόνο αν* το σύστημα (1) είναι **ελέγξιμο**.

Θεώρημα 2 (2)

Απόδειξη.

$(\Rightarrow)$ $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ **ελέγξιμο, τότε υπάρχει** $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{1}\times \boldsymbol{n}}$ **τέτοιος ώστε οι ιδιοτιμές του** $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF}$ **να είναι επιθυμητές και αυθαίρετες.**

Αν το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο, τότε υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας $\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t) \Rightarrow x(t) = T\tilde{x}(t)$,

$$T \in \mathbb{R}^{n\times n}, |T| \neq 0$$

τέτοιος ώστε οι πίνακες $\tilde{A} \coloneqq T^{-1}AT,\ \ \tilde{B} = T^{-1}B$, οι οποίοι περιγράφουν το σύστημα με άνυσμα κατάστασης το $\tilde{x}(t)$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad \textbf{(5)}$$

Θεώρημα 2 (3)

να έχουν την κανονική μορφή ελεγξιμότητας

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Για το σύστημα (5), έστω νόμος ελέγχου ανάδρασης του ανύσματος κατάστασης $\tilde{x}(t)$

$$u(t) = \tilde{F}\tilde{x}(t)$$

όπου

$$\tilde{F} = [\tilde{f}_0 \quad \tilde{f}_1 \quad \dots \quad \tilde{f}_{n-1}] \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Θεώρημα 2 (4)

Έστω ότι $a_c(s)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόγχου, έστω δηλαδή ότι

$$a_c(s) = \det\left(sI_n - \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F}\right) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0$$

και έστω ότι

$$\lambda_i^d \in \mathbb{C}^-: Re\left(\lambda_i^d\right) < 0, i = 1,2,..,n$$

είναι οι επιθυμητές ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόγχου έτσι ώστε

$$\left(s - \lambda_1^d\right)\left(s - \lambda_2^d\right) \ldots \left(s - \lambda_n^d\right) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0$$

Θα είναι

Θεώρημα 2 (5)

$$\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{f}_0 & \tilde{f}_1 & \dots & \tilde{f}_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0+\tilde{f}_0 & -a_1+\tilde{f}_1 & -a_2+\tilde{f}_2 & \dots & -a_{n-1}+\tilde{f}_{n-1}\end{bmatrix}$$

Θεώρημα 2 (6)

Για να έχει το σύστημα κλειστού βρόγχου χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $a_c(s)$ και άρα ιδιοτιμές τις $\lambda_i^d, i = 1,2,..,n$ θα πρέπει να είναι

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-1} \end{bmatrix}$$

και άρα θα πρέπει να ισχύουν οι ισότητες

$$-a_0 + \tilde{f}_0 = -d_0, -a_1 + \tilde{f}_1 = -d_1, \dots, -a_{n-1} + \tilde{f}_{n-1} = -d_{n-1}$$

Θεώρημα 2 (7)

θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\tilde{f}_0 = -d_0 + a_0, \tilde{f}_1 = -d_1 + a_1, , \ldots, \tilde{f}_{n-1} = -d_{n-1} + a_{n-1}$$

Ορίζουμε τον πίνακα F από την σχέση

$$u(t) = \tilde{F}\tilde{x}(t) = \tilde{F}\,\underbrace{T^{-1}x(t)}_{\tilde{x}(t)} = \underbrace{\tilde{F}T^{-1}}_{F}\,x(t)$$

Βλέπουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα ανάδρασης

$$F = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

δίνονται από την

$$\boxed{F = \tilde{F}T^{-1}}$$

Θεώρημα 2 (8)

$(\Leftarrow)$ Υπάρχει $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{\mathbf{1}\times \boldsymbol{n}}$ τέτοιος ώστε οι ιδιοτιμές του $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BF}$ να είναι αυθαίρετες, τότε $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ ελέγξιμο.

Έστω ότι υπάρχει $F \in \mathbb{R}^{1\times n}$ τέτοιος ώστε οι ιδιοτιμές του $A + BF$ να είναι αυθαίρετες αλλά δεν είναι ελέγξιμο.

(A, B) δεν είναι ελέγξιμο άρα υπάρχει

$$\lambda \in \mathbb{C}: rank[\lambda I_n - A \;\; B] < n \Rightarrow$$

υπάρχει

$$\xi^T \in \mathbb{R}^{1\times n}, \xi^T \neq [0 \quad \dots \quad 0]: \xi^T[\lambda I_n - A \;\; B] = 0_{1,n+1} \Rightarrow$$

$$\xi^T[\lambda I_n - A\,] = 0_{1,n} \; \kappa\alpha\iota \; \xi^T B = 0 \Rightarrow$$

Θεώρημα 2 (9)

$$\forall F \in \mathbb{R}^{1\times n} \;\; \xi^T BF = 0_{1,n} \Rightarrow$$

$$\forall F \in \mathbb{R}^{1\times n} \; \xi^T [\lambda I_n - A \;\; B] = 0_{1,n}$$

$$\forall F \in \mathbb{R}^{1\times n} \; \textit{το } \lambda \textit{ είναι ιδιοτιμή του } A + BF \Rightarrow$$

Δεν υπάρχει $F \in \mathbb{R}^{1\times n}$ τέτοιος ώστε οι ιδιοτιμές $A + BF$ να είναι αυθαίρετες, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση.

Τι γίνεται αν το σύστημα δεν είναι στην companion form; (1)

Βήμα 1. Ορίζουμε μετασχηματισμό:

$$\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t) \Rightarrow x(t) = T\tilde{x}(t),$$

τέτοιον ώστε να πάρουμε το σύστημα στην ελέγξιμη μορφή:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$$

όπου

$$T = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τι γίνεται αν το σύστημα δεν είναι στην companion form; (2)

Βήμα 2. Υπολογίζουμε τον controller για το σύστημα στην κανονική μορφή

$$u(t) = \tilde{F}\tilde{x}(t)$$

όπου

$$\tilde{F} = [\tilde{f}_0 \quad \tilde{f}_1 \quad \dots \quad \tilde{f}_{n-1}] \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$\tilde{f}_0 = -d_0 + a_0, \tilde{f}_1 = -d_1 + a_1, , \dots , \tilde{f}_{n-1} = -d_{n-1} + a_{n-1}$$

$$(s-\lambda_1^d)(s-\lambda_2^d)\dots(s-\lambda_n^d) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0$$

Βήμα 3. Ο controller που ψάχνουμε έχει την μορφή:

$$u(t) = \underbrace{\tilde{F}T^{-1}}_{F}x(t) + v(t)$$

Bass-Goura approach

2^{η} μέθοδος (Ackermann's formula) (1)

Βήμα 1. Ορίζουμε τον πίνακα (ανάδραση $u(t) = -\mathrm{K}x(t)$)

$$\tilde{A} = A - BK$$

Βήμα 2. Κατασκευάζω το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\det\big(sI_n - (A - BK)\big) = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\dots(s - \mu_n)$$
$$= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$
$$\downarrow \quad \boldsymbol{Cayley - Hamiltton}$$
$$\varphi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + a_{n-1}\tilde{A}^{n-1} + \dots + a_1\tilde{A} + a_0 I_n = 0$$

2η μέθοδος (Ackermann's formula) (2)

$$I_n = I_n \qquad n = 3$$

$$\tilde{A} = A - BK$$

$$\tilde{A}^2 = (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BK\tilde{A}$$

$$\tilde{A}^3 = (A - BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2$$

$$\downarrow$$

$$0 = \varphi\left(\tilde{A}\right) = \tilde{A}^3 + a_2\tilde{A}^2 + a_1\tilde{A} + a_0I_n$$
$$= a_0I_n + a_1(A - BK) + \alpha_2\left(A^2 - ABK - BK\tilde{A}\right)$$
$$+ \left(A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2\right) =$$

$2^{η}$ μέθοδος (Ackermann's formula) (3)

$$= \underbrace{a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3}_{\varphi(A)} - \alpha_1 BK - a_2 ABK - a_2 BK\tilde{A}$$

$$- A^2 BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 =$$

$$= \varphi(A) - B\left(\alpha_1 K + a_2 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2\right) - AB\left(a_2 K + K\tilde{A}\right) - A^2 B(K)$$

$$= \varphi(A) - \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 K + a_2 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ a_2 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 K + a_2 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ a_2 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix}$$

2η μέθοδος (Ackermann's formula) (4)

$$[B \quad AB \quad A^2B]^{-1}\varphi(A) = \begin{bmatrix} \alpha_1 K + a_2 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ a_2 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \xRightarrow{\times[0 \quad 0 \quad I]}$$

$$[0 \quad 0 \quad I][B \quad AB \quad A^2B]^{-1}\varphi(A) = [0 \quad 0 \quad I]\begin{bmatrix} \alpha_1 K + a_2 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ a_2 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$2^η$ μέθοδος (Ackermann's formula) (5)

Βήμα 3.

$$K = [0 \quad 0 \quad I][B \quad AB \quad A^2B]^{-1}\varphi(A)$$

όπου

$$\varphi(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3$$

και a_i οι συντελεστές του **επιθυμητού** χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Επιθυμητές θέσεις πόλων (χρήση Butterworth πολυωνύμων) (1)

$$\frac{s}{w_0} = (-1)^{\frac{n+1}{2n}} = \left(e^{j(2k+1)\pi}\right)^{\frac{n+1}{2n}}, k = 0,1,2,\ldots$$

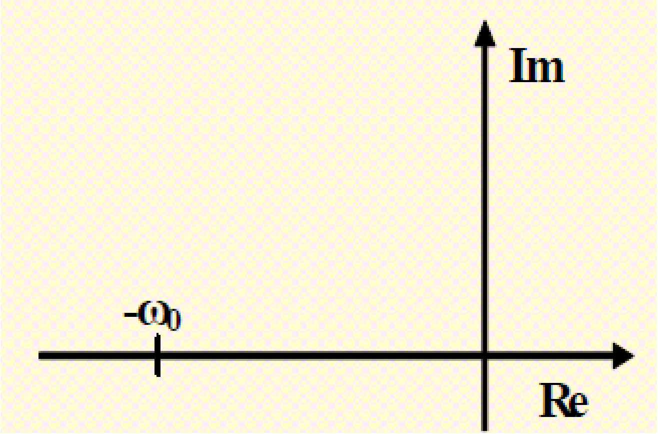
w_0 σταθερά

n πλήθος επιθυμητών πόλων

$n = 1,$

$k = 1,$

$s = w_0\left(\cos(\pi) + j sin(\pi)\right) = -w_0$



Επιθυμητές θέσεις πόλων (χρήση Butterworth πολυωνύμων) (2)

$$\frac{s}{w_0} = (-1)^{\frac{n+1}{2n}} = \left(e^{j(2k+1)\pi}\right)^{\frac{n+1}{2n}}, k = 0,1,2, \ldots$$

w_0 σταθερά

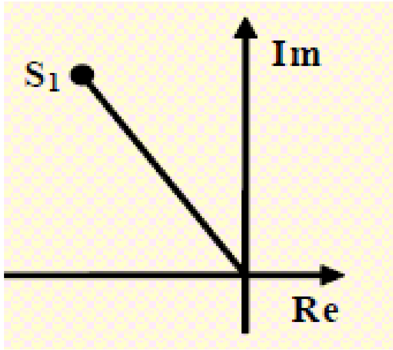
n πλήθος επιθυμητών πόλων

$n = 2,$

$$s = w_0 \left(\cos((2k+1)\pi) + jsin((2k+1)\pi)\right)^{\frac{2+1}{2\times 2}}$$

$$= w_0 \left(\cos\left(\frac{3(2k+1)}{4}\pi\right) + jsin\left(\frac{3(2k+1)}{4}\pi\right)\right)$$

$$k = 0, s_1 = w_0 \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + jsin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$$



Επιθυμητές θέσεις πόλων (χρήση Butterworth πολυωνύμων) (3)

$$\frac{s}{w_0} = (-1)^{\frac{n+1}{2n}} = \left(e^{j(2k+1)\pi}\right)^{\frac{n+1}{2n}}, k = 0,1,2, \dots$$

w_0 σταθερά, n πλήθος επιθυμητών πόλων

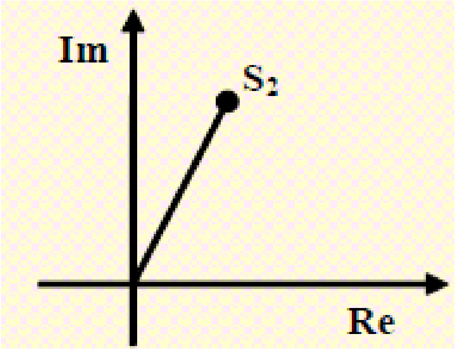
$n = 2,$

$$s = w_0\left(\cos\left((2k+1)\pi\right) + j sin\left((2k+1)\pi\right)\right)^{\frac{2+1}{2\times 2}}$$

$$= w_0\left(\cos\left(\frac{3(2k+1)}{4}\pi\right) + j sin\left(\frac{3(2k+1)}{4}\pi\right)\right)$$

$$k = 1, s_2 = w_0\left(\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) + j sin\left(\frac{9}{4}\pi\right)\right)$$

απορρίπτεται



Επιθυμητές θέσεις πόλων (χρήση Butterworth πολυωνύμων) (4)

$$\frac{s}{w_0} = (-1)^{\frac{n+1}{2n}} = \left(e^{j(2k+1)\pi}\right)^{\frac{n+1}{2n}}, k = 0,1,2,\ldots$$

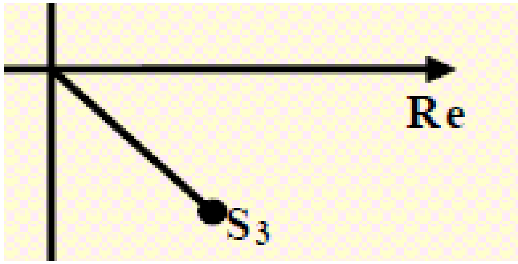
w_0 σταθερά, n πλήθος επιθυμητών πόλων

$n = 2,$

$$s = w_0\left(\cos\big((2k+1)\pi\big) + jsin\big((2k+1)\pi\big)\right)^{\frac{2+1}{2\times 2}}$$

$$= w_0\left(\cos\left(\frac{3(2k+1)}{4}\pi\right) + jsin\left(\frac{3(2k+1)}{4}\pi\right)\right)$$

$$k = 2, s_2 = w_0\left(\cos\left(\frac{15}{4}\pi\right) + jsin\left(\frac{15}{4}\pi\right)\right)$$



απορρίπτεται

Επιθυμητές θέσεις πόλων (χρήση Butterworth πολυωνύμων) (5)

$$\frac{s}{w_0} = (-1)^{\frac{n+1}{2n}} = \left(e^{j(2k+1)\pi}\right)^{\frac{n+1}{2n}}, k = 0,1,2, \dots$$

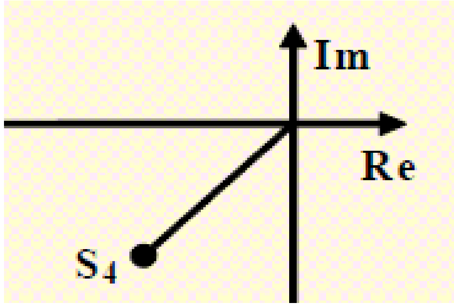
w_0 σταθερά, n πλήθος επιθυμητών πόλων

$n = 2,$

$$s = w_0\left(\cos\big((2k+1)\pi\big) + j\sin\big((2k+1)\pi\big)\right)^{\frac{2+1}{2\times 2}}$$

$$= w_0\left(\cos\left(\frac{3(2k+1)}{4}\pi\right) + j\sin\left(\frac{3(2k+1)}{4}\pi\right)\right)$$

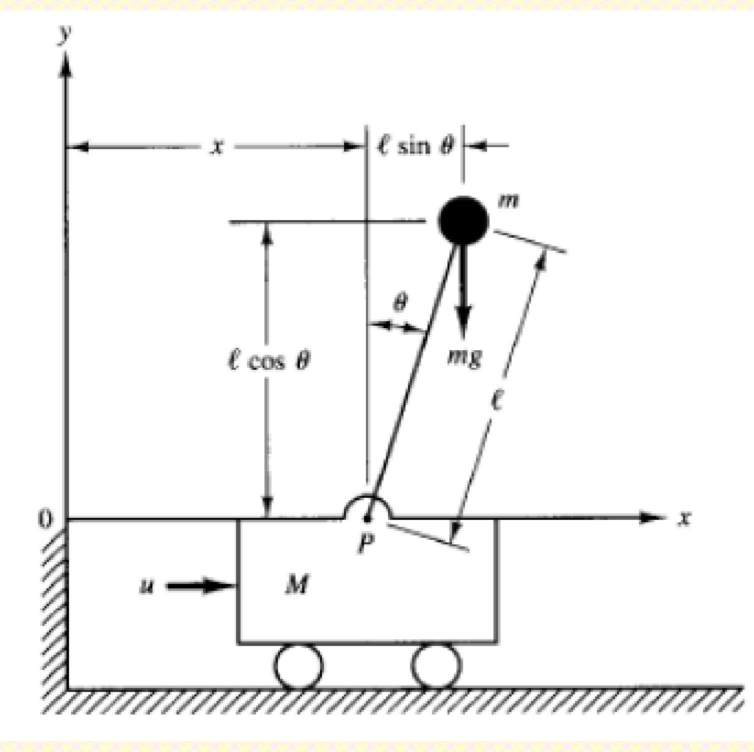
$$k = 3, s_2 = w_0\left(\cos\left(\frac{21}{4}\pi\right) + j\sin\left(\frac{21}{4}\pi\right)\right)$$



Παράδειγμα 1 (1)
Ανάστροφο εκκρεμές

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \dfrac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{m}{M}g & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{1}{Ml}\\ 0\\ \dfrac{1}{M}\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$



Παράδειγμα 1 (2)
Ανάστροφο εκκρεμές

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 20.601 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -0.4905 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0.5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Bass-Goura formula

$$M=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & A^3B\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & -20.601\\ -1 & 0 & -20.601 & 0\\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905\\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0\end{bmatrix}$$

$\det(M)=96.2361\neq 0$ Ελέγξιμο

Παράδειγμα 1 (3)
Ανάστροφο εκκρεμές

$$\det[sI_4 - A] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -20.601 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0.4905 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = s^4 - 20.601s^2$$

$$\boxed{a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -20.601, a_3 = 0}$$

$$T = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα 1 (4)
Ανάστροφο εκκρεμές

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -20.601 & 0 & 1 \\ -20.601 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0. & 0. & -1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -1. \\ -9.81 & 0. & 0.5 & 0. \\ 0. & -9.81 & 0. & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{u(t) = Kx(t) + v(t)}$$

Παράδειγμα 1 (5)
Ανάστροφο εκκρεμές

Επιθυμητοί πόλοι:

$$\mu_1 = -2 + j2\sqrt{3},$$
$$\mu_2 = -2 - j2\sqrt{3},$$
$$\mu_3 = -10,$$
$$\mu_4 = -10$$

$$d(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)(s-\mu_4) =$$
$$= s^4 + 24s^3 + 196s^2 + 720s + 1600 =$$
$$= s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$$

$$K = \underbrace{\tilde{F}T^{-1}}_{F} = [\tilde{f}_0 \quad \tilde{f}_1 \quad \tilde{f}_2 \quad \tilde{f}_3]T^{-1}$$
$$= [a_0 - d_0 \quad a_1 - d_1 \quad a_2 - d_2 \quad a_3 - d_3]T^{-1}$$

Παράδειγμα 1 (6)
Ανάστροφο εκκρεμές

$$= \begin{bmatrix} 0-1600 & 0-720 & -20.601-196 & 0-24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0. & 0. & -1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -1. \\ -9.81 & 0. & 0.5 & 0. \\ 0. & -9.81 & 0. & 0.5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 298.1504 & 60.6972 & 163.0989 & 73.3954 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (7)
Ανάστροφο εκκρεμές

Ackermann's formula

$$d(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)(s-\mu_4) =$$

$$= s^4 + 24s^3 + 196s^2 + 720s + 1600 =$$

$$= s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$$

$$d_3 = 24, d_2 = 196, d_1 = 720, d_0 = 1600$$

$$\varphi(A) = A^4 + d_3 A^3 + d_2 A^2 + d_1 A + d_0 I_4 =$$

$$= A^4 + 24A^3 + 196A^2 + 720A + 1600 I_4$$

$$= \begin{bmatrix} 6062.1972 & 1214.424 & 0. & 0. \\ 25018.3488 & 6062.197201 & 0. & 0. \\ -106.2428 & -11.772 & 1600. & 720. \\ -595.6750 & -106.2428 & 0. & 1600. \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (8)
Ανάστροφο εκκρεμές

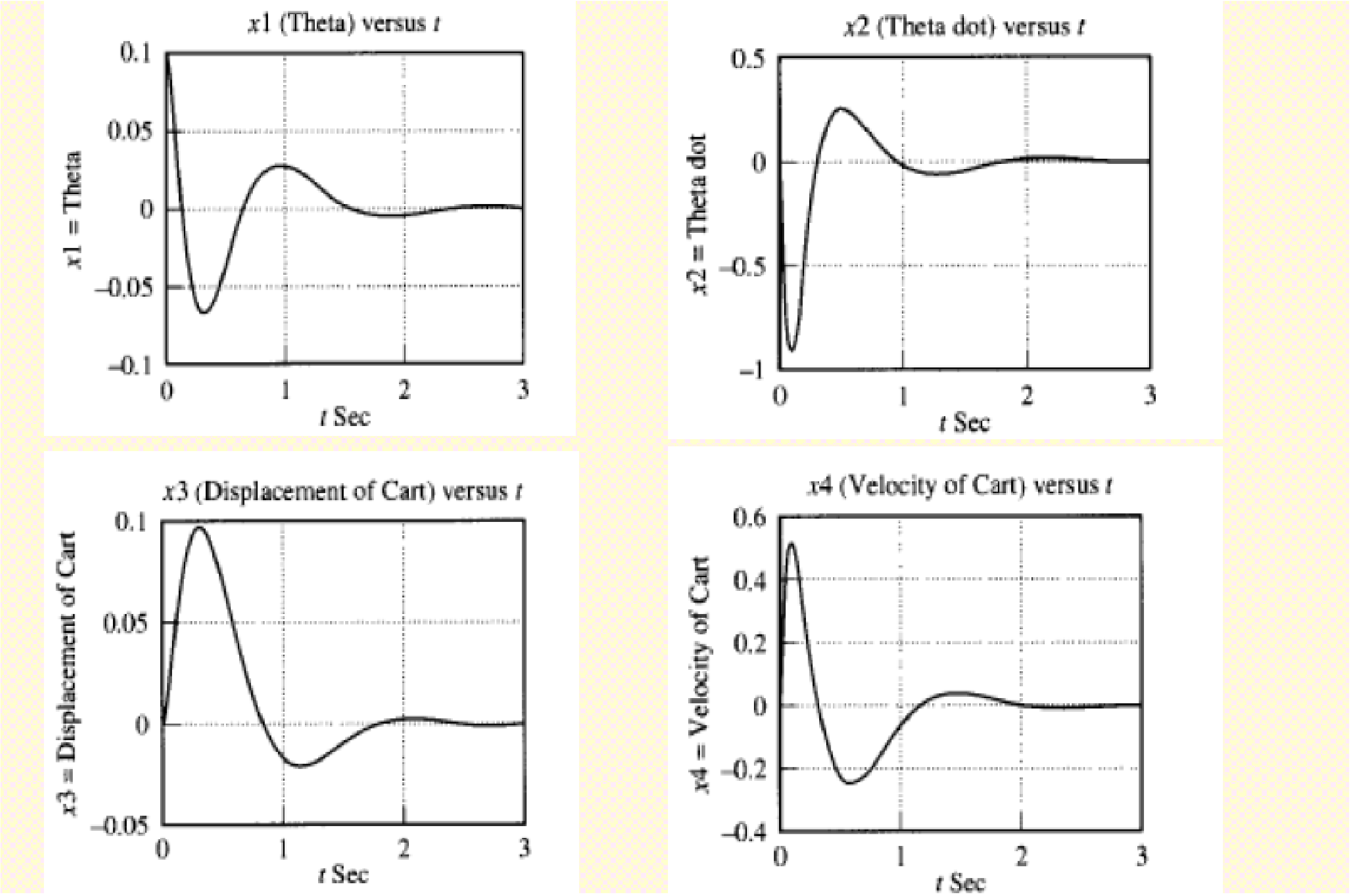
$$K = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1][B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]^{-1}\varphi(A) =$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 6062.1972 & 1214.424 & 0. & 0. \\ 25018.3488 & 6062.197201 & 0. & 0. \\ -106.2428 & -11.772 & 1600. & 720. \\ -595.6750 & -106.2428 & 0. & 1600. \end{bmatrix} =$$

$$= [-298.15 \quad -60.6972 \quad -163.099 \quad -73.3945]$$

Παράδειγμα 1 (9)
Ανάστροφο εκκρεμές



Μέθοδο Faddeev (1)

(A, B, C) Γ.Χ.Α. σύστημα μιας εισόδου μιας εξόδου

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t),$$
$$y(t), u(t) \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}^n,$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, C \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

και γραμμική ανάδραση κατάστασης

$$u(t) = v(t) - kx(t), \big(v(t) = u(t) + kx(t)\big)$$
$$k = [k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_n]$$
$$k \in \mathbb{R}^{1\times n}, (row\ vector)$$

Μέθοδο Faddeev (2)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$\alpha(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Να βρεθεί ένας πίνακας $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τέτοιος ώστε αν εφαρμόσω την ανάδραση κατάστασης:

$$u(t) = v(t) - Kx(t)$$

το καινούργιο σύστημα να έχει ως χαρακτηριστικό πολυώνυμο το:

$$\hat{\alpha}(s) = s^n + \hat{a}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \hat{a}_1 s + \hat{a}_0$$

Μέθοδο Faddeev (3)

$$\boxed{\left(sI_n - A\right)^{-1} = \frac{Adj\left(sI_n - A\right)}{\det\left(sI_n - A\right)}}$$

$$\det\left(sI_n - A\right) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n$$

$$Adj\left(sI_n - A\right) = s^{n-1} I_n + R_1 s^{n-2} + R_2 s^{n-3} + \cdots + R_{n-1}$$

$$R_1 = A + a_1 I_n$$

$$R_2 = AR_1 + a_2 I_n = A\left(A + a_1 I_n\right) + a_2 I_n = A^2 + a_1 A + a_2 I_n$$

$$R_3 = AR_2 + a_3 I_n = A\left(A^2 + a_1 A + a_2 I_n\right) + a_3 I_n = A^3 + a_1 A^2 + a_2 A + a_3 I_n$$

....

$$R_{n-1} = AR_{n-2} + a_{n-1} I_n = A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + \cdots + a_{n-1} I_n$$

Μέθοδο Faddeev (4)

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t)$$
$$y(t) = (C - DK)x(t) + Dv(t)$$

$$a_k(s) = \det(sI_n - A + BK) =$$
$$= \det\{(sI_n - A)[I_n + (sI_n - A)^{-1}BK]\}$$
$$= det(sI_n - A)det[I_n + (sI_n - A)^{-1}BK]$$
$$= a(s)[1 + K(sI_n - A)^{-1}B]$$

$$\boxed{a_k(s) - a(s) = a(s)K(sI_n - A)^{-1}B}$$

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{a(s)}[s^{n-1}I_n + s^{n-2}(A + a_{n-1}I_n) + s^{n-3}(A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I_n) + \cdots]$$

Μέθοδο Faddeev (5)

Μέθοδο Faddeev

- $\hat{a}_{n-1} - a_{n-1} = KB$
- $\hat{a}_{n-2} - a_{n-2} = KAB + a_{n-1}KB$
- $\hat{a}_{n-3} - a_{n-3} = KA^2B + a_{n-1}KAB + a_{n-2}KB$

$$\vdots$$

- $\hat{a} - a = K\mathcal{C}Q^T$

$$\hat{a} = [\hat{a}_{n-1} \quad \dots \quad \hat{a}_1 \quad \hat{a}_0], \qquad a = [a_{n-1} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0]$$

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{K = (\hat{a} - a)(Q^T)^{-1}\mathcal{C}^{-1}}$$

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Να βρεθεί $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$ τέτοιο ώστε αν εφαρμόσω ανάδραση κατάστασης:

$$u(t) = v(t) - Kx(t)$$

το καινούργιο σύστημα να έχει ιδιοτιμές τις $\{-1, -2, -3\}$.

$$\boxed{K = (\hat{a} - a)(Q^T)^{-1}\mathcal{C}^{-1}}$$

Παράδειγμα 2 (2)

Λύση

$$\hat{a} = [\hat{a}_{n-1} \quad \dots \quad \hat{a}_1 \quad \hat{a}_0]$$
$$a = [a_{n-1} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0]$$
$$\hat{a}(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = (s^2+3s+2)(s+3)$$
$$= s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$
$$a(s) = (s^2-1)(s-3) = s^3 - 3s^2 - s + 3$$

Παράδειγμα 2 (3)

$$\hat{a} - a = [6 \quad 11 \quad 6] - [-3 \quad -1 \quad 3] = [9 \quad 12 \quad 3]$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2 (4)

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$K = [9 \quad 12 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= [9 \quad 39 \quad 129] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = [9 \quad -81 \quad -120]$$

Κλειστό σύστημα

Κλειστό σύστημα

$$\boxed{\begin{gathered}\dot{x}(t) = (A - Bk)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t)\end{gathered}}$$

Χαρακτηριστικά πολυώνυμα

$$a_c(s) = det(sI - A + Bk) \coloneqq a(s), \qquad a(s) = det(sI - A)$$

Bass-Gura formula

Ορίζουσες

- Ορίζουσα Τριγωνικού Μπλόκ πίνακα

$$\det\begin{bmatrix} P & 0 \\ R & S \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{bmatrix} = \det(P)\det(S)$$

- Μπλοκ πίνακες

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ R & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & P^{-1}Q \\ 0 & S - RP^{-1}Q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Q \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P - QS^{-1}R & 0 \\ S^{-1}R & I \end{bmatrix}$$

- $det(P) \cdot 1 \cdot 1 \cdot det(S - RP^{-1}Q) =$
  $1 \cdot det(S) \cdot det(P - QS^{-1}R) \cdot 1$

Εφαρμογή (1)

$$det\begin{bmatrix} sI-A & B \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\det(sI-A)\det(1 + k(sI-A)^{-1}B) = 1\det\big((sI-A)+B1^{-1}k\big)$$

Κάνοντας χρήση της Bass-Gura formula

$$\det(sI-A)\det(1 + k(sI-A)^{-1}B) = 1\det\big((sI-A)+B1^{-1}k\big)$$

$$\alpha(s)(1+k(sI-A)^{-1}B) = \det(sI-A+Bk) = \boldsymbol{a}(s)$$

$$\boldsymbol{a}(s) = \alpha(s)(1+k(sI-A)^{-1}B) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{a}(s) - \alpha(s) = \alpha(s)k(sI-A)^{-1}B$$

Εφαρμογή (2)

from the resolvent formula

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{a(s)}\left(s^{n-1}I + s^{n-2}(A + \alpha_1 I) + s^{n-3}(A^2 + \alpha_1 A + \alpha_2 I) + \cdots\right) =$$

$$(\boldsymbol{\alpha_1} - \alpha_1)s^{n-1} + (\boldsymbol{\alpha_2} - \alpha_2)s^{n-2} + \cdots + (\boldsymbol{\alpha_n} - \alpha_n)$$

$$= kBs^{n-1} + k(A + a_1 I)Bs^{n-2} + \cdots$$

Εφαρμογή (3)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha_1} - \alpha_1 = kB \\ \boldsymbol{\alpha_2} - \alpha_2 = kAB + a_1 kB = a_1 kB + kAB \\ \boldsymbol{\alpha_3} - \alpha_3 = kA^2B + a_1 kAB + a_2 kB = a_2 kB + a_1 kAB + kA^2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a} - a = k\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} - a = k\mathcal{C}T_{\mathcal{C}}^T}$$

- Εάν το σύστημα είναι ελέγξιμο

$$\boxed{k = (\boldsymbol{a} - a)T_{\mathcal{C}}^{-T}\mathcal{C}^{-1}}$$

Άσκηση 1

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Κατασκευάστε (εάν είναι δυνατόν) έναν ελεγκτή κατάστασης ο οποίος σταθεροποιεί το σύστημα.

Άσκηση 2

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Κατασκευάστε (εάν είναι δυνατόν) έναν ελεγκτή κατάστασης ο οποίος σταθεροποιεί το σύστημα.

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012, *Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα.
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 17. Ανάδραση του ανύσματος κατάστασης και επανατοποθέτηση πόλων του συστήματος». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης